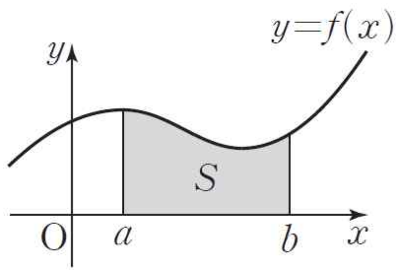
Ⅲ_2. 정적분의 활용

[12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를
　구할 수 있다.
[12수학Ⅱ03-06] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.

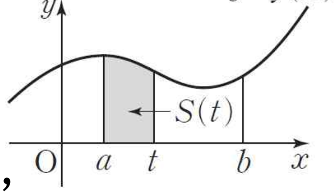
① 곡선과 x축 사이의 넓이



함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

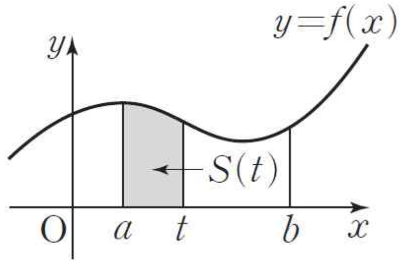
$$S=\int_a^b |f(x)|\,dx$$

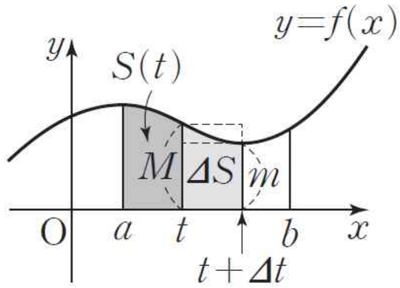
☑ 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S를 구해 보자.



① 닫힌구간 $[a, b]$에서 $f(x) \geq 0$일 때,
곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=t$ $(a \leq t \leq b)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(t)$

라 하자. x의 값이 t에서 $t+\Delta t$까지 변할 때 $S(t)$의 증분을 ΔS라 하면 $\Delta S = S(t+\Delta t) - S(t)$이다.





㉠ $\Delta t > 0$일 때, 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[t,\, t+\Delta t]$에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다. 이때 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하면

$$m\Delta t \le \Delta S \le M\Delta t, \text{ 즉 } m \le \frac{\Delta S}{\Delta t} \le M \text{이다.}$$

㉡ $\Delta t < 0$일 때, ㉠과 같은 방법으로

$$m \le \frac{\Delta S}{\Delta t} \le M \text{이다.}$$

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a,\, b]$에서 연속이고 $\Delta t \to 0$이면 $m \to f(t)$, $M \to f(t)$이므로 $\displaystyle\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = f(t)$, 즉 $S'(t) = f(t)$이다. 따라서 $S(t)$는 $f(t)$의 한 부정적분이다. 이때 $S(a) = 0$이므로

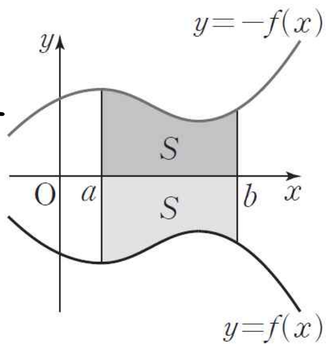
$$\int_a^t f(x)\,dx = \Big[\, S(x) \Big]_a^t = S(t) - S(a) = S(t)$$

이다. 또 $t = b$일 때 $S(b) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$이다.

그런데 $S(b)$는 곡선 $y = f(x)$와 x축 및 두 직선 $x = a$, $x = b$로 둘러싸인 부분의 넓이이므로 S는 다음과 같다.

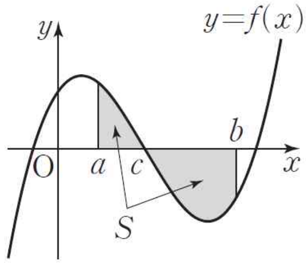
$$S = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b |\,f(x)\,|\,dx$$

② 닫힌구간 $[a, b]$에서 $f(x) \le 0$일 때,
곡선 $y=f(x)$를 x축에 대하여 대칭이동한 곡선 $y=-f(x)$에 대하여 닫힌구간 $[a, b]$에서 $-f(x) \ge 0$이므로 S는



$$S=\int_a^b \{-f(x)\}\,dx=\int_a^b |f(x)|\,dx$$

③ 닫힌구간 $[a, c]$에서 $f(x) \ge 0$이고
닫힌구간 $[c, b]$에서 $f(x) \le 0$일 때,

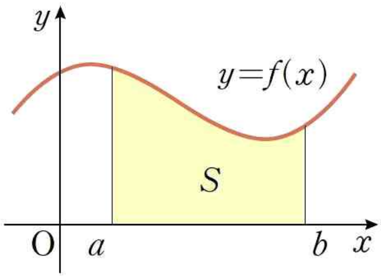


$$S=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b \{-f(x)\}\,dx$$

$$=\int_a^c |f(x)|\,dx+\int_c^b |f(x)|\,dx=\int_a^b |f(x)|\,dx$$

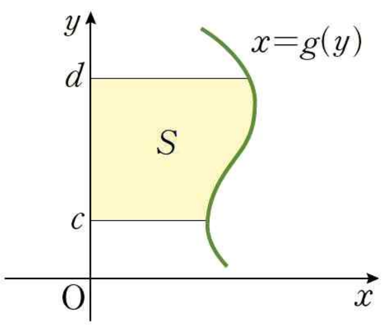
✡ 곡선과 축 사이의 넓이

(1) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때,
곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S_x는



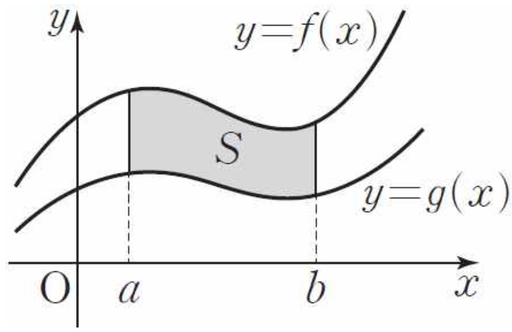
$$S_x=\int_a^b |y|\,dx=\int_a^b |f(x)|\,dx$$

(2) 함수 $g(y)$가 구간 $[c, d]$에서 연속일 때,
곡선 $x=g(y)$와 y축 및 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 부분의 넓이 S_y는



$$S_y=\int_c^d |x|\,dy=\int_c^d |g(y)|\,dy$$

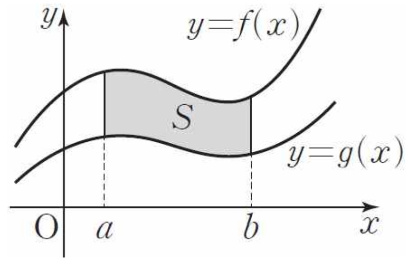
2 두 곡선 사이의 넓이



두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

☑ 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S를 구해 보자.

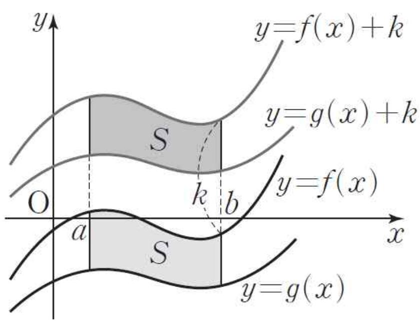


① 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\ge g(x)\ge 0$일 때,

$$S=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx$$

$$=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

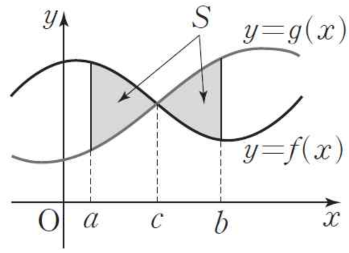
② 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\ge g(x)$이고 $f(x)$ 또는 $g(x)$의 값이 음수인 경우가 있을 때,



두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동하여 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)+k\ge g(x)+k\ge 0$이 되게 한다. 이때 넓이 S는 두 곡선 $y=f(x)+k$, $y=g(x)+k$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로

$$S=\int_a^b[\{f(x)+k\}-\{g(x)+k\}]\,dx$$

$$=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}\,dx=\int_a^b|f(x)-g(x)|\,dx$$



③ 닫힌구간 $[a,\,c]$에서 $f(x)\ge g(x)$
닫힌구간 $[c,\,b]$에서 $f(x)\le g(x)$

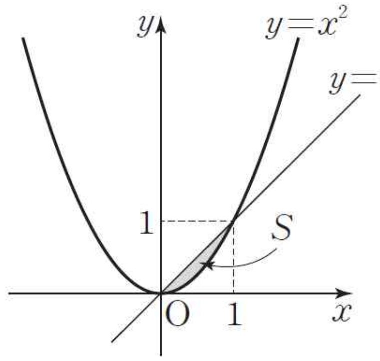
$$S=\int_a^c\{f(x)-g(x)\}\,dx+\int_c^b\{g(x)-f(x)\}\,dx$$

$$=\int_a^c|f(x)-g(x)|\,dx+\int_c^b|g(x)-f(x)|\,dx$$

$$=\int_a^b|f(x)-g(x)|\,dx$$

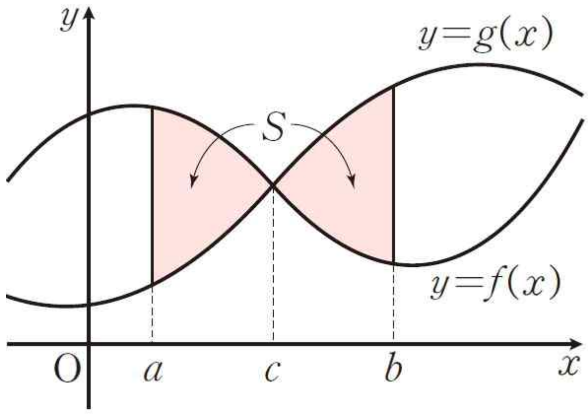
☑ 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a,\,b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이는 곡선 $y=f(x)-g(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

예 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이 S를 구해 보자. 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=x$가 만나는 점의 x좌표는 $x^2=x$에서
$x(x-1)=0$, 즉 $x=0$ 또는 $x=1$
따라서 구하는 넓이 S는



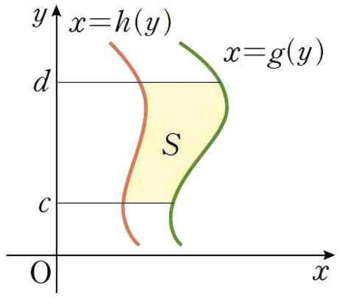
$$S=\int_0^1|x^2-x|\,dx=\int_0^1(x-x^2)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{6}$$

✡ 두 곡선 사이의 넓이



(1) 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속인 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S_x는

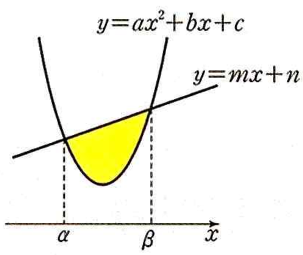
$$S_x=\int_a^b |y_1-y_2|\,dx=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$



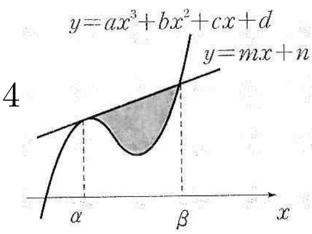
(2) 닫힌구간 $[c,\ d]$에서 연속인 두 곡선 $x=g(y)$와 $x=h(y)$ 및 $x=c$, $x=d$로 둘러싸인 도형의 넓이 S_y는

$$S_y=\int_c^d |x_1-x_2|\,dy=\int_c^d |g(y)-h(y)|\,dy$$

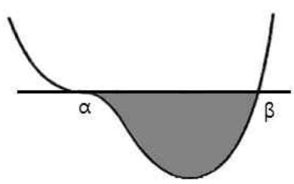
✡ 넓이 공식



(1) $\displaystyle\int_\alpha^\beta |a(x-\alpha)(x-\beta)|\,dx=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$

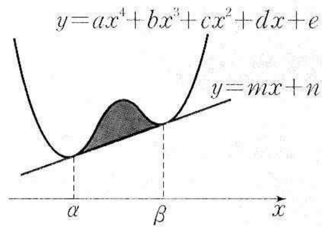


(2) $\displaystyle\int_\alpha^\beta |a(x-\alpha)^2(x-\beta)|\,dx=\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^4$

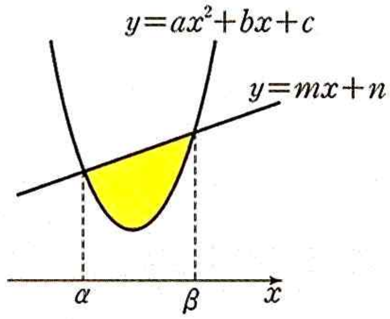


(3) $\displaystyle\int_\alpha^\beta |a(x-\alpha)^3(x-\beta)|\,dx=\frac{|a|}{20}(\beta-\alpha)^5$

(4) $\displaystyle\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)^2(x-\beta)^2\,dx=\frac{|a|}{30}(\beta-\alpha)^5$



✡ 이차함수와 정적분



(1) $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$

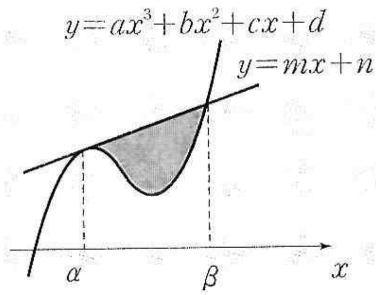
$$= a\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)\{(x-\alpha)+(\alpha-\beta)\}\,dx$$

$$= a\int_{\alpha}^{\beta} \{(x-\alpha)^2+(x-\alpha)(\alpha-\beta)\}\,dx$$

$$= a\left[\frac{(x-\alpha)^3}{3}+(\alpha-\beta)\frac{(x-\alpha)^2}{2}\right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$= a\left\{\frac{(\beta-\alpha)^3}{3}-\frac{(\beta-\alpha)^3}{2}\right\} = -\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$$

✡ 이중근이 있는 삼차함수와 정적분



(2) $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)^2(x-\beta)\,dx$

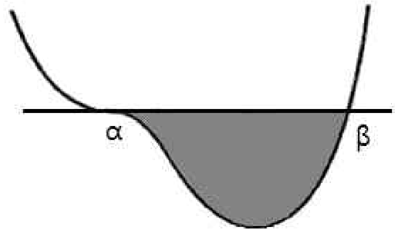
$$= a\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^2\{(x-\alpha)+(\alpha-\beta)\}\,dx$$

$$= a\int_{\alpha}^{\beta} \{(x-\alpha)^3+(x-\alpha)^2(\alpha-\beta)\}\,dx$$

$$= a\left[\frac{(x-\alpha)^4}{4}+(\alpha-\beta)\frac{(x-\alpha)^3}{3}\right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$= a\left\{\frac{(\beta-\alpha)^4}{4}-\frac{(\beta-\alpha)^4}{3}\right\} = -\frac{a}{12}(\beta-\alpha)^4$$

✡ 삼중근이 있는 사차함수와 정적분



(3) $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} a\,(x-\alpha)^3\,(x-\beta)\,dx$

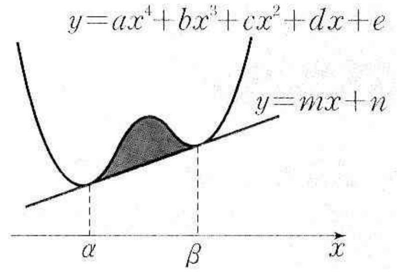
$$= a\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^3\{(x-\alpha)+(\alpha-\beta)\}\,dx$$

$$= a\int_{\alpha}^{\beta}\{(x-\alpha)^4+(x-\alpha)^3(\alpha-\beta)\}\,dx$$

$$= a\left[\frac{(x-\alpha)^5}{5}+(\alpha-\beta)\frac{(x-\alpha)^4}{4}\right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$= a\left\{\frac{(\beta-\alpha)^5}{5}-\frac{(\beta-\alpha)^5}{4}\right\} = -\frac{a}{20}(\beta-\alpha)^5$$

✡ 이중근이 있는 사차함수와 정적분



(4) $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} a\,(x-\alpha)^2\,(x-\beta)^2\,dx$

$$= a\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2\{(x-\alpha)+(\alpha-\beta)\}^2\,dx$$

$$= a\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2\{(x-\alpha)^2+2(x-\alpha)(\alpha-\beta)+(\alpha-\beta)^2\}\,dx$$

$$= a\int_{\alpha}^{\beta}\{(x-\alpha)^4+2(x-\alpha)^3(\alpha-\beta)+(x-\alpha)^2(\alpha-\beta)^2\}\,d$$

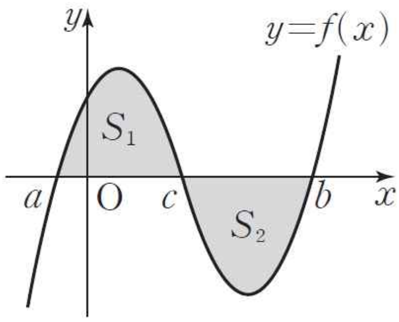
$$= a\left[\frac{(x-\alpha)^5}{5} + (\alpha-\beta)\frac{2(x-\alpha)^4}{4} + (\alpha-\beta)^2\frac{(x-\alpha)^3}{3}\right]_\alpha^\beta$$

$$= a\left\{\frac{(\beta-\alpha)^5}{5} - \frac{(\beta-\alpha)^5}{2} + \frac{(\beta-\alpha)^5}{3}\right\}$$

$$= \frac{a}{30}(\beta-\alpha)^5$$

3 두 곡선으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 같은 경우

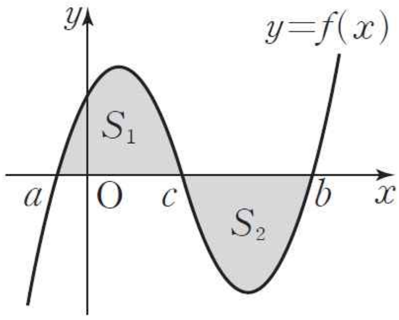
(1) 곡선과 x축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 같은 경우



그림과 같이 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 닫힌구간 $[a,\ c]$에서 $f(x) \geq 0$, 닫힌구간 $[c,\ b]$에서 $f(x) \leq 0$이며, 닫힌구간 $[a,\ c]$와 닫힌구간 $[c,\ b]$에서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때,

$$S_1 = S_2 \text{이면 } \int_a^b f(x)\,dx = 0$$

☑ 닫힌구간 $[a, c]$에서 $f(x) \geq 0$, 닫힌구간 $[c, b]$에서 $f(x) \leq 0$이므로



$$S_1 = \int_a^c f(x)\,dx$$

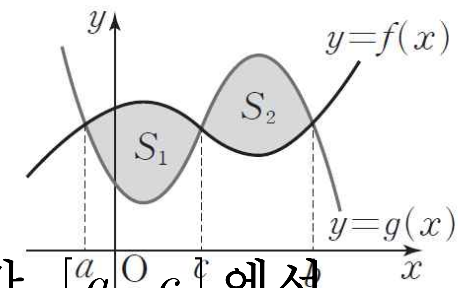
$$S_2 = \int_c^b \{-f(x)\}\,dx = -\int_c^b f(x)\,dx$$

이때 $S_1 = S_2$이면 $\int_a^c f(x)\,dx = -\int_c^b f(x)\,dx$이므로

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = 0$$

따라서 $\int_a^b f(x)\,dx = 0$

(2) 두 곡선으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 같은 경우



그림과 같이 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 닫힌구간 $[a, c]$에서 $f(x) \geq g(x)$, 닫힌구간 $[c, b]$에서 $f(x) \leq g(x)$이며, 닫힌구간 $[a, c]$와 닫힌구간 $[c, b]$에서 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때,

$$S_1 = S_2 \text{이면 } \int_a^b \{f(x) - g(x)\}\,dx = 0$$

☑ 닫힌구간 $[a, c]$에서 $f(x) \geq g(x)$, 닫힌구간 $[c, b]$에서 $f(x) \leq g(x)$이므로

$$S_1 = \int_a^c \{f(x) - g(x)\}\,dx$$

$$S_2 = \int_c^b \{g(x) - f(x)\}\,dx = -\int_c^b \{f(x) - g(x)\}\,dx$$

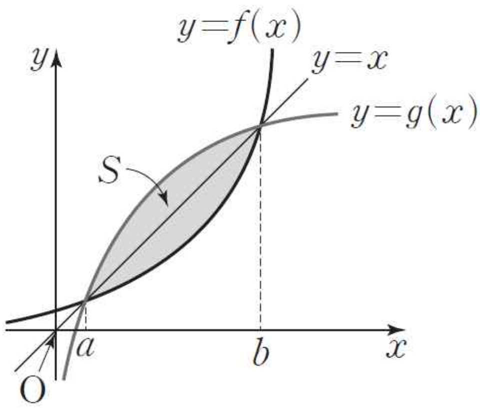
이때 $S_1 = S_2$ 이면

$\int_a^c \{f(x) - g(x)\}\,dx = -\int_c^b \{f(x) - g(x)\}\,dx$ 이므로

$$\int_a^c \{f(x) - g(x)\}\,dx + \int_c^b \{f(x) - g(x)\}\,dx = 0$$

따라서 $\int_a^b \{f(x) - g(x)\}\,dx = 0$

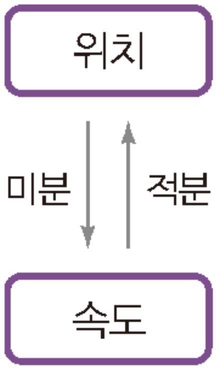
4 역함수와 넓이의 관계



역함수가 존재하는 연속인 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 그림과 같이 두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$가 두 점 $(a,\,a)$, $(b,\,b)$에서만 만날 때, 닫힌구간 $[a,\,b]$에서 두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S = 2\int_a^b |x - f(x)|\,dx$$

5 속도와 거리



수직선을 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하자.

(1) 시각 t에서의 점 P의 위치를 $x(t)$라 하면

$$x(t) = x(a) + \int_a^t v(t)\,dt$$

(2) 시각 $t = a$에서 $t = b$ $(a \leq b)$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_a^b v(t)\,dt$$

↳ (정적분)

(3) 시각 $t = a$에서 $t = b$ $(a \leq b)$까지 점 P의 움직인 거리 s는

$$s = \int_a^b |v(t)|\,dt$$

↳ (넓이)

☑ (1) $\dfrac{d}{dt}x(t) = v(t)$에서 $x(t)$는 $v(t)$의 한 부정적분

이므로

$$\int_a^t v(t)\,dt = \Big[\, x(t) \,\Big]_a^t = x(t) - x(a)$$

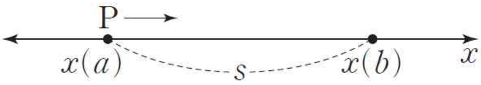
따라서 $x(t) = x(a) + \displaystyle\int_a^t v(t)\,dt$

(2) 시각 $t = a$에서 $t = b$에서의 점 P의 위치가 각각 $x(a)$, $x(b)$이므로 시각 $t = a$에서 $t = b$ $(a \leq b)$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$x(b) - x(a) = \Big[\, x(t) \,\Big]_a^b = \int_a^b v(t)\,dt$$

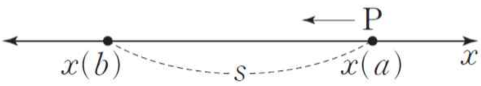
(3) 시각 $t=a$에서 $t=b$ $(a \le b)$까지 점 P의 움직인 거리 s는

① 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 $v(t) \ge 0$일 때, 점 P는 양의 방향으로 움직이므로 $s = x(b) - x(a)$ 이다. 즉,



$$s = x(b) - x(a) = \int_a^b v(t)\,dt = \int_a^b |v(t)|\,dt$$

② 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 $v(t) \le 0$일 때, 점 P는 음의 방향으로 움직이므로 $s = x(a) - x(b)$ 이다. 즉,



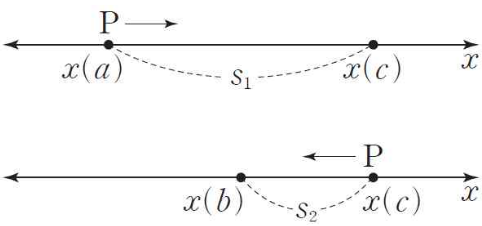
$$s = x(a) - x(b) = -\int_a^b v(t)\,dt = \int_a^b \{-v(t)\}\,dt$$

$$= \int_a^b |v(t)|\,dt$$

③ 닫힌구간 $[a,\ c]$에서 $v(t) \ge 0$

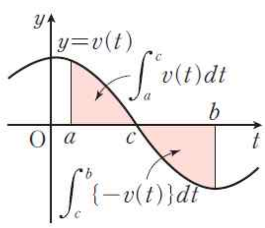
닫힌구간 $[c,\ b]$에서 $v(t) \le 0$

시각 $t=a$에서 $t=c$까지 점 P가



움직인 거리를 s_1, 시각 $t=c$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리를 s_2라 하면 $s = s_1 + s_2$이고 ①, ②와 같은 방법으로

$$s = s_1 + s_2 = \{x(c) - x(a)\} + \{x(c) - x(b)\}$$



$$= \int_a^c v(t)\,dt + \int_c^b \{-v(t)\}\,dt$$

$$= \int_a^c |v(t)|\,dt + \int_c^b |v(t)|\,dt = \int_a^b |v(t)|\,dt$$

✡ **속도가** $0 \Leftrightarrow v(t)=0$

(1) 운동 방향이 바뀔 때

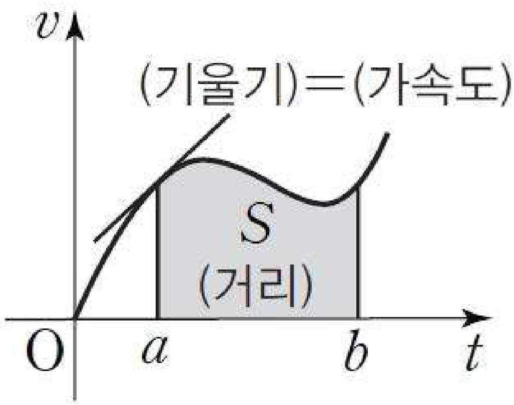
☑ 운동 방향이 바뀐다. $\not\Leftarrow\!\Rightarrow v(t)=0$

($\Leftarrow$) 극값이 되어야(위치의 증감이 변화해야) 한다.

(2) 물체가 최고 높이에 도달할 때

(3) 물체가 정지할 때

✡ **위치가** $0 \Leftrightarrow x(t)=0$



(1) 물체가 땅에 떨어질 때

(2) 출발점으로 되돌아올 때

✡ **속도와 시간의 그래프**

(1) 넓이(S) $=$ 이동거리

(2) $t=a$에서의 접선의 기울기는 시각 $t=a$에서의 가속도