한눈에 보는 정답

01 순열

유제 본문 5~13쪽

1 ⑤ 2 60 3 ④ 4 ⑤ 5 ⑤
6 ④ 7 ⑤ 8 ② 9 ③ 10 ②

Level 1 기초 연습 본문 14쪽

1 ③ 2 ② 3 ③ 4 ⑤ 5 ⑤

Level 2 기본 연습 본문 15쪽

1 ① 2 ④ 3 ⑤ 4 ⑤

Level 3 실력 완성 본문 16쪽

1 ⑤ 2 ④ 3 ④ 4 ③

02 조합

유제 본문 19~25쪽

1 ④ 2 ⑤ 3 ② 4 ③ 5 ⑤
6 ④ 7 ④ 8 ④

Level 1 기초 연습 본문 26쪽

1 ② 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ②

Level 2 기본 연습 본문 27쪽

1 ② 2 ⑤ 3 ③ 4 ④

Level 3 실력 완성 본문 28쪽

1 ⑤ 2 ④ 3 ③ 4 ③

03 이항정리와 분할

유제 본문 31~37쪽

1 ① 2 ④ 3 127 4 ② 5 ③
6 ② 7 ③ 8 ④

Level 1 기초 연습 본문 38~39쪽

1 ① 2 ② 3 ④ 4 ④ 5 ③
6 ② 7 ③ 8 ③

Level 2 기본 연습 본문 40쪽

1 ② 2 ④ 3 ⑤ 4 ③ 5 260

Level 3 실력 완성 본문 41쪽

1 ④ 2 ① 3 6 4 ③

04 확률

유제 (본문 45~51쪽)

1 ④ 2 30 3 ③ 4 ⑤ 5 ④
6 ⑤ 7 ⑤

Level 1 기초 연습 (본문 52쪽)

1 8 2 ① 3 ① 4 ③ 5 ⑤

Level 2 기본 연습 (본문 53쪽)

1 ④ 2 ④ 3 ② 4 ④

Level 3 실력 완성 (본문 54쪽)

1 ③ 2 ④ 3 5

05 조건부확률

유제 (본문 57~65쪽)

1 ⑤ 2 79 3 ③ 4 ② 5 ②
6 ③ 7 4 8 ③ 9 ②

Level 1 기초 연습 (본문 66쪽)

1 ② 2 ⑤ 3 ⑤ 4 ④ 5 15

Level 2 기본 연습 (본문 67쪽)

1 15 2 640 3 25 4 ①

Level 3 실력 완성 (본문 68쪽)

1 17 2 69 3 ⑤

06 이산확률분포

유제 (본문 71~79쪽)

1 ③ 2 ① 3 ② 4 ④ 5 ②
6 ④ 7 8 8 72 9 ③

Level 1 기초 연습 (본문 80쪽)

1 ① 2 ④ 3 ③ 4 ① 5 ①

Level 2 기본 연습 (본문 81쪽)

1 ② 2 ④ 3 ② 4 150

Level 3 실력 완성 (본문 82쪽)

1 161 2 ③ 3 ② 4 152

07 정규분포

유제
본문 85~91쪽

1 ⑤ 2 ④ 3 ② 4 27 5 49
6 ③ 7 ③

Level 1 기초 연습
본문 92쪽

1 ③ 2 ⑤ 3 ① 4 5 5 ②

Level 2 기본 연습
본문 93쪽

1 ② 2 245 3 ①

Level 3 실력 완성
본문 94쪽

1 13 2 ⑤ 3 ③

08 통계적 추정

유제
본문 97~105쪽

1 ① 2 ① 3 36 4 ⑤ 5 ④
6 400 7 ① 8 ③ 9 ④

Level 1 기초 연습
본문 106~107쪽

1 ③ 2 ⑤ 3 ③ 4 ② 5 ④
6 ② 7 ④ 8 ③

Level 2 기본 연습
본문 108쪽

1 ③ 2 ① 3 ③ 4 25

Level 3 실력 완성
본문 109쪽

1 ① 2 749 3 321

01 순열

유제

본문 5~13쪽

1 ⑤	2 60	3 ④	4 ⑤	5 ⑤
6 ④	7 ⑤	8 ②	9 ③	10 ②

1 주어진 조건을 만족시키는 짝수의 백의 자리의 수는 1 또는 2이어야 한다.

(ⅰ) 백의 자리의 수가 1인 경우
세 자리 자연수가 짝수이어야 하므로 일의 자리의 수는 짝수이어야 한다.
이때 일의 자리의 수는 2, 4, 6, 8 중 하나가 와야 하므로 경우의 수는 4, 이 각각에 대하여 십의 자리의 수는 백의 자리와 일의 자리의 두 수를 제외한 7개의 수 중 하나가 와야 하므로 경우의 수는 7이다.
그러므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해
$4\times7=28$

(ⅱ) 백의 자리의 수가 2인 경우
세 자리 자연수가 짝수이어야 하므로 일의 자리의 수는 짝수이어야 한다.
이때 일의 자리의 수는 4, 6, 8 중 하나가 와야 하므로 경우의 수는 3, 이 각각에 대하여 십의 자리의 수는 백의 자리와 일의 자리의 두 수를 제외한 7개의 수 중 하나가 와야 하므로 경우의 수는 7이다.
그러므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해
$3\times7=21$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 짝수의 개수는 합의 법칙에 의해
$28+21=49$

답 ⑤

2 A와 B가 같은 강좌를 선택한 경우를 교시별로 나누면 다음과 같다.

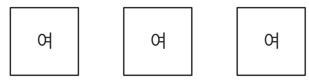
(ⅰ) 1교시에 같은 강좌를 선택한 경우
1교시에 같은 강좌를 선택할 경우의 수는 3, 이 각각에 대하여 2교시에 A가 강좌를 선택할 경우의 수는 4, 이 각각에 대하여 2교시에 B가 A가 선택한 강좌를 제외한 강좌를 선택할 경우의 수는 3이다.
그러므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해
$3\times4\times3=36$

(ⅱ) 2교시에 같은 강좌를 선택한 경우
1교시에 A가 강좌를 선택할 경우의 수는 3, 이 각각에 대하여 1교시에 B가 A가 선택한 강좌를 제외한 강좌를 선택할 경우의 수는 2, 이 각각에 대하여 2교시에 A와 B가 같은 강좌를 선택할 경우의 수는 4이다.
그러므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해
$3\times2\times4=24$

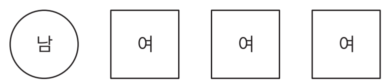
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해
$36+24=60$

답 60

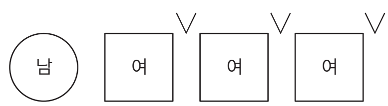
3 여학생 3명을 먼저 일렬로 배열하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 순열의 수이므로
${}_3P_3=3!=6$



이 각각에 대하여 남학생 3명 중 1명을 맨 앞에 배열하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 1개를 택하는 순열의 수이므로
${}_3P_1=3$



이 각각에 대하여 나머지 남학생 2명을 다음 그림과 같이 ∨로 표시된 곳에 배열하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 순열의 수이므로
${}_3P_2=6$



따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해
$6\times3\times6=108$

답 ④

4 서로 다른 연필 2개를 나누어 주는 경우를 나누면 다음과 같다.

(ⅰ) 한 명에게 연필 2개를 나누어 주는 경우
연필 2개를 받는 사람을 정하는 경우의 수는
3
이 각각에 대하여 서로 다른 노트 5권 중 2권을 2명에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 2개를 택하는 순열의 수이므로

$_5P_2=5\times4=20$
그러므로 경우의 수는 곱의 법칙에 의해
$3\times20=60$

(ⅱ) 두 명에게 연필 한 개씩을 나누어 주는 경우
서로 다른 연필 2개를 세 사람 중 두 사람에게 한 개씩 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 순열의 수이므로
$_3P_2=3\times2=6$
이 각각에 대하여 나머지 한 명이 노트 5권 중 1권을 받는 경우의 수는
5
그러므로 경우의 수는 곱의 법칙에 의해
$6\times5=30$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해
$60+30=90$

답 ⑤

5 백의 자리의 수와 일의 자리의 수의 합이 홀수이므로 다음 각 경우로 나눌 수 있다.

(ⅰ) 백의 자리의 수가 홀수, 일의 자리의 수가 짝수인 경우
백의 자리의 수가 홀수이므로 1, 3, 5 중 하나가 와야 하므로 경우의 수는
3
이 각각에 대하여 일의 자리의 수가 짝수이므로 2, 4 중 하나가 와야 하므로 경우의 수는
2
이 각각에 대하여 천의 자리와 십의 자리의 수는 1, 2, 3, 4, 5 중 하나가 와야 하므로 경우의 수는 서로 다른 5개에서 2개를 택하는 중복순열의 수이므로
$_5\Pi_2=5^2=25$
그러므로 경우의 수는 곱의 법칙에 의해
$3\times2\times25=150$

(ⅱ) 백의 자리의 수가 짝수, 일의 자리의 수가 홀수인 경우
백의 자리의 수가 짝수이므로 2, 4 중 하나가 와야 하므로 경우의 수는
2
이 각각에 대하여 일의 자리의 수가 홀수이므로 1, 3, 5 중 하나가 와야 하므로 경우의 수는
3
이 각각에 대하여 천의 자리와 십의 자리의 수는 1, 2, 3, 4, 5 중 하나가 와야 하므로 경우의 수는 서로 다른 5개에서 2개를 택하는 중복순열의 수이므로
$_5\Pi_2=5^2=25$
그러므로 경우의 수는 곱의 법칙에 의해
$2\times3\times25=150$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해
$150+150=300$

답 ⑤

6 서로 다른 초콜릿 4개를 세 사람에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복순열의 수이므로
$_3\Pi_4=3^4=81$
이 각각에 대하여 서로 다른 사탕 3개를 세 사람이 1개씩 받도록 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 순열의 수이므로
$_3P_3=3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해
$81\times6=486$

답 ④

7 A가 B와 C 사이에 있으므로 A, B, C를 같은 것으로 보고 나열하는 경우의 수는
$\frac{6!}{3!}=120$
이 각각에 대하여 A의 앞에는 B가 서고 뒤에는 C가 서거나 또는 A의 앞에는 C가 서고 뒤에는 B가 서는 경우가 있으므로 경우의 수는
2
따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해
$120\times2=240$

답 ⑤

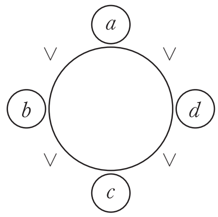
8 서로 다른 빵 5개를 5명에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 5개를 택하는 순열의 수이므로
$_5P_5=5!=120$
이 각각에 대하여 음료수 A와 음료수 B를 나누어 주는 경우의 수는
$\frac{5!}{2!3!}=10$
따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해
$120\times10=1200$

답 ②

9 소문자 a, b, c, d를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

이 각각에 대하여 소문자 사이의 ∨ 표시된 4곳 중 3곳에 A, B, C를 배열하면 된다.



이때의 경우의 수는 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 순열의 수이므로

${}_4P_3=4\times3\times2=24$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$6\times24=144$

답 ③

10 4명을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

이 각각에 대하여 과일을 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 4개를 택하는 순열의 수이므로

${}_5P_4=120$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$6\times120=720$

답 ②

Level 1 기초 연습

본문 14쪽

1 ③ **2** ② **3** ③ **4** ⑤ **5** ⑤

1 $2\times{}_n\Pi_2={}_nP_2+{}_6P_2$에서

$2n^2=n(n-1)+6\times5$

$n^2+n-30=0$

$(n+6)(n-5)=0$

$n=-6$ 또는 $n=5$

따라서 구하는 자연수 n의 값은 5이다.

답 ③

2 서로 다른 5개의 과일 중에 2개를 택하여 두 접시 A, B에 담는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 2개를 택하는 순열의 수이므로

${}_5P_2=5\times4=20$

이 각각에 대하여 나머지 과일 3개를 두 접시 C, D에 담는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 3개를 택하는 중복순열의 수이므로

${}_2\Pi_3=2^3=8$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$20\times8=160$

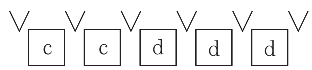
답 ②

3 c, c, d, d, d를 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{2!3!}=10$

이 각각에 대하여 다음 그림과 같이 ∨ 표시된 곳 중 두 곳에 a, b를 넣으면 되므로 경우의 수는 서로 다른 6개에서 2개를 택하는 순열의 수이므로

${}_6P_2=6\times5=30$



따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$10\times30=300$

답 ③

4 함숫값의 곱이 4이므로 함숫값에 따라 다음 두 가지 경우로 나눌 수 있다.

(i) 함숫값이 1, 1, 1, 1, 4인 경우

함수 f의 개수는

$\dfrac{5!}{4!1!}=5$

(ii) 함숫값이 1, 1, 1, 2, 2인 경우

함수 f의 개수는

$\dfrac{5!}{3!2!}=10$

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는 합의 법칙에 의해

$5+10=15$

답 ⑤

5 A, B, C를 하나로 보고 원형으로 나열하는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

이 각각에 대하여 A의 양 옆에 B와 C가 있어야 하므로 경우의 수는

2

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$24\times2=48$

답 ⑤

Level 2 기본 연습

본문 15쪽

1 ① **2** ④ **3** ⑤ **4** ⑤

1 서로 이웃한 두 장의 카드에 쓰여진 수의 합이 모두 홀수인 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 짝수, 홀수, 짝수, 홀수, 짝수

짝수 2, 4, 6을 첫 번째, 세 번째, 다섯 번째에 배열하는 경우의 수는

${}_3P_3$

이 각각에 대하여 홀수 1, 3, 5, 7 중 서로 다른 두 수를 두 번째와 네 번째에 배열하는 경우의 수는

${}_4P_2$

그러므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

${}_3P_3 \times {}_4P_2 = 6 \times 12 = 72$

(ⅱ) 홀수, 짝수, 홀수, 짝수, 홀수

짝수 2, 4, 6 중 서로 다른 두 수를 두 번째와 네 번째에 배열하는 경우의 수는

${}_3P_2$

이 각각에 대하여 홀수 1, 3, 5, 7 중 서로 다른 세 수를 첫 번째, 세 번째, 다섯 번째에 배열하는 경우의 수는

${}_4P_3$

그러므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

${}_3P_2 \times {}_4P_3 = 6 \times 24 = 144$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해

$72 + 144 = 216$

답 ①

2 갑과 을이 택한 두 공에 적힌 수의 합이 짝수인 경우는 다음 두 가지 경우이다.

(ⅰ) 갑과 을이 모두 홀수가 적힌 공을 택한 경우

1, 3, 5, 7이 적힌 공 중 갑과 을이 2개를 택하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 순열의 수이므로

${}_4P_2 = 4 \times 3 = 12$

(ⅱ) 갑과 을이 모두 짝수가 적힌 공을 택한 경우

2, 2, 4, 4, 6, 6이 적힌 공 중 갑과 을이 2개를 택하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복순열의 수이므로

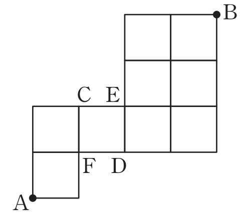
${}_3\Pi_2 = 3^2 = 9$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해

$12 + 9 = 21$

답 ④

3 그림과 같이 C, D, E, F지점을 정하면 A지점에서 B지점까지 최단거리로 가는 경우는 다음 두 가지로 나눌 수 있다.



(ⅰ) C지점을 거쳐 가는 경우

A지점에서 C지점까지 가는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!} = 3$

이 각각에 대하여 C지점을 지나면 반드시 E지점을 지나야 하므로 E지점에서 B지점으로 가는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!2!} = 6$

그러므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$3 \times 6 = 18$

(ⅱ) D지점을 거쳐 가는 경우

먼저 A지점에서 F지점으로 와야 하므로 이 경우의 수는

2

이 각각에 대하여 D지점에서 B지점으로 가는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!2!} = 10$

그러므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$2 \times 10 = 20$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해

$18 + 20 = 38$

답 ⑤

4 서로 마주 보는 두 학생의 번호의 합의 최댓값이 10 이상이 되기 위해서는 6번과 5번, 6번과 4번이 서로 마주 보고 앉아야 한다.

(ⅰ) 6번과 5번이 서로 마주 보고 앉는 경우

6번 앞에는 5번이 항상 앉아야 한다. 즉, 1번, 2번, 3번, 4번, 6번을 원형으로 배열하면 되므로 구하는 경우의 수는

$(5-1)! = 4! = 24$

(ⅱ) 6번과 4번이 서로 마주 보고 앉는 경우

(ⅰ)과 같은 방법으로 하면 구하는 경우의 수는

24

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해

$24 + 24 = 48$

답 ⑤

Level 3 **실력 완성** 본문 16쪽

1 ⑤ **2** ④ **3** ④ **4** ③

1 조건 (가)에서 $f(1) \neq f(2)$이고 $f(2) \neq f(3)$이므로 다음 두 가지로 나눌 수 있다.

(i) $f(1) \neq f(3)$인 경우

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$을 정하는 경우의 수는

${}_5P_3 = 60$

이 각각에 대하여 조건 (나)에서 치역의 원소의 개수가 3이므로 나머지 $f(4)$, $f(5)$의 값은 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값이므로 경우의 수는

${}_3\Pi_2 = 3^2 = 9$

그러므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$60 \times 9 = 540$

(ii) $f(1) = f(3)$인 경우

$f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_5P_2 = 20$

이 각각에 대하여 $f(4)$가 $f(1)$, $f(2)$의 값 중 하나를 가지는 경우 $f(5)$는 $f(1)$, $f(2)$의 두 값을 제외하고 가져야 한다.

$f(5)$가 $f(1)$, $f(2)$의 값 중 하나를 가지는 경우도 마찬가지이다.

또, $f(4) = f(5)$인 경우는 $f(4)$와 $f(5)$가 $f(1)$, $f(2)$의 두 값을 제외한 한 값을 가져야 한다.

이때 경우의 수는

$2 \times 3 + 2 \times 3 + 3 = 15$

그러므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$20 \times 15 = 300$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해

$540 + 300 = 840$

답 ⑤

2 공에 적힌 수의 합이 홀수인 경우는 다음과 같은 경우로 나눌 수 있다.

(i) 홀수가 5번 나오는 경우

홀수는 1, 3이므로 경우의 수는 서로 다른 2개에서 5개를 택하는 중복순열의 수이므로

${}_2\Pi_5 = 2^5 = 32$

(ii) 홀수가 3번, 짝수가 2번 나오는 경우

홀수가 3번, 짝수가 2번 나오는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{3!2!} = 10$

이 각각에 대하여 홀수에 1과 3 중 하나를 배정하면 되므로 경우의 수는

${}_2\Pi_3 = 2^3 = 8$

그러므로 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$10 \times 8 = 80$

(iii) 홀수가 1번, 짝수가 4번 나오는 경우

홀수가 1번, 짝수가 4번 나오는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{1!4!} = 5$

이 각각에 대하여 홀수에 1과 3 중 하나를 배정하면 되므로 경우의 수는

2

그러므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$5 \times 2 = 10$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해

$32 + 80 + 10 = 122$

답 ④

3 접시를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(5-1)! = 4! = 24$

이 각각에 대하여 박하맛 사탕 3개, 딸기맛 사탕 2개를 배열하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{3!2!} = 10$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$24 \times 10 = 240$

답 ④

4 갑이 아침, 점심, 저녁에 서로 다르게 음식을 주문하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 순열의 수이므로

${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$

서로 다른 5가지 음식을 a, b, c, d, e라 하자.

	아침	점심	저녁
갑	a	b	c
을			

이 각각에 대하여 아침, 점심, 저녁 중 주문한 음식이 한 번만 같으므로 경우의 수는

3

	아침	점심	저녁
갑	a	b	c
을	a		

이 각각에 대하여 갑과 을이 주문한 음식의 종류가 4가지이므로 갑이 주문한 음식 중 갑과 을이 같이 주문한 음식을 제외한 두 가지 음식 중 하나를 을이 주문해야 하므로 경우의 수는

2

	아침	점심	저녁
갑	a	b	c
을	a		b

이 각각에 대하여 갑과 을이 주문한 3가지 음식을 제외한 나머지 2가지 중 을이 하나를 주문하면 되므로 경우의 수는

2

	아침	점심	저녁
갑	a	b	c
을	a	d	b

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$60\times3\times2\times2=720$

답 ③

02 조합

유제 본문 19~25쪽

1 ④	2 ⑤	3 ②	4 ③	5 ⑤
6 ④	7 ④	8 ④		

1 A가 B보다 항상 앞에 서고 서로 이웃하지 않으므로 A, B를 제외한 나머지 4명을 우선 나열한 후 A와 B를 배열하면 된다.
우선 A, B를 제외한 나머지 4명을 일렬로 나열하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 4개를 택하는 순열의 수이므로
${}_4P_4=4!=24$
이 각각에 대하여 $\vee$ 표시된 곳인 4명이 서 있는 사이 또는 맨 앞 또는 맨 뒤 중 서로 다른 두 곳에 A, B가 순서대로 서면 된다.

$$\vee\ \square\ \vee\ \square\ \vee\ \square\ \vee\ \square\ \vee$$

이 경우의 수는 서로 다른 5개에서 2개를 택하는 조합의 수이므로
${}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$
따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해
$24\times10=240$

답 ④

2 서로 다른 과일 5개 중 2개를 선택하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 2개를 택하는 조합의 수이므로
${}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$
이 각각에 대하여 과일 2개를 6명 중 2명에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 6개에서 2개를 택하는 순열의 수이므로
${}_6P_2=6\times5=30$
따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해
$10\times30=300$

답 ⑤

3 수학동아리와 과학동아리에 각각 3명씩 배정되어야 하고 A와 B가 서로 다른 동아리에 배정되어야 하므로 다음 각 경우로 나눌 수 있다.
(i) A가 수학동아리, B가 과학동아리에 가입하는 경우
A가 수학동아리에 가입하므로 B를 제외한 나머지 4명 중 2명은 수학동아리에 가입해야 한다.
구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 조합의 수이므로
${}_4C_2=\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$
이 각각에 대하여 B를 제외한 나머지 2명이 과학동아리에 가입해야 한다.
구하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 2개를 택하는 조합의 수이므로
${}_2C_2=1$
그러므로 경우의 수는 곱의 법칙에 의해
$6\times1=6$
(ii) B가 수학동아리, A가 과학동아리에 가입하는 경우
(i)과 같은 방법으로 하면 경우의 수는
6
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해
$6+6=12$

답 ②

4 A가 서로 다른 5종류의 음료수 중 2개를 선택하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 2개를 택하는 조합의 수이므로
${}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$
이 각각에 대하여 B가 서로 다른 5종류의 음료수 중 3개를 선택하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 조합의 수이므로
${}_5C_3={}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$
따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해
$10\times10=100$

답 ③

5 같은 종류의 사탕 6개를 세 그릇 A, B, C에 나누어 담는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 6개를 택하는 중복조합의 수이므로

$$\begin{aligned}{}_3H_6&={}_{3+6-1}C_6\\&={}_8C_6\\&={}_8C_2\\&=\frac{8\times7}{2\times1}\\&=28\end{aligned}$$

답 ⑤

6 딸기맛 사탕 5개를 3명에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수이므로

$${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=\frac{7\times6}{2\times1}=21$$

이 각각에 대하여 포도맛 사탕 5개를 각 사람이 적어도 1개씩 받도록 나누어 주어야 한다.

우선 각 사람에게 모두 1개씩 나누어 주면 나머지 2개의 포도맛 사탕을 3명에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복조합의 수이므로

$${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$21\times6=126$

답 ④

7 $(a+b+c)^4$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복조합의 수이므로

$${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$$

이 각각에 대하여 $(d+e)^4$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 서로 다른 2개에서 4개를 택하는 중복조합의 수이므로

$${}_2H_4={}_{2+4-1}C_4={}_5C_4={}_5C_1=5$$

따라서 구하는 서로 다른 항의 개수는 곱의 법칙에 의해

$15\times5=75$

답 ④

8 $a+b=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는 서로 다른 2개에서 5개를 택하는 중복조합의 수이므로

$${}_2H_5={}_{2+5-1}C_5={}_6C_5={}_6C_1=6$$

이 각각에 대하여 $c+d+e=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 c, d, e의 모든 순서쌍 (c, d, e)의 개수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수이므로

$${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=\frac{7\times6}{2\times1}=21$$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 곱의 법칙에 의해

$6\times21=126$

답 ④

Level 1 기초 연습

본문 26쪽

1 ② **2** ② **3** ③ **4** ④ **5** ②

1 ${}_nH_2={}_{n+1}C_3$에서 좌변은

${}_nH_2={}_{n+1}C_2$

이므로

${}_{n+1}C_2={}_{n+1}C_3$

${}_{n+1}C_{n-1}={}_{n+1}C_3$

그러므로

$n-1=3$

$n=4$

답 ②

2 세 원소의 합이 홀수인 경우는 다음 두 가지이다.

(i) 홀수가 3개인 경우

부분집합의 개수는 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 조합의 수이므로

$${}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

(ii) 짝수가 2개, 홀수가 1개인 경우

2, 4, 6, 8, 10 중 2개를 택하는 경우의 수는 서로 다른

5개에서 2개를 택하는 조합의 수이므로

$_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

이 각각에 대하여 홀수 1, 3, 5, 7, 9 중 1개를 택하는 경우의 수는

5

따라서 부분집합의 개수는 곱의 법칙에 의해

$10\times5=50$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 부분집합의 개수는 합의 법칙에 의해

$10+50=60$

답 ②

3 A에게 7송이의 장미 중 2송이를 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 7개에서 2개를 택하는 조합의 수이므로

$_7C_2=\frac{7\times6}{2\times1}=21$

이 각각에 대하여 B에게 나머지 5송이 중 2송이를 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 2개를 택하는 조합의 수이므로

$_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

이 각각에 대하여 C에게 나머지 3송이 중 1송이를 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 1개를 택하는 조합의 수이므로

$_3C_1=3$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$21\times10\times3=630$

답 ③

4 4가지 색 중 2가지 색을 선택하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 2개를 선택하는 조합의 수이므로

$_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$

이 각각에 대하여 2가지 색의 볼펜은 적어도 하나씩 있어야 하므로 우선 하나씩 선택한 후 나머지 3개만을 선택하면 된다.

그러므로 경우의 수는 서로 다른 2개에서 3개를 택하는 중복조합의 수이므로

$$\begin{aligned}_2H_3&={}_{2+3-1}C_3\\&={}_4C_3\\&={}_4C_1\\&=4\end{aligned}$$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$6\times4=24$

답 ④

5 $(a+b+c)^{10}$의 전개식에서 계수를 제외한 항은 $a^xb^yc^z$이고 $x+y+z=10$을 만족시킨다.

이때 x, y, z는 모두 자연수이므로

$x=x'+1$, $y=y'+1$, $z=z'+1$

로 놓으면 x', y', z'은 음이 아닌 정수이고

$x'+y'+z'=7$

따라서 구하는 서로 다른 항의 개수는 서로 다른 3개에서 7개를 택하는 중복조합의 수이므로

$$\begin{aligned}_3H_7&={}_{3+7-1}C_7\\&={}_9C_7\\&={}_9C_2\\&=\frac{9\times8}{2\times1}\\&=36\end{aligned}$$

답 ②

Level 2 기본 연습

본문 27쪽

1 ② **2** ⑤ **3** ③ **4** ④

1 사과 주스 3개를 한 개씩 받는 사람을 선택하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 조합의 수이므로

$$\begin{aligned}_5C_3&={}_5C_2\\&=\frac{5\times4}{2\times1}\\&=10\end{aligned}$$

이 각각에 대하여 서로 다른 빵 3개 중 2개를 사과 주스를 받지 않은 사람에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 순열의 수이므로

$_3P_2=3\times2=6$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$10\times6=60$

답 ②

2 조건 (가)를 만족시키도록 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$을 결정하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 조합의 수이므로

$_{5}C_{3}={}_{5}C_{2}$

$=\dfrac{5\times4}{2\times1}$

$=10$

이 각각에 대하여 조건 (나)를 만족시키도록 $f(4)$, $f(5)$를 결정하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 2개를 택하는 중복조합의 수이므로

$_{5}H_{2}={}_{5+2-1}C_{2}$

$={}_{6}C_{2}$

$=\dfrac{6\times5}{2\times1}$

$=15$

따라서 구하는 함수 f의 개수는 곱의 법칙에 의해

$10\times15=150$

답 ⑤

3 A와 B가 같은 영화를 선택하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 1개를 택하는 조합의 수이므로

$_{5}C_{1}=5$

이 각각에 대하여 A가 B와 같이 선택한 영화 1편을 제외한 4편 중에서 2편을 선택하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 조합의 수이므로

$_{4}C_{2}=\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$

이 각각에 대하여 B가 앞에서 선택된 3편의 영화를 제외한 2편의 영화 중에서 1편을 선택하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 1개를 택하는 조합의 수이므로

$_{2}C_{1}=2$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$5\times6\times2=60$

답 ③

4 a, b, c, d, e가 자연수이므로

$a+b\geq 2$이고 $c+d+e\geq 3$

이때 $35=5\times7$이므로 다음 각 경우로 나눌 수 있다.

(i) $a+b=5,\ c+d+e=7$인 경우

$a=a'+1$, $b=b'+1$로 놓으면 a', b'은 음이 아닌 정수이고

$a'+b'=3$

이때 순서쌍 (a, b)의 개수는 서로 다른 2개에서 3개를 택하는 중복조합의 수이므로

$_{2}H_{3}={}_{2+3-1}C_{3}$

$={}_{4}C_{3}$

$={}_{4}C_{1}$

$=4$

이 각각에 대하여 $c=c'+1$, $d=d'+1$, $e=e'+1$로 놓으면 c', d', e'은 음이 아닌 정수이고

$c'+d'+e'=4$

이때 순서쌍 (c, d, e)의 개수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복조합의 수이므로

$_{3}H_{4}={}_{3+4-1}C_{4}$

$={}_{6}C_{4}$

$={}_{6}C_{2}$

$=\dfrac{6\times5}{2\times1}$

$=15$

그러므로 구하는 순서쌍의 개수는 곱의 법칙에 의해

$4\times15=60$

(ii) $a+b=7$, $c+d+e=5$인 경우

순서쌍 (a, b)의 개수는 (i)과 같은 방법으로 하면 서로 다른 2개에서 5개를 택하는 중복조합의 수이므로

$_{2}H_{5}={}_{2+5-1}C_{5}$

$={}_{6}C_{5}$

$={}_{6}C_{1}$

$=6$

이 각각에 대하여 순서쌍 (c, d, e)의 개수는 (i)과 같은 방법으로 하면 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복조합의 수이므로

$_{3}H_{2}={}_{3+2-1}C_{2}$

$={}_{4}C_{2}$

$=\dfrac{4\times3}{2\times1}$

$=6$

그러므로 구하는 순서쌍의 개수는 곱의 법칙에 의해

$6\times6=36$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는 합의 법칙에 의해

$60+36=96$

답 ④

Level 3 실력 완성

본문 28쪽

1 ⑤ **2** ④ **3** ③ **4** ③

1 5개의 문자 중 사용된 3개를 택하는 경우의 수는

${}_{5}C_{3}={}_{5}C_{2}=\frac{5\times4}{2\times1}=10$ …… ㉠

이 각각에 대하여 세 문자가 나열된 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 한 문자가 3개, 나머지 두 문자는 1개씩 나열된 경우

세 문자 중 3번 사용되는 한 문자를 선택하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 1개를 택하는 조합의 수이므로

${}_{3}C_{1}=3$

이 각각에 대하여 5개의 문자를 배열하는 경우의 수는 같은 것이 각각 3개, 1개, 1개 있는 것을 일렬로 나열하는 경우의 수이므로

$\frac{5!}{3!1!1!}=20$

그러므로 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$3\times20=60$

(ⅱ) 두 문자가 2개씩, 한 문자는 1개가 나열된 경우

문자가 2개씩 사용되는 두 문자를 선택하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 조합의 수이므로

${}_{3}C_{2}={}_{3}C_{1}=3$

이 각각에 대하여 5개의 문자를 배열하는 경우의 수는 같은 것이 각각 2개, 2개, 1개 있는 것을 일렬로 나열하는 경우의 수이므로

$\frac{5!}{2!2!1!}=30$

그러므로 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$3\times30=90$

(ⅰ), (ⅱ)에서 합의 법칙에 의해

$60+90=150$ …… ㉡

따라서 구하는 경우의 수는 ㉠과 ㉡에서 곱의 법칙에 의해

$10\times150=1500$

답 ⑤

2 사탕의 개수의 총합이 5이고 모든 사람은 적어도 하나의 사탕을 받으며 A가 받은 사탕의 개수가 B, C가 각각 받은 사탕의 개수보다 많거나 같아야 하므로 각 경우로 나누면 다음과 같다.

(ⅰ) 2개, 2개, 1개로 나누어 주는 경우

A가 2개를 받아야 하므로 2명 중 사탕 2개를 받는 한 사람을 선택하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 1개를 택하는 조합의 수이므로

${}_{2}C_{1}=2$

이 각각에 대하여 A에게 2개의 사탕을 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 2개를 택하는 조합의 수이므로

${}_{5}C_{2}=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

이 각각에 대하여 사탕 2개를 받는 사람에게 나머지 사탕 3개 중 2개를 나누어 주는 경우의 수는

${}_{3}C_{2}={}_{3}C_{1}=3$

이 각각에 대하여 나머지 사탕 1개는 나머지 한 사람에게 나누어 주면 되므로 경우의 수는

1

그러므로 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$2\times10\times3\times1=60$

(ⅱ) 3개, 1개, 1개로 나누어 주는 경우

A가 서로 다른 사탕 5개 중 3개의 사탕을 받아야 하므로 경우의 수는 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 조합의 수이므로

${}_{5}C_{3}={}_{5}C_{2}=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

이 각각에 대하여 나머지 사탕 2개를 두 사람에게 하나씩 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 2개를 택하는 순열의 수이므로

${}_{2}P_{2}=2!=2$

그러므로 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$10\times2=20$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해

$60+20=80$

답 ④

3 짝수가 2개이므로 짝수의 개수에 따라 나누면 다음과 같다.

(ⅰ) 한 학생이 짝수 2개를 택하는 경우

짝수 2개를 택한 한 학생을 선택하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 1개를 택하는 조합의 수이므로

${}_{2}C_{1}=2$

이 각각에 대하여 짝수 2개를 정하는 경우의 수는 2, 4 중 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수이므로

${}_{2}H_{2}={}_{2+2-1}C_{2}={}_{3}C_{2}={}_{3}C_{1}=3$

이 각각에 대하여 짝수 2개를 택한 한 학생이 홀수 1, 3, 5 중 1개를 택하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 1개를 택하는 조합의 수이므로

${}_{3}C_{1}=3$

이 각각에 대하여 짝수를 택하지 않은 학생이 홀수 1, 3, 5 중 중복을 허락하여 3개를 택하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복조합의 수이므로

${}_{3}H_{3}={}_{3+3-1}C_{3}={}_{5}C_{3}={}_{5}C_{2}=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

그러므로 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$2\times3\times3\times10=180$

(ii) A, B가 각각 짝수 1개를 택하는 경우

A가 짝수 2, 4 중 한 개를 택하는 경우의 수는

2

이 각각에 대하여 B가 짝수 2, 4 중 한 개를 택하는 경우의 수는

2

이 각각에 대하여 A가 홀수 1, 3, 5 중 중복을 허락하여 2개를 택하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복조합의 수이므로

$${}_3\mathrm{H}_2={}_{3+2-1}\mathrm{C}_2={}_4\mathrm{C}_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$$

이 각각에 대하여 B가 홀수 1, 3, 5 중 중복을 허락하여 2개를 택하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복조합의 수이므로

$${}_3\mathrm{H}_2={}_{3+2-1}\mathrm{C}_2={}_4\mathrm{C}_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$$

그러므로 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$2\times2\times6\times6=144$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해

$180+144=324$

답 ③

4 조건 (가)에서 $d+e=0$이면 $a+b+c=0$이 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$d+e=1$일 때,

$a+b+c=3$이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

$d+e=2$일 때,

$a+b+c=6$이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

그러나 $d+e\geq 3$이면 $a+b+c\geq 9$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

그러므로 각 경우로 나누면 다음과 같다.

(i) $d+e=1$일 때,

$a+b+c=3$

이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복조합의 수이므로

$$\begin{aligned}{}_3\mathrm{H}_3&={}_{3+3-1}\mathrm{C}_3\\&={}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2\\&=\frac{5\times4}{2\times1}\\&=10\end{aligned}$$

이 각각에 대하여 $d+e=1$을 만족시키는 음이 아닌 정수 d, e의 순서쌍 (d, e)의 개수는 2이다.

그러므로 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는 곱의 법칙에 의해

$10\times2=20$

(ii) $d+e=2$일 때,

$a+b+c=6$

이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 서로 다른 3개에서 6개를 택하는 중복조합의 수이므로

$$\begin{aligned}{}_3\mathrm{H}_6&={}_{3+6-1}\mathrm{C}_6\\&={}_8\mathrm{C}_6\\&={}_8\mathrm{C}_2\\&=\frac{8\times7}{2\times1}\\&=28\end{aligned}$$

이 각각에 대하여 $d+e=2$를 만족시키는 음이 아닌 정수 d, e의 순서쌍 (d, e)의 개수는 서로 다른 2개에서 2개를 택하는 중복조합의 수이므로

$$\begin{aligned}{}_2\mathrm{H}_2&={}_{2+2-1}\mathrm{C}_2\\&={}_3\mathrm{C}_2\\&={}_3\mathrm{C}_1\\&=3\end{aligned}$$

그러므로 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는 곱의 법칙에 의해

$28\times3=84$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는 합의 법칙에 의해

$20+84=104$

답 ③

03 이항정리와 분할

유제 본문 31~37쪽

1 ①	2 ④	3 127	4 ②	5 ③
6 ②	7 ③	8 ④		

1 $\left(2x+\frac{1}{x}\right)^6$의 전개식에서 일반항은

$${}_6C_r(2x)^{6-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_6C_r\times2^{6-r}\times x^{6-2r}$$

따라서 $x^2\left(2x+\frac{1}{x}\right)^6$의 전개식에서 x^4의 계수는

$6-2r+2=4$에서 $r=2$일 때이므로

$${}_6C_2\times2^4=\frac{6\times5}{2\times1}\times16$$
$$=240$$

답 ①

2 $\left(ax^2-\frac{1}{2x}\right)^7$의 전개식에서 일반항은

$${}_7C_r(ax^2)^{7-r}\left(-\frac{1}{2x}\right)^r={}_7C_r\times a^{7-r}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^r\times x^{14-3r}$$

이때 x^2의 계수는 $14-3r=2$에서 $r=4$일 때이므로

$${}_7C_4\times a^{7-4}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^4={}_7C_3\times a^3\times\frac{1}{16}$$
$$=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}\times a^3\times\frac{1}{16}$$
$$=140$$

$a^3=64$

$\therefore a=4$

따라서 양수 a의 값은 4이다.

답 ④

3 ${}_8C_0+{}_8C_2+{}_8C_4+{}_8C_6+{}_8C_8=2^7$

이므로

${}_8C_2+{}_8C_4+{}_8C_6+{}_8C_8=2^7-{}_8C_0$

${}_8C_0=1$이므로

$${}_8C_2+{}_8C_4+{}_8C_6+{}_8C_8=128-1$$
$$=127$$

답 127

다른 풀이

$${}_8C_2=\frac{8\times7}{2\times1}=28$$

$${}_8C_4=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=70$$

${}_8C_6={}_8C_2=28$

${}_8C_8=1$

따라서

$${}_8C_2+{}_8C_4+{}_8C_6+{}_8C_8=28+70+28+1$$
$$=127$$

4 서로 다른 색깔의 색연필 10자루에서 6자루 이상을 택하는 경우의 수는

${}_{10}C_6+{}_{10}C_7+{}_{10}C_8+{}_{10}C_9+{}_{10}C_{10}$

${}_{10}C_6+{}_{10}C_7+{}_{10}C_8+{}_{10}C_9+{}_{10}C_{10}=k$로 놓으면

${}_{10}C_4+{}_{10}C_3+{}_{10}C_2+{}_{10}C_1+{}_{10}C_0=k$

이때 ${}_{10}C_0+{}_{10}C_1+{}_{10}C_2+\cdots+{}_{10}C_{10}=2^{10}$이므로

$k+{}_{10}C_5+k=2^{10}$

$2k=2^{10}-{}_{10}C_5$

$$k=2^9-\frac{{}_{10}C_5}{2}$$
$$=2^9-\frac{\frac{10\times9\times8\times7\times6}{5\times4\times3\times2\times1}}{2}$$
$$=512-126$$
$$=386$$

답 ②

5 $S(5, 4)$는 원소의 개수가 5인 집합을 공집합이 아니면서 서로소인 4개의 부분집합으로 분할하는 경우의 수이다.

4개의 부분집합 중 어느 한 부분집합의 원소의 개수는 2이고 나머지 부분집합의 원소의 개수는 모두 1이다.

5개의 원소 중 2개를 택하여 원소의 개수가 2인 부분집합을 만들고 나머지 3개의 원소를 각각 1개씩 나누어 부분집합을 만들면 되므로 구하는 경우의 수는

$${}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

답 ③

6 집합 A의 원소의 개수가 6이므로 집합 A를 공집합이 아닌 두 개 이상의 부분집합으로 분할할 때, 원소의 개수가 모두 다른 경우는 다음과 같이 3가지이다.

(i) 두 부분집합의 원소의 개수가 $(5, 1)$인 경우

${}_6C_5\times{}_1C_1={}_6C_1\times{}_1C_1=6$

(ii) 두 부분집합의 원소의 개수가 $(4, 2)$인 경우

${}_6C_4\times{}_2C_2={}_6C_2\times{}_2C_2=15$

(iii) 세 부분집합의 원소의 개수가 (3, 2, 1)인 경우

$_6C_3 \times _3C_2 \times _1C_1 = _6C_3 \times _3C_1 \times _1C_1 = 60$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해

$6+15+60=81$

답 ②

7 자연수 7을 2개의 자연수로 분할하면

$7=6+1$
$=5+2$
$=4+3$

그러므로 $P(7, 2)=3$

또 자연수 7을 4개의 자연수로 분할하면

$7=4+1+1+1$
$=3+2+1+1$
$=2+2+2+1$

그러므로 $P(7, 4)=3$

따라서

$P(7, 2)+P(7, 4)=3+3$
$=6$

답 ③

8 $10=4+6$이므로 숫자 4를 포함하는 자연수 10의 분할은 자연수 6의 각 분할에 숫자 4를 더한 것과 같다.

$6=6$
$=5+1=4+2=3+3$
$=4+1+1=3+2+1=2+2+2$
$=3+1+1+1=2+2+1+1$
$=2+1+1+1+1$
$=1+1+1+1+1+1$

이므로 숫자 4를 포함하는 자연수 10의 분할의 수는

$1+3+3+2+1+1=11$

답 ④

Level 1 기초 연습

본문 38~39쪽

1 ①	**2** ②	**3** ④	**4** ④	**5** ③
6 ②	**7** ③	**8** ③		

1 $\left(x-\frac{3}{x}\right)^6$의 전개식에서 일반항은

$_6C_r x^{6-r}\left(-\frac{3}{x}\right)^r = _6C_r(-3)^r x^{6-r}x^{-r}$

$= _6C_r(-3)^r x^{6-2r}$

$x^{6-2r}=x^4$에서 $6-2r=4$, 즉 $r=1$

따라서 x^4의 계수는

$_6C_1 \times (-3)^1 = -18$

답 ①

2 $_{11}C_0 + _{11}C_1 + _{11}C_2 + \cdots + _{11}C_{11} = 2^{11}$ ······ ㉠

$_nC_r = _nC_{n-r}$에서

$_{11}C_0 = _{11}C_{11}$
$_{11}C_1 = _{11}C_{10}$
$_{11}C_2 = _{11}C_9$
$_{11}C_3 = _{11}C_8$
$_{11}C_4 = _{11}C_7$
$_{11}C_5 = _{11}C_6$

이므로 ㉠은

$2(_{11}C_0 + _{11}C_1 + _{11}C_2 + \cdots + _{11}C_5) = 2^{11}$

$_{11}C_0 + _{11}C_1 + _{11}C_2 + \cdots + _{11}C_5 = \frac{2^{11}}{2}$
$= 2^{10}$

$\log_2(_{11}C_0 + _{11}C_1 + _{11}C_2 + \cdots + _{11}C_5) = \log_2 2^{10}$
$=10$

답 ②

3 $_nC_0 + _nC_1 + _nC_2 + \cdots + _nC_n = 2^n$이므로

제1행의 모든 수의 합은

$_1C_0 + _1C_1 = 2^1$

제2행의 모든 수의 합은

$_2C_0 + _2C_1 + _2C_2 = 2^2$

제3행의 모든 수의 합은

$_3C_0 + _3C_1 + _3C_2 + _3C_3 = 2^3$

⋮

제10행의 모든 수의 합은

$_{10}C_0 + _{10}C_1 + _{10}C_2 + \cdots + _{10}C_{10} = 2^{10}$

따라서 구하는 모든 수의 합은 등비수열의 합이므로

$2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{10} = \frac{2(2^{10}-1)}{2-1}$
$=2^{11}-2$

답 ④

4 이항정리에 의하여

$(1+x)^6 = _6C_0 + _6C_1 x + _6C_2 x^2 + \cdots + _6C_6 x^6$ ······ ㉠

㉠의 양변에 $x=7$을 대입하면

${}_6C_0+7\times{}_6C_1+7^2\times{}_6C_2+\cdots+7^6\times{}_6C_6$

$=(1+7)^6$

$=(2^3)^6$

$=2^{18}$

답 ④

5 $S(4, 2)$는 원소의 개수가 4인 집합을 공집합이 아닌 2개의 부분집합으로 분할하는 경우의 수이므로 다음 2가지 경우이다.

(i) 두 부분집합의 원소의 개수가 $(2, 2)$인 경우

$${}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}=3$$

(ii) 두 부분집합의 원소의 개수가 $(3, 1)$인 경우

${}_4C_3\times{}_1C_1=4$

(i), (ii)에서

$S(4, 2)=3+4=7$

이때 $S(3, 1)=1$이므로

$7=n\times1$

즉, $n=7$

답 ③

6 서로 다른 연필 5개를 3개의 묶음으로 분할하는 경우의 수는 $S(5, 3)$과 같으므로 다음과 같이 두 가지 경우가 있다.

(i) (3개, 1개, 1개)로 분할하는 경우

$${}_5C_3\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}={}_5C_2=10$$

(ii) (2개, 2개, 1개)로 분할하는 경우

$${}_5C_2\times{}_3C_2\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}={}_5C_2\times{}_3C_1\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{5\times4}{2\times1}\times3\times\frac{1}{2}$$

$$=15$$

(i), (ii)에서

$S(5, 3)=10+15=25$

이 각각에 대하여 3명에게 나누어 주는 경우의 수는

$3!$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$25\times3!=25\times6=150$

답 ②

7 자연수 770을 소인수분해하면

$770=2\times5\times7\times11$

따라서 구하는 경우의 수는 집합 $\{2, 5, 7, 11\}$을 공집합이 아니면서 서로소인 2개의 부분집합으로 분할하는 경우의 수 $S(4, 2)$와 같다.

따라서

(i) 두 부분집합의 원소의 개수가 $(3, 1)$인 경우

${}_4C_3\times{}_1C_1=4$

(ii) 두 부분집합의 원소의 개수가 $(2, 2)$인 경우

$${}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}=3$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$S(4, 2)=4+3=7$

답 ③

8 구하는 경우의 수는 자연수 8을 세 개의 자연수로 분할하는 경우의 수 $P(8, 3)$과 같다.

$8=6+1+1$

$=5+2+1$

$=4+3+1$

$=4+2+2$

$=3+3+2$

이므로

$P(8, 3)=5$

답 ③

Level 2 기본 연습

본문 40쪽

1 ② **2** ④ **3** ⑤ **4** ③ **5** 260

1 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^5$의 전개식에서 일반항은

${}_5C_r\,x^{5-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_5C_r\,x^{5-2r}$ …… ㉠

이때 $(2+x+x^2)\left(x+\frac{1}{x}\right)^5$의 전개식에서 x항은 2와 ㉠의 x항, x와 ㉠의 상수항, x^2과 ㉠의 $\frac{1}{x}$항이 곱해질 때 나타난다.

$5-2r=1$에서 $r=2$이므로

${}_5C_2\,x=10x$

$5-2r=0$을 만족시키는 정수 r는 존재하지 않는다.

$5-2r=-1$에서 $r=3$이므로

$${}_5C_3\,x^{-1}=\frac{10}{x}$$

즉, $(2+x+x^2)\left(x+\frac{1}{x}\right)^5$의 전개식에서 x항은

$2\times10x+x^2\times\frac{10}{x}=30x$

따라서 x의 계수는 30이다.

답 ②

2 $\left(x-\frac{1}{x}\right)^n$의 전개식에서 일반항은

${}_{n}C_{r}\,x^{n-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r={}_{n}C_{r}(-1)^r x^{n-2r}$

$n-2r=3$ $(n=3, 4, 5)$에서

$n=4$일 때, x^3항은 존재하지 않는다.

$n=3, 5$일 때, $n-2r=3$을 만족시키는 r의 값은 각각 0, 1이므로 x^3의 계수는

${}_{3}C_{0}\times(-1)^0+{}_{5}C_{1}\times(-1)^1=1-5=-4$

답 ④

3 $11^{13}=(1+10)^{13}$

$={}_{13}C_{0}+{}_{13}C_{1}\,10+{}_{13}C_{2}\,10^2+{}_{13}C_{3}\,10^3+\cdots+{}_{13}C_{13}\,10^{13}$

$=1+130+7800+286000+\cdots+10^{13}$

따라서 일의 자리의 수는 1, 십의 자리의 수는 3, 백의 자리의 수는 9이므로

$a=1, b=3, c=9$

즉, $a+b+c=13$

답 ⑤

4 빈 가방이 1개 이하가 되도록 넣는 경우는 빈 가방이 없거나 1개이다.

(ⅰ) 빈 가방이 없는 경우

같은 종류의 수학 교과서 7권을 같은 종류의 빈 가방 5개에 넣는 경우의 수는 $P(7, 5)$이므로

$7=3+1+1+1+1=2+2+1+1+1$

에서

$P(7, 5)=2$

(ⅱ) 빈 가방이 1개인 경우

같은 종류의 수학 교과서 7권을 같은 종류의 빈 가방 4개에 넣는 경우의 수는 $P(7, 4)$이므로

$7=4+1+1+1=3+2+1+1=2+2+2+1$

에서

$P(7, 4)=3$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해

$2+3=5$

답 ③

5 A종류의 같은 접시 3개와 B종류의 접시 1개에 빈 접시가 없도록 담아야 하므로 B종류의 접시에 사탕이 놓인 개수에 따라 다음과 같이 3가지로 나눌 수 있다.

(ⅰ) B종류의 접시에 사탕이 1개 놓인 경우

A종류의 같은 접시 3개에 서로 다른 사탕 (3개, 1개, 1개) 또는 (2개, 2개, 1개)를 담아야 하므로 구하는 경우의 수는

${}_{6}C_{1}\times\left({}_{5}C_{3}\times{}_{2}C_{1}\times{}_{1}C_{1}\times\frac{1}{2!}+{}_{5}C_{2}\times{}_{3}C_{2}\times{}_{1}C_{1}\times\frac{1}{2!}\right)$

$=6\times(10+15)$

$=150$

(ⅱ) B종류의 접시에 사탕이 2개 놓인 경우

A종류의 같은 접시 3개에 서로 다른 사탕 (2개, 1개, 1개)를 담아야 하므로 구하는 경우의 수는

${}_{6}C_{2}\times{}_{4}C_{2}\times{}_{2}C_{1}\times{}_{1}C_{1}\times\frac{1}{2!}=90$

(ⅲ) B종류의 접시에 사탕이 3개 놓인 경우

A종류의 같은 접시 3개에 서로 다른 사탕 (1개, 1개, 1개)를 담아야 하므로 구하는 경우의 수는

${}_{6}C_{3}\times{}_{3}C_{1}\times{}_{2}C_{1}\times{}_{1}C_{1}\times\frac{1}{3!}=20$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해

$150+90+20=260$

답 260

Level 3 실력 완성

본문 41쪽

1 ④ **2** ① **3** 6 **4** ③

1 $f(x-1)=1+x+x^2+\cdots+x^{10}$에서

$x-1=t$로 놓으면

$f(t)=1+(t+1)+(t+1)^2+\cdots+(t+1)^{10}$

이때 t^7이 나오는 식은

$(1+t)^7, (1+t)^8, (1+t)^9, (1+t)^{10}$ …… ㉠

㉠의 각 식에서 t^7의 계수를 각각 구하면

${}_{7}C_{7}, {}_{8}C_{7}, {}_{9}C_{7}, {}_{10}C_{7}$

따라서 $f(t)$에서 t^7의 계수 a_7의 값은

$a_7={}_{7}C_{7}+{}_{8}C_{7}+{}_{9}C_{7}+{}_{10}C_{7}$

이때

${}_{7}C_{7}=1,$

${}_{8}C_{7}={}_{8}C_{1}=8$,

${}_{9}C_{7}={}_{9}C_{2}=\dfrac{9\times8}{2\times1}=36$,

${}_{10}C_{7}={}_{10}C_{3}=\dfrac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$

이므로

$a_7=1+8+36+120$

$=165$

답 ④

다른 풀이

$f(x-1)=1+x+x^2+\cdots+x^{10}$에서

$x-1=t$로 놓으면

$f(t)=1+(t+1)+(t+1)^2+\cdots+(t+1)^{10}$ …… ㉠

㉠의 우변은 첫째항이 1, 공비가 $t+1$, 항의 개수가 11인 등비수열의 첫째항부터 제11항까지의 합이므로

$\dfrac{(t+1)^{11}-1}{(t+1)-1}=\dfrac{(t+1)^{11}-1}{t}$ …… ㉡

따라서 $f(t)$에서 t^7의 계수 a_7은 ㉡의 $(t+1)^{11}$의 전개식에서 t^8의 계수와 같으므로

$a_7={}_{11}C_{8}$

$={}_{11}C_{3}$

$=\dfrac{11\times10\times9}{3\times2\times1}$

$=165$

2 x^2의 계수는

$2\times{}_{2}C_{2}+3\times{}_{3}C_{2}+4\times{}_{4}C_{2}+\cdots+8\times{}_{8}C_{2}$

$=\sum_{k=2}^{8}(k\times{}_{k}C_{2})$

$=\sum_{k=2}^{8}\left\{k\times\dfrac{k(k-1)}{2}\right\}$

$=\sum_{k=2}^{8}\dfrac{k^3-k^2}{2}$

$=\dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{8}(k^3-k^2)$

$=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{8\times9}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{8\times9\times17}{6}$

$=648-102$

$=546$

답 ①

다른 풀이

$f(x)=(1+x)+2(1+x)^2+3(1+x)^3$
$\quad+4(1+x)^4+\cdots+8(1+x)^8$ …… ㉠

이라 하면

$(1+x)f(x)=(1+x)^2+2(1+x)^3+3(1+x)^4$
$\quad+4(1+x)^5+\cdots+7(1+x)^8+8(1+x)^9$ …… ㉡

㉠$-$㉡에서

$-xf(x)=(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3$
$\quad+(1+x)^4+\cdots+(1+x)^8-8(1+x)^9$

$=\dfrac{(1+x)\{(1+x)^8-1\}}{x}-8(1+x)^9$

$f(x)=-\dfrac{(1+x)^9-(1+x)}{x^2}+\dfrac{8(1+x)^9}{x}$ …… ㉢

따라서 $(1+x)+2(1+x)^2+3(1+x)^3+\cdots+8(1+x)^8$의 전개식에서 x^2의 계수는 ㉢의 $-(1+x)^9$의 전개식에서 x^4의 계수와 $8(1+x)^9$의 전개식에서 x^3의 계수의 합과 같으므로

$-{}_{9}C_{4}+8\times{}_{9}C_{3}=-\dfrac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}+8\times\dfrac{9\times8\times7}{3\times2\times1}$

$=\dfrac{9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}(-6+32)$

$=546$

3 x의 계수를 구하면

${}_{m}C_{1}+{}_{n}C_{1}=m+n$

이므로

$m+n=12$

또, x^2의 계수는

${}_{m}C_{2}+{}_{n}C_{2}$

$=\dfrac{1}{2}\{m(m-1)+n(n-1)\}$

$=\dfrac{1}{2}\{m^2+n^2-(m+n)\}$

$=\dfrac{1}{2}(m^2+n^2-12)$

이 식에 $n=12-m$을 대입하면

$\dfrac{1}{2}\{m^2+(12-m)^2-12\}$

$=\dfrac{1}{2}(m^2+m^2-24m+144-12)$

$=m^2-12m+66$

$=(m-6)^2+30$

따라서 x^2의 계수가 최소가 되는 m의 값은 6이다.

답 6

4 4개의 층 중 3개의 층을 택하는 경우의 수는

${}_{4}C_{3}={}_{4}C_{1}=4$

6명을 3개의 조로 1명 이상씩 분할하는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) (4명, 1명, 1명) 으로 분할하는 경우의 수는

$${}_6C_4 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} = 15$$

(ⅱ) (3명, 2명, 1명) 으로 분할하는 경우의 수는

$${}_6C_3 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 = 60$$

(ⅲ) (2명, 2명, 2명) 으로 분할하는 경우의 수는

$${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{3!} = 15$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 분할하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해

$15 + 60 + 15 = 90$

3개의 조를 3개의 층에 분배하는 경우의 수는

$3! = 6$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$4 \times 90 \times 6 = 2160$

답 ③

04 확률

유제 본문 45~51쪽

1 ④	**2** 30	**3** ③	**4** ⑤	**5** ④
6 ⑤	**7** ⑤			

1 $(A\cap B^C)^C=\{1, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$이므로

$B=(A\cup B)\cap(A\cap B^C)^C$

$=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}\cap\{1, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$=\{1, 4, 6, 7, 8\}$

따라서 사건 B의 원소의 개수는 5이다.

답 ④

2 사건 A_2는 2의 배수가 적혀 있는 구슬이 나오는 사건이므로

$A_2=\{2, 4, 6, 8, \cdots, 18, 20\}$

사건 A_3은 3의 배수가 적혀 있는 구슬이 나오는 사건이므로

$A_3=\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

사건 $A_2\cap A_3$은 6의 배수가 적혀 있는 구슬이 나오는 사건이므로

$A_2\cap A_3=\{6, 12, 18\}$

이때 사건 $A_2\cap A_3$과 사건 A_n이 서로 배반사건이 되려면 $(A_2\cap A_3)\cap A_n=\varnothing$이어야 하므로 10 이하의 자연수 n의 값은 5, 7, 8, 10이다.

따라서 10 이하의 모든 자연수 n의 값의 합은

$5+7+8+10=30$

답 30

3 두 개의 주사위 A, B를 동시에 던질 때 일어날 수 있는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

$a+b$가 짝수가 되려면 a, b가 모두 홀수이거나 a, b가 모두 짝수이어야 한다.

또한, ab가 짝수가 되려면 a, b 중 적어도 하나는 짝수이어야 한다.

따라서 $a+b$와 ab가 모두 짝수가 되려면 a, b가 모두 짝수이어야 하므로 이 경우의 수는

$3\times3=9$

따라서 구하는 확률은

$\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$

답 ③

4 10개의 공이 들어 있는 주머니에서 한 개의 공을 꺼내는 두 번의 시행에서 나오는 모든 경우의 수는

${}_{10}\mathrm{P}_2=10\times9=90$

$\frac{a}{2}+\frac{b}{3}=\frac{3a+2b}{6}$ $\cdots\cdots$ ㉠

a가 홀수이면 $3a+2b$도 홀수이므로 $\frac{3a+2b}{6}$는 자연수가 될 수 없다.

그러므로 a는 짝수이다.

또한, a가 짝수이면 ㉠에서 $\frac{a}{2}$가 자연수이므로 $\frac{b}{3}$도 자연수이어야 한다.

그러므로 b는 3의 배수이다.

이때 6은 짝수이면서 3의 배수이므로 $\frac{a}{2}+\frac{b}{3}$가 자연수인 경우의 수는

$5\times3-1=15-1=14$

따라서 구하는 확률은

$\frac{14}{90}=\frac{7}{45}$

답 ⑤

5 한 개의 주사위를 세 번 던질 때 일어날 수 있는 모든 경우의 수는

$6\times6\times6=216$

$(a-2b)(b-c)=0$에서 $a=2b$ 또는 $b=c$

이때 $a=2b$인 사건을 A, $b=c$인 사건을 B라 하면 등식 $(a-2b)(b-c)=0$을 만족시키는 사건은 $A\cup B$이다.

(i) $a=2b$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(2, 1), (4, 2), (6, 3)$

이고, 이 3가지의 각 경우에 대하여 c의 경우의 수는 6이다.

따라서 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $3\times6=18$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{18}{216}$

(ii) $b=c$를 만족시키는 순서쌍 (b, c)는

$(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$

이고, 이 6가지의 각 경우에 대하여 a의 경우의 수는 6이다.

따라서 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $6\times6=36$이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{36}{216}$

(iii) $a=2b=2c$를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)는

$(2, 1, 1), (4, 2, 2), (6, 3, 3)$

의 3가지이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{216}$

(i), (ii), (iii)에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{18}{216}+\frac{36}{216}-\frac{3}{216}\\&=\frac{17}{72}\end{aligned}$$

답 ④

6 15개의 탁구공 중에서 동시에 두 개를 꺼내는 모든 경우의 수는

${}_{15}\mathrm{C}_2=\frac{15\times14}{2\times1}=105$

적어도 하나의 노란색 탁구공을 꺼내는 사건을 A라 하면 사건 A의 여사건 A^C은 흰색 탁구공만 두 개를 꺼내는 사건이다.

이때 흰색 탁구공 5개 중에서 동시에 두 개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{10}{105}=\frac{2}{21}$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A)&=1-\mathrm{P}(A^C)\\&=1-\frac{2}{21}\\&=\frac{19}{21}\end{aligned}$$

답 ⑤

7 5개의 공 중에서 동시에 2개의 공을 꺼내는 모든 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

주머니에서 임의로 동시에 꺼낸 두 공에 적혀 있는 두 수의 곱이 짝수인 사건을 A라 하면 사건 A의 여사건 A^C은 두 수의 곱이 홀수인 사건이다.

이때 두 수의 곱이 홀수가 되려면 두 수 모두 홀수이어야 하므로 이 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_2=\frac{3\times2}{2\times1}=3$

따라서 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{3}{10}$이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A)&=1-\mathrm{P}(A^C)\\&=1-\frac{3}{10}\\&=\frac{7}{10}\end{aligned}$$

답 ⑤

Level 1 기초 연습

본문 52쪽

1 8　　**2** ①　　**3** ①　　**4** ③　　**5** ⑤

1 $4\le a+b\le 5$에서

$a+b=4$ 또는 $a+b=5$

$a+b=4$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(1, 3), (2, 2), (3, 1)$

$a+b=5$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)$

$4\le a+b\le 5$를 만족시키는 사건이 A이므로

$A=\{(1, 3), (2, 2), (3, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$

따라서 사건 A를 만족시키는 순서쌍 (a, b)에서 ab의 값은 3, 4, 6이다.

이때 사건 A와 등식 $ab=n$을 만족시키는 사건 B_n이 서로 배반사건이 되려면 $A\cap B_n=\varnothing$이어야 하므로 6 이하의 자연수 n의 값은 1, 2, 5이다.

따라서 모든 자연수 n의 값의 합은

$1+2+5=8$

답 8

2 두 사건 A와 B가 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=0$

이때

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\\&=\{2\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\}-\mathrm{P}(A)\end{aligned}$$

이므로

$\frac{1}{4}=\frac{1}{3}-\mathrm{P}(A)$

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{12}$

$\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}-2\mathrm{P}(A)$

$=\frac{1}{3}-2\times\frac{1}{12}$

$=\frac{1}{6}$

따라서 구하는 값은

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{12}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{72}$

답 ①

다른 풀이

두 사건 A와 B가 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=0$

이때 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$ 에서

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$ …… ㉠

$2\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$ …… ㉡

㉠과 ㉡을 연립하여 풀면

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{12}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}$

따라서 구하는 값은

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{12}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{72}$

3 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 일어날 수 있는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$

부등식

$4\le(a-2)(b-1)\le6$ …… ㉠

을 만족시키는 사건을 A라 하자.

(ⅰ) $(a-2)(b-1)=4$일 때,

$a-2$	1	2	4
$b-1$	4	2	1

순서쌍 (a, b)는 $(3, 5)$, $(4, 3)$, $(6, 2)$로 이 경우의 수는 3이다.

(ⅱ) $(a-2)(b-1)=5$일 때,

$a-2$	1	5
$b-1$	5	1

순서쌍 (a, b)는 $(3, 6)$으로 이 경우의 수는 1이다.

(ⅲ) $(a-2)(b-1)=6$일 때,

$a-2$	1	2	3	6
$b-1$	6	3	2	1

순서쌍 (a, b)는 $(4, 4)$, $(5, 3)$으로 이 경우의 수는 2이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 부등식 ㉠을 만족시키는 경우의 수는

$3+1+2=6$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

답 ①

4 7명의 학생이 앞에서부터 일렬로 앉는 경우의 수는 $7!$

(ⅰ) A, B가 가장 앞자리와 가장 뒷자리를 제외한 다섯 자리 중 두 자리에 앉는 경우의 수는

${}_5\mathrm{P}_2$

(ⅱ) A, B가 앉고 남은 다섯 자리에 A, B를 제외한 5명의 학생이 앉는 경우의 수는

$5!$

(ⅰ), (ⅱ)에서 가장 앞자리와 가장 뒷자리를 제외한 자리에 A, B가 앉는 경우의 수는

${}_5\mathrm{P}_2\times5!$

따라서 구하는 확률은

$\frac{{}_5\mathrm{P}_2\times5!}{7!}=\frac{5\times4}{7\times6}$

$=\frac{10}{21}$

답 ③

5 집합 X의 10개의 원소 중에서 임의로 서로 다른 세 원소를 택하는 경우의 수는

${}_{10}\mathrm{C}_3=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$

택한 세 원소 중 소수인 원소를 적어도 한 개 포함하는 사건을 A라 하면 사건 A의 여사건 A^C은 소수인 원소를 하나도 포함하지 않는 사건이다.

집합 X의 원소 중 소수 2, 3, 5, 7을 제외하고 남은 6개의 원소 중 세 원소를 택하는 경우의 수는

${}_6\mathrm{C}_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$

$=1-\frac{1}{6}$

$=\frac{5}{6}$

답 ⑤

Level 2 기본 연습 본문 53쪽

1 ④ 2 ④ 3 ② 4 ④

1 집합 X에서 X로의 함수의 개수는

${}_3\Pi_3=3^3$

$f(1)f(2)f(3)$의 값이 6의 배수인 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) $f(1)f(2)f(3)=6$인 경우

$6=1\times2\times3$이므로 이 경우를 만족시키는 함수 $f(x)$의 개수는 1, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$3!=6$

(ⅱ) $f(1)f(2)f(3)=12$인 경우

$12=2\times2\times3$이므로 이 경우를 만족시키는 함수 $f(x)$의 개수는 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{3!}{2!}=3$

(ⅲ) $f(1)f(2)f(3)=18$인 경우

$18=2\times3\times3$이므로 이 경우를 만족시키는 함수 $f(x)$의 개수는 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{3!}{2!}=3$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $f(1)f(2)f(3)$의 값이 6의 배수인 경우의 수는

$6+3+3=12$

따라서 구하는 확률은

$\frac{12}{3^3}=\frac{4}{9}$

답 ④

2 두 원소 a, b $(a\in A, b\in B)$의 순서쌍 (a, b)의 개수는

$10\times10=100$

집합 A의 원소를 3으로 나누었을 때의 나머지가 0, 1, 2인 집합을 각각 A_0, A_1, A_2라 하면

$A_0=\{6, 12, 18\}$

$A_1=\{4, 10, 16\}$

$A_2=\{2, 8, 14, 20\}$

집합 B의 원소를 3으로 나누었을 때의 나머지가 1, 2인 집합을 각각 B_1, B_2라 하면

$B_1=\{2^2, 2^4, 2^6, 2^8, 2^{10}\}$

$B_2=\{2, 2^3, 2^5, 2^7, 2^9\}$

따라서 $a+b$가 3의 배수가 되는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) $a\in A_1$, $b\in B_2$일 때,

순서쌍 (a, b)의 개수는

$3\times5=15$

(ⅱ) $a\in A_2$, $b\in B_1$일 때,

순서쌍 (a, b)의 개수는

$4\times5=20$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a+b$가 3의 배수가 되는 경우의 수는

$15+20=35$

따라서 구하는 확률은

$\frac{35}{100}=\frac{7}{20}$

답 ④

3 서로 다른 5개의 공 중에서 중복을 허락하여 차례로 4개의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_5\Pi_4=5^4$

$b^2+c^2=20$에서

$b=2$, $c=4$ 또는 $b=4$, $c=2$

$b=2$, $c=4$이고 $a\le b$, $c\le d$인 사건을 A, $b=4$, $c=2$이고 $a\le b$, $c\le d$인 사건을 B라 하면 $b^2+c^2=20$이고 $a\le b$, $c\le d$인 사건은 $A\cup B$이다.

(ⅰ) $b=2$, $c=4$일 때,

$a\le b$, $c\le d$를 만족시키는 a의 값은 1, 2이고, d의 값은 4, 5이다.

따라서 이 조건을 만족시키는 경우의 수는 $2\times2=4$이므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{4}{5^4}$

(ⅱ) $b=4$, $c=2$일 때,

$a\le b$, $c\le d$를 만족시키는 a의 값은 1, 2, 3, 4이고, d의 값은 2, 3, 4, 5이다.

따라서 이 조건을 만족시키는 경우의 수는 $4\times4=16$이므로 $\mathrm{P}(B)=\frac{16}{5^4}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{4}{5^4}+\frac{16}{5^4}=\frac{4}{125}$$

답 ②

4 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 일어날 수 있는 모든 경우

의 수는

$6\times6=36$

$f(a)f(b)=0$을 만족시키는 사건을 A라 하면 사건 A의 여사건 A^C은 $f(a)f(b)\neq0$, 즉 $f(a)\neq0$이고 $f(b)\neq0$

이때

$f(a)=a^2-5a+6=(a-2)(a-3)\neq0$

$f(b)=b^2-5b+6=(b-2)(b-3)\neq0$

이므로 a, b의 값은 각각 1, 4, 5, 6 중 하나이어야 한다.

따라서 $f(a)\neq0$이고 $f(b)\neq0$을 만족시키는

순서쌍 (a, b)의 개수는 $4\times4=16$이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$

$=1-\frac{4}{9}$

$=\frac{5}{9}$

답 ④

다른 풀이

$f(a)=0$인 사건을 A, $f(b)=0$인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cup B)$ 이다.

$f(a)=a^2-5a+6=(a-2)(a-3)=0$에서

$a=2$ 또는 $a=3$

따라서 $f(a)=0$을 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$2\times6=12$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{12}{6^2}=\frac{1}{3}$

같은 방법으로 $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$이다.

한편, $f(a)=f(b)=0$을 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$2\times2=4$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}$

$=\frac{5}{9}$

Level 3 실력 완성

본문 54쪽

1 ③ **2** ④ **3** 5

1 9개의 구슬을 임의로 3개씩 3묶음으로 나누어 상자 A, B, C에 넣는 경우의 수는

${}_9\mathrm{C}_3\times{}_6\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_3\times\frac{1}{3!}\times3!$

$=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}\times\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}$

$=1680$

상자에 들어 있는 세 구슬에 적혀 있는 수의 합이 홀수가 되려면 세 상자에 들어 있는 구슬이 다음과 같아야 한다.

(홀수 3개), (홀수 1개, 짝수 2개), (홀수 1개, 짝수 2개)

…… ㉠

(ⅰ) 홀수 1, 3, 5, 7, 9를 3개, 1개, 1개로 나누는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_3\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1\times\frac{1}{2!}$

$=\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}\times2\times1\times\frac{1}{2}$

$=10$

(ⅱ) 짝수 2, 4, 6, 8을 2개, 2개로 나누는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_2\times\frac{1}{2!}$

$=\frac{4\times3}{2\times1}\times1\times\frac{1}{2}$

$=3$

(ⅰ)에서 나눈 홀수 1개, 홀수 1개와 (ⅱ)에서 나눈 짝수 2개, 짝수 2개로 (홀수 1개, 짝수 2개), (홀수 1개, 짝수 2개)인 두 묶음을 만드는 경우의 수는 2이다.

따라서 9개의 구슬로 ㉠과 같이 3묶음으로 나누는 경우의 수는 $10\times3\times2=60$이고, 이 3묶음을 상자 A, B, C에 넣는 경우의 수는 $3!$ 이므로 구하는 확률은

$\frac{60\times3!}{1680}=\frac{3}{14}$

답 ③

2 집합 X에서 집합 Y로의 함수의 개수는

${}_4\Pi_4=4^4$

함수 f가 $f(1)f(2)f(3)=0$ 또는 $f(4)\geq0$을 만족시키는 사건을 A라 하면 사건 A의 여사건 A^C은

$f(1)f(2)f(3)\neq0$이고 $f(4)<0$

(ⅰ) $f(1)f(2)f(3)\neq0$인 경우

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값은 0이 될 수 없으므로 집합 $\{-2, -1, 1\}$의 원소 중에서 결정되어야 한다.

따라서 $f(1)f(2)f(3)\neq0$을 만족시키도록 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_3\Pi_3=3^3$

(ⅱ) $f(4)<0$인 경우

$f(4)$의 값은 집합 $\{-2, -1\}$의 원소 중에서 결정되어야 하므로 $f(4)<0$을 만족시키도록 $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는

2

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{3^3\times 2}{4^4}=\frac{27}{128}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$

$=1-\frac{27}{128}$

$=\frac{101}{128}$

답 ④

3 자연수 p에 대하여 $x=p$일 때 부등식

$y\le x^2+\frac{1}{2}x$

를 만족시키는 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수를 $a_p\,(p=1, 2, 3, \cdots)$ 라 하면 자연수 k에 대하여

(ⅰ) $p=2k-1$일 때,

$a_p=a_{2k-1}$

$=(2k-1)^2+\frac{1}{2}(2k-1)-\frac{1}{2}$

$=4k^2-3k$

(ⅱ) $p=2k$일 때,

$a_p=a_{2k}$

$=(2k)^2+\frac{1}{2}\times 2k$

$=4k^2+k$

또한, $x=p$일 때, $y=x$를 만족시키는 순서쌍 (x, y)의 개수를 b_p라 하면

$b_p=1$

따라서 확률 P_{2m}은

$$\mathrm{P}_{2m}=\frac{\sum_{k=1}^{2m}1}{\sum_{k=1}^{m}(a_{2k-1}+a_{2k})}$$

$$=\frac{2m}{\sum_{k=1}^{m}\{(4k^2-3k)+(4k^2+k)\}}$$

$$=\frac{2m}{\sum_{k=1}^{m}(8k^2-2k)}$$

$$=\frac{2m}{8\times\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}-2\times\frac{m(m+1)}{2}}$$

$$=\frac{6}{(m+1)(8m+1)}$$

이므로

$\frac{6}{(m+1)(8m+1)}=\frac{1}{41}$에서

$(m+1)(8m+1)=246$

$8m^2+9m-245=0$

$(8m+49)(m-5)=0$

이때 m은 자연수이므로

$m=5$

답 5

05 조건부확률

유제 본문 57~65쪽

1 ⑤	2 79	3 ③	4 ②	5 ②
6 ③	7 4	8 ③	9 ②	

1 회원 10명 중 임의로 선택한 세 명이 모두 같은 중학교를 졸업한 회원인 사건을 X, 모두 A 중학교를 졸업한 회원인 사건을 Y, 모두 B 중학교를 졸업한 회원인 사건을 Z라 하면

$$\mathrm{P}(Y)=\frac{{}_6\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{6},\ \mathrm{P}(Z)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{30}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X)&=\mathrm{P}(Y\cup Z)\\&=\mathrm{P}(Y)+\mathrm{P}(Z)\\&=\frac{1}{6}+\frac{1}{30}\\&=\frac{1}{5}\end{aligned}$$

한편, $\mathrm{P}(Y\cap X)=\mathrm{P}(Y)$ 이므로 구하는 조건부확률 $\mathrm{P}(Y|X)$ 는

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y|X)&=\frac{\mathrm{P}(Y\cap X)}{\mathrm{P}(X)}\\&=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{5}}\\&=\frac{5}{6}\end{aligned}$$

답 ⑤

2 학생 40명 중 임의로 택한 한 학생이 긴팔 셔츠를 입은 학생일 사건을 A, 긴바지를 입은 학생일 사건을 B라 하자.
학생 40명 중 임의로 택한 한 학생이 긴팔 셔츠를 입었을 때, 이 학생이 긴바지를 입었을 확률 p_1은

$$\begin{aligned}p_1&=\mathrm{P}(B|A)\\&=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}\\&=\frac{\frac{6}{40}}{\frac{14}{40}}\\&=\frac{3}{7}\end{aligned}$$

학생 40명 중 임의로 택한 한 학생이 긴바지를 입었을 때, 이 학생이 반팔 셔츠를 입었을 확률 p_2는

$$\begin{aligned}p_2&=\mathrm{P}(A^C|B)\\&=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B)}{\mathrm{P}(B)}\\&=\frac{\frac{14}{40}}{\frac{20}{40}}\\&=\frac{7}{10}\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}70(p_1+p_2)&=70\times\left(\frac{3}{7}+\frac{7}{10}\right)\\&=79\end{aligned}$$

답 79

3 주사위를 던져서 2 이하의 눈이 나오는 사건을 A, 주머니에서 서로 다른 색의 공이 나오는 사건을 B라 하자.

(i) 주사위를 던져서 2 이하의 눈이 나오는 경우

$$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

주사위를 던져서 2 이하의 눈이 나오면 주머니에 흰 공을 1개 넣는다.
따라서 흰 공 4개와 검은 공 2개가 들어 있는 주머니에서 흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼내야 하므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B|A)&=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}\\&=\frac{8}{15}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B|A)\\&=\frac{1}{3}\times\frac{8}{15}\\&=\frac{8}{45}\end{aligned}$$

(ii) 주사위를 던져서 3 이상의 눈이 나오는 경우

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

주사위를 던져서 3 이상의 눈이 나오면 주머니에 검은 공을 1개 넣는다.
따라서 흰 공 3개와 검은 공 3개가 들어 있는 주머니에서 흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼내야 하므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B|A^C)&=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}\\&=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

$$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\,\mathrm{P}(B\,|\,A^C)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{8}{45}+\frac{2}{5}=\frac{26}{45}$$

답 ③

4 짝수가 나오는 사건이 A이므로

$A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$

따라서 $\mathrm{P}(A)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

10 이하의 자연수 n에 대하여 n의 양의 약수의 개수를 k ($k=1, 2, 3, 4$)라 하면

$\mathrm{P}(B_n)=\frac{k}{10}$

이때 두 사건 A, B_n이 서로 독립이어야 하므로

$$\mathrm{P}(A\cap B_n)=\mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B_n)=\frac{1}{2}\times\frac{k}{10}\quad\cdots\cdots\text{㉠}$$

를 만족시켜야 한다.

따라서 $k=2$ 또는 $k=4$이어야 한다.

(ⅰ) $k=2$, 즉 n의 양의 약수의 개수가 2인 경우

㉠에서 $\mathrm{P}(A\cap B_n)=\frac{1}{10}$이므로

n은 짝수인 약수 1개와 홀수인 약수 1개를 가져야 한다.

따라서 $n=2$

(ⅱ) $k=4$, 즉 n의 양의 약수의 개수가 4인 경우

㉠에서 $\mathrm{P}(A\cap B_n)=\frac{2}{10}$이므로

n은 짝수인 약수 2개와 홀수인 약수 2개를 가져야 한다.

따라서 $n=6$ 또는 $n=10$

(ⅰ), (ⅱ)에서 n의 값은 2, 6, 10이고, 그 개수는 3이다.

답 ②

5 $n(A)=a$라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{a}{10}$

$n(B)=9-n(A)=9-a$이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{9-a}{10}$

$n(A\cap B)=2$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

한편, 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$

$\frac{1}{5}=\frac{a}{10}\times\frac{9-a}{10}$, $20=a(9-a)$, $(a-4)(a-5)=0$

$a=4$ 또는 $a=5$

이때 $\mathrm{P}(A)>\mathrm{P}(B)$ 이므로 $\frac{a}{10}>\frac{9-a}{10}$에서 $a>\frac{9}{2}$이다.

따라서 $a=5$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(B)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

$$\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$$

답 ②

6 두 종류 A, B의 행운권에 당첨되는 사건을 각각 X, Y라 하고, 적어도 한 종류의 행운권에 당첨되는 사건을 Z라 하면 Z의 여사건 Z^C은 두 종류의 행운권에 모두 당첨되지 않는 사건이다.

이때 두 사건 X, Y가 서로 독립이므로 두 사건 X^C과 Y^C도 서로 독립이다. 따라서

$$\mathrm{P}(Z^C)=\mathrm{P}(X^C\cap Y^C)=\mathrm{P}(X^C)\,\mathrm{P}(Y^C)=\left(1-\frac{1}{6}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}=\frac{5}{8}$$

$$\mathrm{P}(Z)=1-\mathrm{P}(Z^C)=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$$

답 ③

7 주머니에서 첫 번째 꺼낸 공이 흰 공인 사건을 X, 두 번째 꺼낸 공이 흰 공인 사건을 Y라 하자.

(ⅰ) 흰 공이 적어도 1번 나오는 사건을 Z라 하면 Z의 여사건 Z^C은 2번 모두 검은 공이 나오는 사건이다.
이때 두 사건 X, Y가 서로 독립이므로 두 사건 X^C과 Y^C도 서로 독립이다. 따라서

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Z^C) &= \mathrm{P}(X^C \cap Y^C) \\ &= \mathrm{P}(X^C)\mathrm{P}(Y^C) \\ &= \frac{3}{n+3} \times \frac{3}{n+3} \\ &= \frac{9}{(n+3)^2} \end{aligned}$$

$$p_1 = 1 - \mathrm{P}(Z^C) = 1 - \frac{9}{(n+3)^2}$$

(ⅱ) 검은 공이 적어도 1번 나오는 사건을 W라 하면 W의 여사건 W^C은 2번 모두 흰 공이 나오는 사건이다.
이때 두 사건 X, Y가 서로 독립이므로

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(W^C) &= \mathrm{P}(X \cap Y) \\ &= \mathrm{P}(X)\mathrm{P}(Y) \\ &= \frac{n}{n+3} \times \frac{n}{n+3} \\ &= \frac{n^2}{(n+3)^2} \end{aligned}$$

$$p_2 = 1 - \mathrm{P}(W^C) = 1 - \frac{n^2}{(n+3)^2}$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 &= \frac{n^2}{(n+3)^2} - \frac{9}{(n+3)^2} \\ &= \frac{n^2-9}{(n+3)^2} \\ &= \frac{(n-3)(n+3)}{(n+3)^2} \\ &= \frac{n-3}{n+3} \\ &= \frac{1}{7} \end{aligned}$$

이므로

$7(n-3) = n+3$

$6n = 24$

$n = 4$

따라서 자연수 n의 값은 4이다.

답 4

8 한 개의 동전을 5번 던질 때, 앞면이 나온 횟수를 a라 하면 뒷면이 나온 횟수는 $5-a$이므로

$a > 5-a$

$a > \frac{5}{2}$

a는 횟수이므로

$a = 3, 4, 5$

(ⅰ) $a=3$, 즉 앞면이 나온 횟수가 3일 확률은

$${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32}$$

(ⅱ) $a=4$, 즉 앞면이 나온 횟수가 4일 확률은

$${}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{32}$$

(ⅲ) $a=5$, 즉 앞면이 나온 횟수가 5일 확률은

$${}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 확률은

$$\begin{aligned} \frac{10}{32} + \frac{5}{32} + \frac{1}{32} &= \frac{16}{32} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 ③

9 네 명의 학생 중 적어도 두 명의 학생이 A지역을 택하는 사건을 X라 하자.
네 명의 학생이 세 지역 중 임의로 한 지역을 택하는 사건은 서로 독립이므로 독립시행의 확률에 의하여 사건 X^C의 확률을 구하면 다음과 같다.

(ⅰ) 네 명 모두 A지역을 택하지 않을 확률

$${}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

(ⅱ) 네 명 중 한 명만 A지역을 택할 확률

$${}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{32}{81}$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X^C) &= \frac{16}{81} + \frac{32}{81} \\ &= \frac{48}{81} \\ &= \frac{16}{27} \end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X) &= 1 - \mathrm{P}(X^C) \\ &= 1 - \frac{16}{27} \\ &= \frac{11}{27} \end{aligned}$$

답 ②

Level 1 기초 연습

본문 66쪽

1 ② **2** ⑤ **3** ⑤ **4** ④ **5** 15

1 한 개의 주사위를 두 번 던지는 시행에서 나온 두 눈의 수의 곱이 짝수인 사건을 A, 두 눈의 수의 합이 짝수인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.
사건 A의 여사건 A^C은 두 눈의 수의 곱이 홀수인 사건, 즉 두 눈의 수가 모두 홀수인 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{3\times3}{36}=\frac{1}{4}$$

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

사건 $A\cap B$는 두 눈의 수가 모두 짝수인 사건이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3\times3}{36}=\frac{1}{4}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}$$

답 ②

2 집합 X를 택하는 사건을 A, 택한 집합의 원소 중에서 택한 원소가 짝수인 사건을 B라 하자.

(i) 집합 X를 택하는 경우

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$

집합 X에서 꺼낸 원소가 짝수이어야 하므로

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{3}$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

(ii) 집합 Y를 택하는 경우

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{2}$

집합 Y에서 택한 원소가 짝수이어야 하므로

$\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{2}{3}$

$$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$$

답 ⑤

3 $$\mathrm{P}(A^C\cup B^C)=\mathrm{P}((A\cap B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{13}{16}$$

이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{16}$ …… ㉠

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}(\mathrm{P}(B))^2$$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{1}{3}(\mathrm{P}(B))^2=\frac{3}{16}$

$(\mathrm{P}(B))^2=\frac{9}{16}$

$0<\mathrm{P}(B)<1$이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$

답 ⑤

4 2의 배수가 적혀 있는 공이 나오는 사건이 A, 3의 배수가 적혀 있는 공이 나오는 사건이 B이므로 곱사건 $A\cap B$는 6의 배수가 적혀 있는 공이 나오는 사건이다.
두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}$

$=\frac{1}{3}$ …… ㉠

이때 주머니 안에 들어 있는 6의 배수가 적혀 있는 공의 개수를 x라 하면

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{x}{12}$ …… ㉡

이므로 ㉠, ㉡에서

$\frac{1}{3}=\frac{x}{12}$

$x=4$

따라서 주머니 안에 들어 있는 6의 배수가 적혀 있는 공의 개수는 4이다.

답 ④

5 한 개의 동전을 8번 던질 때, 앞면이 n번 나올 확률은

${}_{8}\mathrm{C}_{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{8-n}={}_{8}\mathrm{C}_{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{8}$

${}_{8}\mathrm{C}_{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{8}=\frac{7}{32}$에서

${}_{8}\mathrm{C}_{n}=56$

이때 $56=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}={}_{8}\mathrm{C}_{3}$이므로

${}_{8}\mathrm{C}_{n}={}_{8}\mathrm{C}_{3}$ 또는 ${}_{8}\mathrm{C}_{n}={}_{8}\mathrm{C}_{5}$

따라서 $n=3$ 또는 $n=5$이므로 모든 자연수 n의 값의 곱은

$3\times5=15$

답 15

Level 2 기본 연습

본문 67쪽

1 15 **2** 640 **3** 25 **4** ①

1 학생 60명 중 임의로 선택한 한 명이 일본을 방문한 적이 있는 학생인 사건을 A, 중국을 방문한 적이 있는 학생인 사건을 B라 하자.

일본, 중국을 방문한 적이 있는 학생의 수가 각각 30, 20이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{30}{60}=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(B)=\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$

학생 60명 중 임의로 선택한 한 학생이 일본을 방문한 적이 있는 학생이었을 때, 이 학생이 중국을 방문한 적이 있는 학생일 확률 p_1은

$p_1=\mathrm{P}(B|A)$

$=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$

$=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\frac{1}{2}}$

$=2\mathrm{P}(A\cap B)$

학생 60명 중 임의로 선택한 한 학생이 중국을 방문한 적이 있는 학생이었을 때, 이 학생이 일본을 방문한 적이 있는 학생일 확률 p_2는

$p_2=\mathrm{P}(A|B)$

$=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$

$=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\frac{1}{3}}$

$=3\mathrm{P}(A\cap B)$

이때 $p_1+p_2=\frac{5}{4}$이므로

$2\mathrm{P}(A\cap B)+3\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{5}{4}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}$

따라서 60명의 학생 중 일본과 중국을 모두 방문한 적이 있는 학생의 수는

$60\times\mathrm{P}(A\cap B)=60\times\frac{1}{4}$

$=15$

답 15

2 2000명 중 임의로 선택한 한 명이 남자인 사건을 A, 홈팀을 응원하는 관람객인 사건을 B라 하자.

조사한 2000명 중 남자가 1200명이고 여자가 800명이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{5}$, $\mathrm{P}(A^C)=\frac{2}{5}$

조사한 2000명 중 임의로 선택한 한 명이 남자였을 때, 이 남자가 홈팀을 응원할 확률이 $\frac{2}{5}$이므로

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{5}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$

$=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}$

$=\frac{6}{25}$

조사한 2000명 중 임의로 선택한 한 명이 여자였을 때, 이 여자가 원정팀을 응원할 확률이 $\frac{4}{5}$이므로 이 여자가 홈팀을 응원할 확률은 $\frac{1}{5}$이다.

$\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{1}{5}$

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\,\mathrm{P}(B|A^C)$

$=\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}$

$=\frac{2}{25}$

따라서 조사한 2000명 중 임의로 선택한 한 명이 홈팀을 응원할 확률은

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$=\frac{6}{25}+\frac{2}{25}$

$=\frac{8}{25}$

이므로 조사한 2000명 중 홈팀을 응원하는 관람객의 수는

$2000\times\mathrm{P}(B)=2000\times\frac{8}{25}$

$=640$

답 640

참고

조사한 2000명 중 홈팀을 응원하는 남자, 여자 관람객의 수는 다음 표와 같다.

[단위 : 명]

	남자(A)	여자(A^C)	합계
홈팀 응원(B)	480	160	640

3 상자 A에서 꺼낸 구슬이 흰 구슬인 사건을 X, 상자 B에서 꺼낸 구슬이 흰 구슬인 사건을 Y라 하자.
이때 두 상자 A, B에서 각각 1개씩 택한 구슬이 같은 색인 경우와 그 확률은 다음과 같다.

(i) 상자 A, B에서 모두 흰 구슬이 나오는 경우
두 사건 X, Y는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(X\cap Y)=\mathrm{P}(X)\,\mathrm{P}(Y)$

$=\frac{a}{100}\times\frac{100-2a}{100}$

$=\frac{a}{100}\left(1-\frac{2a}{100}\right)$

(ii) 상자 A, B에서 모두 검은 구슬이 나오는 경우
두 사건 X^C, Y^C은 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(X^C\cap Y^C)=\mathrm{P}(X^C)\,\mathrm{P}(Y^C)$

$=\frac{100-a}{100}\times\frac{2a}{100}$

$=\frac{2a}{100}\left(1-\frac{a}{100}\right)$

(i), (ii)에 의하여 같은 색의 구슬이 나올 확률이

$\frac{a}{100}\left(1-\frac{2a}{100}\right)+\frac{2a}{100}\left(1-\frac{a}{100}\right)$

이므로 $\frac{a}{100}=p$로 놓으면

$p(1-2p)+2p(1-p)=\frac{1}{2}$

$8p^2-6p+1=0$

$(2p-1)(4p-1)=0$

$p=\frac{1}{4}$ 또는 $p=\frac{1}{2}$

따라서 $p=\frac{1}{4}$일 때, $\frac{a}{100}=\frac{1}{4}$에서 $a=25$이고

$p=\frac{1}{2}$일 때, $\frac{a}{100}=\frac{1}{2}$에서 $a=50$이다.

이때 $a=50$이면 상자 B에는 흰 구슬이 없으므로 조건을 만족시키지 못한다.

따라서 $a=25$

답 25

4 주어진 시행에서 동전의 앞면이 나온 횟수가 2인 사건을 X라 하자.

(i) 주사위에서 나온 눈의 수의 양의 약수의 개수가 홀수이고, 동전의 앞면이 나온 횟수가 2일 확률
주사위에서 나온 눈의 수의 양의 약수의 개수가 홀수인 사건을 A라 하면 $A=\{1, 4\}$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(X|A)$는 동전을 3번 던져서 앞면이 나온 횟수가 2일 확률이므로

$\mathrm{P}(X|A)={}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}$

$\mathrm{P}(A\cap X)=\mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(X|A)$

$=\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}$

$=\frac{1}{8}$

(ii) 주사위에서 나온 눈의 수의 양의 약수의 개수가 짝수이고, 동전의 앞면이 나온 횟수가 2일 확률
주사위에서 나온 눈의 수의 양의 약수의 개수가 짝수인 사건을 B라 하면 $B=\{2, 3, 5, 6\}$이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

$\mathrm{P}(X|B)$ 는 동전을 4번 던져서 앞면이 나온 횟수가 2일 확률이므로

$\mathrm{P}(X|B)={}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B\cap X)&=\mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(X|B)\\&=\frac{2}{3}\times\frac{3}{8}\\&=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$

답 ①

Level 3 실력 완성

본문 68쪽

1 17 **2** 69 **3** ⑤

1 학생 30명 중 임의로 선택한 한 명이 볼펜을 받은 학생인 사건을 A, 여학생인 사건을 B라 하자.

볼펜을 받은 학생이 10명이고, 연필을 받은 학생이 20명이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$

볼펜을 받은 여학생의 수를 x라 하면 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{x}{30}$이고, 학생 30명 중 임의로 선택한 한 학생이 볼펜을 받았을 때, 그 학생이 여학생일 확률이 $\frac{3}{5}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B|A)&=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}\\&=\frac{\frac{x}{30}}{\frac{1}{3}}\\&=\frac{x}{10}\\&=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

$x=6$

따라서 볼펜을 받은 남학생의 수는 $10-6=4$이고, 연필을 받은 남학생의 수는 $18-4=14$이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\frac{14}{30}=\frac{7}{15}$이고, 학생 30명 중 임의로 선택한 한 학생이 연필을 받았을 때, 그 학생이 남학생일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B^C|A^C)&=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B^C)}{\mathrm{P}(A^C)}\\&=\frac{\frac{7}{15}}{\frac{2}{3}}\\&=\frac{7}{10}\end{aligned}$$

따라서 $p=10$, $q=7$이므로

$p+q=10+7=17$

답 17

참고

학생 30명 중 남학생, 여학생, 볼펜, 연필을 받은 학생의 수는 다음 표와 같다.

[단위 : 명]

	볼펜(A)	연필(A^C)	합계
여학생(B)	6	6	12
남학생(B^C)	4	14	18
합계	10	20	30

2 동전의 앞면이 나온 횟수 a와 주사위에서 2 이하의 눈의 수가 나온 횟수 b에 대하여 부등식

$3a<b$ ($a=0, 1, 2, 3, 4$, $b=0, 1, 2, 3, 4$)

를 만족시키는 경우는

$a=0$, $b=1, 2, 3, 4$ 또는 $a=1$, $b=4$

이고 각 경우의 확률은 다음과 같다.

(i) $a=0$, $b=1, 2, 3, 4$인 경우

$a=0$이면 동전의 앞면이 나온 횟수가 0이므로 이 확률은

${}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{2^4}$

$b=1, 2, 3, 4$이면 주사위에서 2 이하의 눈의 수가 적어도 한 번 나오는 경우이므로 이 확률은

$1-{}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{2}{3}\right)^4=1-\frac{16}{3^4}=\frac{65}{3^4}$

따라서 이 경우의 확률은

$\frac{1}{2^4}\times\frac{65}{3^4}=\frac{65}{6^4}$

(ii) $a=1$, $b=4$인 경우

$a=1$이면 동전의 앞면이 나온 횟수가 1이므로 이 확률은

$${}_{4}\mathrm{C}_{1}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=\frac{4}{2^{4}}$$

$b=4$이면 주사위에서 2 이하의 눈의 수가 나온 횟수가 4이므로 이 확률은

$${}_{4}\mathrm{C}_{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{4}=\frac{1}{3^{4}}$$

따라서 이 경우의 확률은

$$\frac{4}{2^{4}}\times\frac{1}{3^{4}}=\frac{4}{6^{4}}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$$\frac{65}{6^{4}}+\frac{4}{6^{4}}=\frac{69}{6^{4}}$$

이므로

$p=69$

답 69

3 한 개의 주사위를 5번 던지는 시행이므로

$m+n=5$ …… ㉠

$i^{|m-n|}=-i$를 만족시키려면 $-i=i^{3}$이므로

$|m-n|=3$

$m-n=-3$ 또는 $m-n=3$

(ⅰ) $m-n=-3$인 경우

㉠과 연립하여 풀면

$m=1$, $n=4$

따라서 이 경우의 확률은 주사위를 5번 던질 때 3의 배수인 눈의 수가 1번, 3의 배수가 아닌 눈의 수가 4번 나올 확률이므로

$${}_{5}\mathrm{C}_{1}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{4}=\frac{80}{3^{5}}$$

(ⅱ) $m-n=3$인 경우

㉠과 연립하여 풀면

$m=4$, $n=1$

따라서 이 경우의 확률은 주사위를 5번 던질 때 3의 배수인 눈의 수가 4번, 3의 배수가 아닌 눈의 수가 1번 나올 확률이므로

$${}_{5}\mathrm{C}_{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{4}\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{10}{3^{5}}$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 확률은

$$\frac{80}{3^{5}}+\frac{10}{3^{5}}=\frac{90}{3^{5}}=\frac{10}{27}$$

답 ⑤

06 이산확률분포

유제 본문 71~79쪽

1 ③	**2** ①	**3** ②	**4** ④	**5** ②
6 ④	**7** 8	**8** 72	**9** ③	

1 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 $0, 1, 2, 3$이고, X의 확률 질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_3\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}$ (단, $x=0, 1, 2, 3$)

따라서

$\mathrm{P}(X=2)={}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1$

$=\frac{3}{8}$

답 ③

2 5장의 카드 중에서 임의로 2장의 카드를 동시에 뽑는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_2=10$

뽑힌 2장의 카드에 적힌 수의 차인 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 $2, 4, 6, 8$이고 이 경우를 순서쌍으로 나타내면 다음과 같다.

$X=2$인 경우 : $(1, 3), (3, 5), (5, 7), (7, 9)$

$X=4$인 경우 : $(1, 5), (3, 7), (5, 9)$

$X=6$인 경우 : $(1, 7), (3, 9)$

$X=8$인 경우 : $(1, 9)$

따라서

$\mathrm{P}(X=6)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

답 ①

3 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{k}$	$\frac{2}{k}$	$\frac{3}{k}$	$\frac{4}{k}$	$\frac{5}{k}$	1

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{k}+\frac{2}{k}+\frac{3}{k}+\frac{4}{k}+\frac{5}{k}=1$

$\frac{15}{k}=1$

$k=15$

따라서 $\mathrm{P}(1\le X\le 3)$의 값은

$\mathrm{P}(1\le X\le 3)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$

$=\frac{1}{15}+\frac{2}{15}+\frac{3}{15}$

$=\frac{6}{15}$

$=\frac{2}{5}$

답 ②

4 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 $0, 1, 2$이고, X가 각각의 값을 가질 확률은

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_2\mathrm{C}_0\times{}_3\mathrm{C}_3}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{1}{10}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{6}{10}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{3}{10}$

이때 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

따라서 $\mathrm{E}(X)$의 값은

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{6}{10}+2\times\frac{3}{10}$

$=\frac{12}{10}$

$=\frac{6}{5}$

답 ④

5 A병에 맞는 뚜껑을 찾을 때까지 확인한 횟수가 확률변수 X이므로 X가 취하는 값은 $1, 2, 3, 4, 5$이고 각각의 값을 취할 확률은

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{5}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$

$\mathrm{P}(X=5)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{5}$

이때 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

이때

$$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{1}{5}+5\times\frac{1}{5}=3$$

$$\mathrm{V}(X)=1^2\times\frac{1}{5}+2^2\times\frac{1}{5}+3^2\times\frac{1}{5}+4^2\times\frac{1}{5}+5^2\times\frac{1}{5}-3^2=\frac{55}{5}-9=2$$

이므로

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{2}$

답 ②

6 확률의 총합은 1이므로

$a^2+\frac{a}{2}+\frac{1}{2}=1$, $2a^2+a-1=0$, $(a+1)(2a-1)=0$

$a>0$이므로

$a=\frac{1}{2}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

이때

$$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{2}=\frac{9}{4}$$

이므로

$$\mathrm{E}(4X+2)=4\mathrm{E}(X)+2=4\times\frac{9}{4}+2=11$$

답 ④

7 확률변수 X는 주사위 1개를 던져서 나온 눈의 수의 양의 약수의 개수이므로 주사위의 눈의 수에 따른 X의 값은 다음과 같다.

주사위의 눈의 수가 1이면 $X=1$

주사위의 눈의 수가 2, 3, 5이면 $X=2$

주사위의 눈의 수가 4이면 $X=3$

주사위의 눈의 수가 6이면 $X=4$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

이때

$$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{3}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}=\frac{7}{3}$$

$$\mathrm{V}(X)=1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{3}{6}+3^2\times\frac{1}{6}+4^2\times\frac{1}{6}-\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{19}{3}-\frac{49}{9}=\frac{8}{9}$$

이므로

$$\mathrm{V}(3X+7)=3^2\mathrm{V}(X)=9\mathrm{V}(X)=9\times\frac{8}{9}=8$$

답 8

8 한 개의 주사위를 한 번 던질 때 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이므로 확률변수 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_n\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{n-x}$ (단, $x=0, 1, 2, \cdots, n$)

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

이때 $\sigma(X)=4$이므로

$\sqrt{n\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}}=4$

$\frac{2n}{9}=16$에서

$n=72$

답 72

9 1회의 시행에서 모두 같은 색의 공이 나올 확률은

$\frac{{}_3\mathrm{C}_2+{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

이므로 확률변수 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_{20}\mathrm{C}_x\left(\frac{2}{5}\right)^x\left(\frac{3}{5}\right)^{20-x}$ (단, $x=0, 1, 2, \cdots, 20$)

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(20, \frac{2}{5}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=20\times\frac{2}{5}=8$

그러므로 $\mathrm{E}(2X+3)$ 의 값은

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(2X+3)&=2\mathrm{E}(X)+3\\&=2\times8+3\\&=19\end{aligned}$$

답 ③

Level 1 기초 연습

본문 80쪽

1 ① **2** ④ **3** ③ **4** ① **5** ①

1 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\cdots+\mathrm{P}(X=8)$

$=\frac{k}{1\times3}+\frac{k}{2\times4}+\cdots+\frac{k}{8\times10}$

$=\frac{k}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)\right\}$

$=\frac{k}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)$

$=\frac{29}{45}k$

$=1$

따라서 $k=\frac{45}{29}$

답 ①

2 확률의 총합은 1이므로

$a+b+a^2=1$ …… ㉠

$\mathrm{E}(X)=(-1)\times a+0\times b+1\times a^2=-\frac{1}{4}$이므로

$a^2-a=-\frac{1}{4}$

$4a^2-4a+1=0$

$(2a-1)^2=0$

$a=\frac{1}{2}$

a의 값을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{2}+b+\frac{1}{4}=1$

$b=\frac{1}{4}$

따라서 $a+b$의 값은

$a+b=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

답 ④

3 1, 2, 3, 4 중에서 서로 다른 두 수를 뽑는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2=6$이고, 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이다.

(1, 2), (2, 3), (3, 4)일 때 $X=1$

(1, 3), (2, 4)일 때 $X=2$

(1, 4)일 때 $X=3$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

이때

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{3}{6}+2\times\frac{2}{6}+3\times\frac{1}{6}$

$=\frac{5}{3}$

$\mathrm{V}(X)=1^2\times\frac{3}{6}+2^2\times\frac{2}{6}+3^2\times\frac{1}{6}-\left(\frac{5}{3}\right)^2$

$=\frac{5}{9}$

이므로

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

답 ③

4 $\mathrm{E}(X)=5$, $\mathrm{V}(X)=4$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(aX+b)&=a\mathrm{E}(X)+b\\&=5a+b\\&=0 \quad\cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(aX+b)&=a^2\mathrm{V}(X)\\&=4a^2\\&=1\end{aligned}$$

$a>0$이므로

$a=\frac{1}{2}$

a의 값을 ㉠에 대입하면

$b=-\frac{5}{2}$

따라서 $a+b$의 값은

$a+b=\frac{1}{2}+\left(-\frac{5}{2}\right)=-2$

답 ①

5 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{P}(X=x)={}_n\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{n-x}$

$\quad={}_n\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^n$

이때

$\mathrm{P}(X=1)={}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $\mathrm{P}(X=n)={}_n\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{2}\right)^n$

이므로 $\mathrm{P}(X=1)=12\mathrm{P}(X=n)$에서

${}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^n=12\,{}_n\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$n=12$

즉, 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(12, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=12\times\frac{1}{2}=6$

$\mathrm{V}(X)=12\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=3$

따라서

$\mathrm{E}(X)+\mathrm{V}(X)=6+3=9$

답 ①

Level 2 기본 연습

본문 81쪽

1 ② **2** ④ **3** ② **4** 150

1 확률변수 X가 취하는 값은 2, 3, 4이고, 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_1\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{3}{10}$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{4}{10}$

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{3}{10}$

이므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

이때

$\mathrm{E}(X)=2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{4}{10}+4\times\frac{3}{10}$

$\quad=\frac{30}{10}$

$\quad=3$

$\mathrm{E}(X^2)=2^2\times\frac{3}{10}+3^2\times\frac{4}{10}+4^2\times\frac{3}{10}$

$\quad=\frac{96}{10}$

$\quad=\frac{48}{5}$

이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$\quad=\frac{48}{5}-9$

$\quad=\frac{3}{5}$

답 ②

2 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	6	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

이때

$\mathrm{E}(X)$

$=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}$

$=\frac{7}{2}$

$\mathrm{E}(X^2)$

$=1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{1}{6}+4^2\times\frac{1}{6}+5^2\times\frac{1}{6}+6^2\times\frac{1}{6}$

$=\frac{91}{6}$

이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$\quad=\frac{91}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2$

$\quad=\frac{35}{12}$

또, 확률변수 X, Y, Z가 각각의 값을 취할 확률은 모두 $\frac{1}{6}$이므로 확률변수 X, Y, Z의 관계식은

$Y=X+5$, $Z=3X$

따라서

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(X+5)$

$\quad=\mathrm{V}(X)$

$\quad=\frac{35}{12}$

$\mathrm{V}(Z)=\mathrm{V}(3X)$

$\quad=9\mathrm{V}(X)$

$$=9\times\frac{35}{12}$$
$$=\frac{315}{12}$$
$$=\frac{105}{4}$$

이므로

$$\mathrm{V}(X)+\mathrm{V}(Y)+\mathrm{V}(Z)=\frac{35}{12}+\frac{35}{12}+\frac{105}{4}=\frac{385}{12}$$

답 ④

참고

확률변수 Y, Z가 취하는 값이 크므로 $\mathrm{V}(Y)$, $\mathrm{V}(Z)$를 직접 구하는 것보다 X, Y, Z 사이의 관계식을 이용하여 구한다.

3 확률변수 X의 확률질량함수가

$\mathrm{P}(X=x)={}_{25}\mathrm{C}_x p^x(1-p)^{25-x}$이므로 X는 이항분포 $\mathrm{B}(25, p)$를 따른다.

$\mathrm{E}(X)=5$이므로 $25\times p=5$에서

$$p=\frac{1}{5}$$

따라서

$$\mathrm{V}(X)=25\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=4$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^2)&=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=4+25\\&=29\end{aligned}$$

답 ②

4 4의 양의 약수는 1, 2, 4이므로 4의 양의 약수가 적힌 영역에 화살이 꽂힐 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

즉, 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(80, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=80\times\frac{1}{2}=40$$

$$\mathrm{V}(X)=80\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=20$$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(2X-10)&=2\mathrm{E}(X)-10\\&=2\times40-10\\&=70\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(2X-10)&=4\mathrm{V}(X)\\&=4\times20\\&=80\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(2X-10)+\mathrm{V}(2X-10)&=70+80\\&=150\end{aligned}$$

답 150

Level 3 실력 완성

본문 82쪽

1 161 **2** ③ **3** ② **4** 152

1 확률변수 X가 취하는 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6이고 수학적 확률과 여사건의 확률을 이용하여 각각의 확률을 구하면

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}-\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{3}{36}$$

$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}-\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{5}{36}$$

$$\mathrm{P}(X=4)=\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}-\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{7}{36}$$

$$\mathrm{P}(X=5)=\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}-\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{9}{36}$$

$$\mathrm{P}(X=6)=1-\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{11}{36}$$

이때 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	6	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	1

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=1\times\frac{1}{36}+2\times\frac{3}{36}+3\times\frac{5}{36}+4\times\frac{7}{36}+5\times\frac{9}{36}\\&\quad+6\times\frac{11}{36}\\&=\frac{161}{36}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(36X)&=36\mathrm{E}(X)\\&=36\times\frac{161}{36}\\&=161\end{aligned}$$

답 161

2 $b+a+2a=1$에서 $b=1-3a$이고

$a\geq 0$, $b\geq 0$이므로

$a\geq 0$, $1-3a\geq 0$

$0\leq a\leq \frac{1}{3}$ …… ㉠

$\mathrm{E}(X)=0\times b+1\times a+2\times 2a$

$=5a$

$\mathrm{V}(X)=0^2\times b+1^2\times a+2^2\times 2a-(5a)^2$

$=-25a^2+9a$

$=-25\left(a-\frac{9}{50}\right)^2+\frac{81}{100}$

㉠에서 $0\leq a\leq \frac{1}{3}$이므로

$a=\frac{9}{50}$일 때 $\mathrm{V}(X)$의 최댓값은 $\frac{81}{100}$이다.

따라서 $\alpha=\frac{9}{50}$, $\beta=\frac{81}{100}$이므로

$\alpha+\beta=\frac{99}{100}$

답 ③

3 전체 공의 개수는

$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

이므로

$\mathrm{P}(X=k)=\frac{(k\text{가 쓰여진 공의 개수})}{(\text{전체 공의 개수})}$

$=\frac{2k}{n(n+1)}\ (k=1, 2, 3, \cdots, n)$

$\mathrm{V}(X)=\sum_{k=1}^{n} k^2\mathrm{P}(X=k)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

이므로

$\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2=\sum_{k=1}^{n} k^2\mathrm{P}(X=k)$

$=\sum_{k=1}^{n}\left\{k^2\times\frac{2k}{n(n+1)}\right\}$

$=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} k^3$

$=\frac{2}{n(n+1)}\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

$=\frac{n(n+1)}{2}$

$=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$이므로

$ab=\frac{1}{4}$

답 ②

4 확률변수 X가 가지는 값은 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열을 이루므로 확률변수 Y를 $X=3Y+2$, 즉

$Y=\frac{X-2}{3}$로 놓으면 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(20, \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

이때

$\mathrm{E}(Y)=20\times\frac{1}{4}=5$

$\mathrm{V}(Y)=20\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{15}{4}$

따라서

$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(3Y+2)$

$=3\mathrm{E}(Y)+2$

$=3\times 5+2$

$=17$

$\mathrm{V}(2X)=4\mathrm{V}(X)=4\mathrm{V}(3Y+2)$

$=4\times 9\times \mathrm{V}(Y)$

$=4\times 9\times\frac{15}{4}$

$=135$

이므로

$\mathrm{E}(X)+\mathrm{V}(2X)=17+135$

$=152$

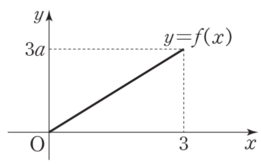
답 152

07 정규분포

유제 본문 85~91쪽

1 ⑤ **2** ④ **3** ② **4** 27 **5** 49
6 ③ **7** ③

1 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f(x)$가 확률밀도함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

즉, $\frac{1}{2}\times3\times3a=1$에서

$a=\frac{2}{9}$

따라서 $\mathrm{P}(0\le X\le 1)=\frac{1}{2}\times1\times\frac{2}{9}=\frac{1}{9}$이므로

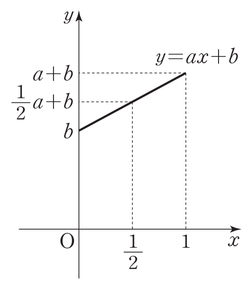
$\mathrm{P}(1\le X\le 3)=1-\mathrm{P}(0\le X\le 1)$

$=1-\frac{1}{9}$

$=\frac{8}{9}$

답 ⑤

2 $a>0$, $b>0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f(x)$가 확률밀도함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

즉, $\frac{1}{2}\times\{b+(a+b)\}\times1=1$에서

$a+2b=2$ …… ㉠

또

$\mathrm{P}\left(0\le X\le\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\times\left\{b+\left(\frac{1}{2}a+b\right)\right\}\times\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{8}a+\frac{1}{2}b$

$\frac{1}{8}a+\frac{1}{2}b=\frac{3}{8}$에서

$a+4b=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=\frac{1}{2}$

이므로

$a+b=1+\frac{1}{2}$

$=\frac{3}{2}$

답 ④

3 확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{P}(2a-1\le X\le 2a+3)$의 값이 최대일 때는 $2a-1$과 $2a+3$의 평균이 m일 때이다.

즉, $m=\frac{2a-1+2a+3}{2}=\frac{4a+2}{2}=2a+1$일 때이므로

$a=\frac{m-1}{2}$

답 ②

4 (i) $m<10$이므로 자연수 m의 값은 $1, 2, 3, \cdots, 9$이고, 그 개수는 9이다.

(ii) $\sigma<4$이므로 자연수 σ의 값은 $1, 2, 3$이고, 그 개수는 3이다.

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$9\times3=27$

답 27

5 $Z=\frac{X-24}{2}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

(i) $\mathrm{P}(X\ge a)=\mathrm{P}\left(\frac{X-24}{2}\ge\frac{a-24}{2}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{a-24}{2}\right)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{a-24}{2}\le Z\le 0\right)+0.5$

$=\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{24-a}{2}\right)+0.5$

$\mathrm{P}(X\ge a)=0.8413$이므로

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{24-a}{2}\right)=0.3413$

$\frac{24-a}{2}=1$에서 $a=22$

(ⅱ) $\mathrm{P}(X\le b)=\mathrm{P}\left(\frac{X-24}{2}\le \frac{b-24}{2}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z\le \frac{b-24}{2}\right)$

$=0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{b-24}{2}\right)$

$\mathrm{P}(X\le b)=0.9332$이므로

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{b-24}{2}\right)=0.4332$

$\frac{b-24}{2}=1.5$에서 $b=27$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=22$, $b=27$이므로

$a+b=22+27=49$

답 49

6 이 고등학교 학생의 하루 물 섭취량을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(1300, 100^2)$을 따르고,

$Z=\frac{X-1300}{100}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X\ge 1450)=\mathrm{P}\left(\frac{X-1300}{100}\ge \frac{1450-1300}{100}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$

$=0.5-0.4332$

$=0.0668$

답 ③

7 조건 (가)에서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(1200, p)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=1200p$

조건 (나)에서 $\mathrm{E}(X)=300$이므로

$1200p=300$에서

$p=\frac{1}{4}$

즉, 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(1200, \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$\mathrm{V}(X)=300\times\frac{3}{4}=225=15^2$

이때 1200은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(300, 15^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-300}{15}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X\ge 330)=\mathrm{P}\left(\frac{X-300}{15}\ge \frac{330-300}{15}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 2)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=0.5-0.4772$

$=0.0228$

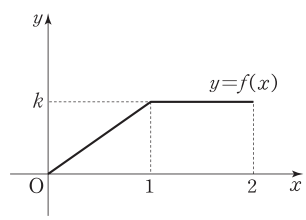
답 ③

Level 1 기초 연습

본문 92쪽

1 ③ **2** ⑤ **3** ① **4** 5 **5** ②

1 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f(x)$가 확률밀도함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

즉, $\frac{1}{2}\times1\times k+1\times k=1$

따라서 $\frac{3}{2}k=1$에서

$k=\frac{2}{3}$

답 ③

2 함수 $f(x)$가 확률밀도함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

즉, $\frac{1}{2}\times 4\times k=1$에서

$k=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 값은

$$\begin{aligned}P(|X|\le 1)&=P(-1\le X\le 1)\\&=P(-1\le X\le 0)+P(0\le X\le 1)\\&=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\times 1\\&=\frac{1}{4}+\frac{5}{12}\\&=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

답 ⑤

다른 풀이

함수 $f(x)$가 확률밀도함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

즉, $\frac{1}{2}\times 4\times k=1$에서

$k=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 값은

$$\begin{aligned}P(|X|\le 1)&=1-P(1< X\le 3)\\&=1-P(1\le X\le 3)\\&=1-\frac{1}{2}\times(3-1)\times\frac{1}{3}\\&=1-\frac{1}{3}\\&=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

3 $Z=\frac{X-40}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(32\le X\le 36)&=P\left(\frac{32-40}{4}\le\frac{X-40}{4}\le\frac{36-40}{4}\right)\\&=P(-2\le Z\le -1)\\&=P(1\le Z\le 2)\\&=P(0\le Z\le 2)-P(0\le Z\le 1)\\&=0.4772-0.3413\\&=0.1359\end{aligned}$$

답 ①

4 확률변수 X가 정규분포 $N(55, \sigma^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-55}{\sigma}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}P(X\ge 45)&=P\left(\frac{X-55}{\sigma}\ge\frac{45-55}{\sigma}\right)\\&=P\left(Z\ge\frac{-10}{\sigma}\right)\\&=P\left(\frac{-10}{\sigma}\le Z\le 0\right)+0.5\\&=P\left(0\le Z\le\frac{10}{\sigma}\right)+0.5\end{aligned}$$

이므로 $P\left(0\le Z\le\frac{10}{\sigma}\right)+0.5=0.9772$에서

$P\left(0\le Z\le\frac{10}{\sigma}\right)=0.4772$

$P(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로

$\frac{10}{\sigma}=2$

따라서 구하는 σ의 값은 5이다.

답 5

5 확률변수 X가 이항분포 $B\left(100, \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$E(X)=100\times\frac{1}{5}=20$

$V(X)=100\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=16=4^2$

이때 100은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(20, 4^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-20}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(16\le X\le 26)&=P\left(\frac{16-20}{4}\le\frac{X-20}{4}\le\frac{26-20}{4}\right)\\&=P(-1\le Z\le 1.5)\\&=P(-1\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 1.5)\\&=P(0\le Z\le 1)+P(0\le Z\le 1.5)\\&=0.3413+0.4332\\&=0.7745\end{aligned}$$

답 ②

Level 2 기본 연습

본문 93쪽

1 ② **2** 245 **3** ①

1 $f(x)$가 확률밀도함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와

x축 및 두 직선 $x=0$, $x=6$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.
조건 (가)에서 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{P}(0\le X\le 3)=\mathrm{P}(3\le X\le 6)=\frac{1}{2}$

조건 (나)에서

$\mathrm{P}(x\le X\le 3)=a-\frac{x^2}{18}$에 $x=0$을 대입하면

$\mathrm{P}(0\le X\le 3)=a$에서

$a=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 값은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(2\le X\le 5)&=\mathrm{P}(2\le X\le 3)+\mathrm{P}(3\le X\le 5)\\&=\mathrm{P}(2\le X\le 3)+\mathrm{P}(1\le X\le 3)\\&=\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{18}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{18}\right)\\&=\frac{5}{18}+\frac{8}{18}\\&=\frac{13}{18}\end{aligned}$$

답 ②

2 $\sigma(X)=\sigma(Y)$이므로 $\frac{m_1+m_2}{2}=10$에서

$m_1+m_2=20$

또, $\mathrm{P}(m_1\le X\le 10)=\mathrm{P}(10\le Y\le m_2)$ 이므로

$\mathrm{P}(m_1\le X\le 10)+\mathrm{P}(10\le Y\le m_2)$

$=2\mathrm{P}(m_1\le X\le 10)$

$2\mathrm{P}(m_1\le X\le 10)=0.9974$에서

$\mathrm{P}(m_1\le X\le 10)=0.4987$

$Z=\frac{X-m_1}{5}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(m_1\le X\le 10)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{m_1-m_1}{5}\le \frac{X-m_1}{5}\le \frac{10-m_1}{5}\right)$

$=\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{10-m_1}{5}\right)$

$=0.4987$

$\mathrm{P}(0\le Z\le 3)=0.4987$이므로

$\frac{10-m_1}{5}=3$

$m_1=-5$

$m_1+m_2=20$이므로

$m_2=25$

따라서 구하는 값은

$$\begin{aligned}m_1+10m_2&=-5+10\times 25\\&=245\end{aligned}$$

답 245

3 이 자격시험의 시험 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(100, 20^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-100}{20}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.
갑이 1급 자격을 얻는 사건을 A, 갑의 시험 점수가 130점 이상인 사건을 B라 하면 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$이다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A)&=\mathrm{P}(X\ge 128)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{X-100}{20}\ge \frac{128-100}{20}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 1.4)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.4)\\&=0.5-0.4192\\&=0.0808\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(X\ge 130)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{X-100}{20}\ge \frac{130-100}{20}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5-0.4332\\&=0.0668\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B|A)&=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}\\&=\frac{0.0668}{0.0808}\\&=\frac{167}{202}\end{aligned}$$

답 ①

Level 3 실력 완성

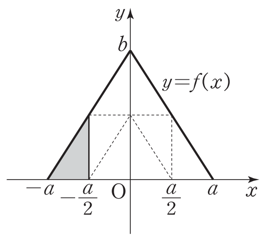
본문 94쪽

1 13 **2** ⑤ **3** ③

1 $f(x)$ 가 확률밀도함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

즉, $\frac{1}{2}\times 2a\times b=1$에서

$ab=1$ $\cdots\cdots$ ㉠



또, $\mathrm{P}(-a\le X\le a-b)=\frac{1}{8}$이므로 위의 그림에서

$a-b=-\frac{a}{2}$

즉, $3a-2b=0$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠에서 $b=\frac{1}{a}$이고, 이것을 ㉡에 대입하면

$3a-\frac{2}{a}=0$

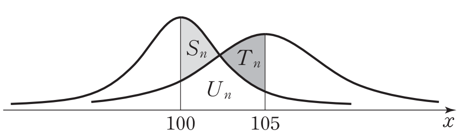
$3a^2-2=0$

따라서 $a^2=\frac{2}{3}$, $b^2=\frac{1}{a^2}=\frac{3}{2}$이므로

$$6(a^2+b^2)=6\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{2}\right)$$
$$=4+9$$
$$=13$$

답 13

2



위의 그림과 같이 두 확률변수 X, Y의 정규분포곡선과 x축 및 두 직선 $x=100$, $x=105$로 둘러싸인 부분에서 S_n, T_n을 제외한 부분의 넓이를 U_n이라 하자.

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(100,\ n^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-100}{n}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(100\le X\le 105)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{100-100}{n}\le\frac{X-100}{n}\le\frac{105-100}{n}\right)$

$=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{5}{n}\right)$

이므로

$S_n+U_n=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{5}{n}\right)$ $\cdots\cdots$ ㉠

또, 확률변수 Y가 정규분포 $\mathrm{N}(105,\ (n+1)^2)$을 따르므로

$Z=\frac{Y-105}{n+1}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(100\le Y\le 105)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{100-105}{n+1}\le\frac{Y-105}{n+1}\le\frac{105-105}{n+1}\right)$

$=\mathrm{P}\left(-\frac{5}{n+1}\le Z\le 0\right)$

$=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{5}{n+1}\right)$

이므로

$T_n+U_n=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{5}{n+1}\right)$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠−㉡에서

$$S_n-T_n=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{5}{n}\right)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{5}{n+1}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{5}{n+1}\le Z\le\frac{5}{n}\right)$$

$\sum_{n=1}^{10}(S_n-T_n)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{5}{2}\le Z\le\frac{5}{1}\right)+\mathrm{P}\left(\frac{5}{3}\le Z\le\frac{5}{2}\right)+\mathrm{P}\left(\frac{5}{4}\le Z\le\frac{5}{3}\right)$
$+\cdots+\mathrm{P}\left(\frac{5}{11}\le Z\le\frac{5}{10}\right)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{5}{11}\le Z\le\frac{5}{10}\right)+\mathrm{P}\left(\frac{5}{10}\le Z\le\frac{5}{9}\right)+\mathrm{P}\left(\frac{5}{9}\le Z\le\frac{5}{8}\right)$
$+\cdots+\mathrm{P}\left(\frac{5}{2}\le Z\le\frac{5}{1}\right)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{5}{11}\le Z\le 5\right)$

따라서 구하는 상수 a의 값은 $\frac{5}{11}$이다.

답 ⑤

3 가위바위보를 한 번 할 때 A가 이기는 경우는 다음과 같다.

(i) A가 가위, B가 보를 낸 경우

이 경우의 확률은

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

(ii) A가 바위, B가 가위를 낸 경우

이 경우의 확률은

$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$

(iii) A가 보, B가 바위를 낸 경우

이 경우의 확률은

$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$

(i), (ii), (iii)에서 가위바위보를 한 번 할 때 A가 이길 확률은

$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$

이 시행을 n회 반복할 때, A가 이기는 횟수를 확률변수 X라 하고, A가 얻는 점수의 합을 확률변수 Y라 하자.

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{3}{8}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=n\times\frac{3}{8}=\frac{3}{8}n$

또, $Y=3X+(n-X)=2X+n$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y)&=\mathrm{E}(2X+n)\\&=2\mathrm{E}(X)+n\\&=2\times\frac{3}{8}n+n\\&=\frac{7}{4}n\end{aligned}$$

A가 얻는 점수의 합의 기댓값이 105점이므로

$\frac{7}{4}n=105$

$n=60$

즉, 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(60, \frac{3}{8}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=60\times\frac{3}{8}=\frac{45}{2}$

$\mathrm{V}(X)=60\times\frac{3}{8}\times\frac{5}{8}=\frac{225}{16}=\left(\frac{15}{4}\right)^2$

이때 60은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(\frac{45}{2}, \left(\frac{15}{4}\right)^2\right)$을 따르고, $Z=\dfrac{X-\frac{45}{2}}{\frac{15}{4}}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y\ge 120)&=\mathrm{P}(2X+60\ge 120)\\&=\mathrm{P}(X\ge 30)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{X-\frac{45}{2}}{\frac{15}{4}}\ge\frac{30-\frac{45}{2}}{\frac{15}{4}}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 2)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.5-0.4772\\&=0.0228\end{aligned}$$

답 ③

08 통계적 추정

유제 본문 97~105쪽

1 ①	**2** ①	**3** 36	**4** ⑤	**5** ④
6 400	**7** ①	**8** ③	**9** ④	

1 첫 번째 뽑은 수를 X_1, 두 번째 뽑은 수를 X_2, 세 번째 뽑은 수를 X_3이라 하면

$\overline{X}=\dfrac{X_1+X_2+X_3}{3}$

$\overline{X}$의 최댓값이 1이므로

$\mathrm{P}(\overline{X}\geq 1)=\mathrm{P}(\overline{X}=1)$

$\overline{X}=1$인 경우는 $X_1=X_2=X_3=1$인 경우뿐이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\geq 1)&=\mathrm{P}(\overline{X}=1)\\&=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\\&=\frac{1}{64}\end{aligned}$$

답 ①

2 모집단의 확률분포에서 확률의 총합이 1이므로

$a+a+b=1$에서

$2a+b=1$ …… ㉠

한편, 첫 번째 뽑은 수를 X_1, 두 번째 뽑은 수를 X_2라 하면

$\overline{X}=\dfrac{X_1+X_2}{2}$

$\overline{X}=4$인 경우 $X_1+X_2=8$을 만족시키는 X_1, X_2의 순서쌍 (X_1, X_2)는 $(3, 5)$, $(5, 3)$이므로

$\mathrm{P}(\overline{X}=4)=a\times b+b\times a=2ab$

$2ab=\dfrac{1}{4}$에서

$ab=\dfrac{1}{8}$ …… ㉡

㉠에서 $b=1-2a$를 ㉡에 대입하면

$a(1-2a)=\dfrac{1}{8}$

$16a^2-8a+1=0$

$(4a-1)^2=0$

따라서 $a=\dfrac{1}{4}$, $b=\dfrac{1}{2}$이므로

$a-b=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{4}$

답 ①

3 이 공장에서 생산하는 제품의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(100, 9^2)$을 따른다.

제품 중에서 n개를 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하면

$\mathrm{E}(\overline{X})=100$,

$\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{9^2}{n}=\left(\dfrac{9}{\sqrt{n}}\right)^2$

이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(100, \left(\dfrac{9}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따르고, $Z=\dfrac{\overline{X}-100}{\frac{9}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\geq 97)&=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-100}{\frac{9}{\sqrt{n}}}\geq\frac{97-100}{\frac{9}{\sqrt{n}}}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\geq-\frac{\sqrt{n}}{3}\right)\\&=\mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{n}}{3}\leq Z\leq 0\right)+0.5\\&=\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{\sqrt{n}}{3}\right)+0.5\\&=0.9772\end{aligned}$$

이므로

$\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\dfrac{\sqrt{n}}{3}\right)=0.4772$

$\dfrac{\sqrt{n}}{3}=2$에서

$\sqrt{n}=6$

따라서 구하는 자연수 n의 값은 36이다.

답 36

4 관광객 1명이 체류기간 동안 지출한 금액을 확률변수 Y라 하면 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(500, 10^2)$을 따른다.

관광객 중 임의로 택한 4명이 체류기간 동안 지출한 금액의 평균을 확률변수 $\overline{Y}$라 하면

$\mathrm{E}(\overline{Y})=\mathrm{E}(Y)=500$, $\mathrm{V}(\overline{Y})=\dfrac{\mathrm{V}(Y)}{4}=\dfrac{100}{4}=25=5^2$

이므로 확률변수 $\overline{Y}$는 정규분포 $\mathrm{N}(500, 5^2)$을 따르고,

$Z=\dfrac{\overline{Y}-500}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\overline{Y}=\dfrac{X}{4}$이므로

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X\ge 1940) &= \mathrm{P}(4\overline{Y}\ge 1940) \\ &= \mathrm{P}(\overline{Y}\ge 485) \\ &= \mathrm{P}\left(\frac{\overline{Y}-500}{5}\ge \frac{485-500}{5}\right) \\ &= \mathrm{P}(Z\ge -3) \\ &= \mathrm{P}(-3\le Z\le 0)+0.5 \\ &= \mathrm{P}(0\le Z\le 3)+0.5 \\ &= 0.4987+0.5 \\ &= 0.9987 \end{aligned}$$

답 ⑤

5 모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$50-2.58\times\frac{10}{\sqrt{25}}\le m\le 50+2.58\times\frac{10}{\sqrt{25}}$$

$$50-2.58\times 2\le m\le 50+2.58\times 2$$

$$50-5.16\le m\le 50+5.16$$

$$44.84\le m\le 55.16$$

답 ④

6 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균의 값을 $\bar{x}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이

$$\bar{x}-1.96\times\frac{100}{\sqrt{n}}\le m\le \bar{x}+1.96\times\frac{100}{\sqrt{n}}$$

이므로

$$b-a=2\times 1.96\times\frac{100}{\sqrt{n}}$$

$2\times 1.96\times\dfrac{100}{\sqrt{n}}\le 19.6$에서

$\sqrt{n}\ge 20$

양변을 제곱하면

$n\ge 400$

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 400이다.

답 400

7 임의추출한 400명 중에서 예약시간 전에 도착하는 고객의 비율을 확률변수 $\hat{p}$이라 하면

$$\mathrm{E}(\hat{p})=\frac{90}{100}=\frac{9}{10}$$

$$\mathrm{V}(\hat{p})=\frac{\frac{90}{100}\times\frac{10}{100}}{400}=\frac{9}{40000}=\left(\frac{3}{200}\right)^2$$

이므로 확률변수 $\hat{p}$은 정규분포 $\mathrm{N}\left(\frac{9}{10}, \left(\frac{3}{200}\right)^2\right)$을 따르고,

$Z=\dfrac{\hat{p}-\frac{9}{10}}{\frac{3}{200}}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(0.885\le \hat{p}\le 0.915)$$

$$\begin{aligned} &= \mathrm{P}\left(\frac{0.885-\frac{9}{10}}{\frac{3}{200}}\le \frac{\hat{p}-\frac{9}{10}}{\frac{3}{200}}\le \frac{0.915-\frac{9}{10}}{\frac{3}{200}}\right) \\ &= \mathrm{P}(-1\le Z\le 1) \\ &= 2\mathrm{P}(0\le Z\le 1) \\ &= 2\times 0.3413 \\ &= 0.6826 \end{aligned}$$

답 ①

다른 풀이

임의추출한 400명 중에서 예약시간 전에 도착하는 고객의 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(400, \frac{9}{10}\right)$를 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=400\times\frac{9}{10}=360$$

$$\mathrm{V}(X)=400\times\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}=6^2$$

이때 400은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(360, 6^2)$을 따르고, $Z=\dfrac{X-360}{6}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$400\times 0.885=354$, $400\times 0.915=366$이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(354\le X\le 366)$$

$$\begin{aligned} &= \mathrm{P}\left(\frac{354-360}{6}\le \frac{X-360}{6}\le \frac{366-360}{6}\right) \\ &= \mathrm{P}(-1\le Z\le 1) \\ &= 2\mathrm{P}(0\le Z\le 1) \\ &= 2\times 0.3413 \\ &= 0.6826 \end{aligned}$$

8 100명을 조사하여 구한 표본비율의 값을 $\hat{p}$이라 하면

$$\hat{p}=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$$

이 드라마의 시청률 p에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\frac{1}{10}-1.96\times\sqrt{\frac{\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}}{100}}\le p\le \frac{1}{10}+1.96\times\sqrt{\frac{\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}}{100}}$$

$$\frac{1}{10}-1.96\times\frac{1}{10}\times\frac{3}{10}\le p\le\frac{1}{10}+1.96\times\frac{1}{10}\times\frac{3}{10}$$

$$\frac{10-5.88}{100}\le p\le\frac{10+5.88}{100}$$

$0.0412\le p\le 0.1588$

답 ③

9 크기가 25인 표본을 임의추출하여 구한 표본비율의 값을 $\hat{p}$이라 하면

$\hat{p}=\frac{1}{5}$

사건 A가 일어나는 비율 p에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이

$$\frac{1}{5}-2.58\times\sqrt{\frac{\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}}{25}}\le p\le\frac{1}{5}+2.58\times\sqrt{\frac{\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}}{25}}$$

이므로

$$c=2.58\times\sqrt{\frac{\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}}{25}}$$

$$=2.58\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}$$

$$=2.58\times\frac{8}{100}$$

$$=\frac{20.64}{100}$$

따라서 구하는 값은

$$10\hat{p}+100c=10\times\frac{1}{5}+100\times\frac{20.64}{100}$$

$$=2+20.64$$

$$=22.64$$

답 ④

Level 1 기초 연습

본문 106~107쪽

1 ③	**2** ⑤	**3** ③	**4** ②	**5** ④
6 ②	**7** ④	**8** ③		

1 첫 번째 꺼낸 공에 적힌 수를 X_1, 두 번째 꺼낸 공에 적힌 수를 X_2라 하면

$$\overline{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$$

$\overline{X}=2$, 즉 $X_1+X_2=4$인 경우를 X_1, X_2의 순서쌍 (X_1, X_2)로 나타내면 $(1, 3)$, $(3, 1)$이므로

$$\mathrm{P}(\overline{X}=2)=\frac{1}{n+1}\times\frac{n}{n+1}+\frac{n}{n+1}\times\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{2n}{(n+1)^2}$$

$$=\frac{3}{8}$$

$16n=3(n+1)^2$

$3n^2-10n+3=0$

$(3n-1)(n-3)=0$

$n=\frac{1}{3}$ 또는 $n=3$

따라서 구하는 자연수 n의 값은 3이다.

답 ③

2 모평균이 10, 모표준편차가 2, 표본의 크기가 4이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=10$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{2^2}{4}=1$

$\mathrm{E}(2\overline{X}+1)=2\mathrm{E}(\overline{X})+1=2\times10+1=21$

$\mathrm{V}(2\overline{X}+1)=2^2\mathrm{V}(\overline{X})=2^2\times1=4$

따라서 구하는 값은

$$\mathrm{E}(2\overline{X}+1)+\mathrm{V}(2\overline{X}+1)=21+4$$

$$=25$$

답 ⑤

3 주머니에서 임의로 꺼낸 1개의 공에 적힌 수를 확률변수 X라 하자.

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	3	5	7	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{4}+5\times\frac{1}{4}+7\times\frac{1}{4}$$

$$=\frac{16}{4}$$

$$=4$$

$$\mathrm{V}(X)=(1-4)^2\times\frac{1}{4}+(3-4)^2\times\frac{1}{4}+(5-4)^2\times\frac{1}{4}+(7-4)^2\times\frac{1}{4}$$

$$=\frac{20}{4}$$

$$=5$$

이므로 $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{5}$

따라서 표본의 크기가 25이므로

$\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{25}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

답 ③

4 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(30,\ 4^2)$을 따르고 표본의 크기가 4 이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=30$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{4^2}{4}=4=2^2$

확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(30,\ 2^2)$을 따르고,

$Z=\dfrac{\overline{X}-30}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 값은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\le 32)&=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-30}{2}\le\frac{32-30}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le 1)\\&=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.5+0.3413\\&=0.8413\end{aligned}$$

답 ②

5 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(100,\ 6^2)$을 따르므로

$Z=\dfrac{X-100}{6}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 112)&=\mathrm{P}\left(\frac{X-100}{6}\le\frac{112-100}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le 2)\qquad\cdots\cdots\ ㉠\end{aligned}$$

한편, $\mathrm{E}(\overline{X})=100$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{6^2}{9}=4=2^2$이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(100,\ 2^2)$을 따르고 $Z=\dfrac{\overline{X}-100}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\ge a)&=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-100}{2}\ge\frac{a-100}{2}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{a-100}{2}\right)\qquad\cdots\cdots\ ㉡\end{aligned}$$

㉠, ㉡에서

$\dfrac{a-100}{2}=-2$

따라서 구하는 상수 a의 값은 96이다.

답 ④

6 모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$\overline{x}-2.58\times\dfrac{5}{\sqrt{100}}\le m\le\overline{x}+2.58\times\dfrac{5}{\sqrt{100}}$

따라서 c의 값은

$$\begin{aligned}c&=2.58\times\frac{5}{\sqrt{100}}\\&=2.58\times\frac{1}{2}\\&=1.29\end{aligned}$$

답 ②

7 $\sigma(\hat{p})=\sqrt{\dfrac{\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}}{n}}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\dfrac{1}{\sqrt{n}}\le\dfrac{1}{16}$에서 $\sqrt{n}\ge 4\sqrt{3}$

따라서 $n\ge 48$이므로 구하는 자연수 n의 최솟값은 48이다.

답 ④

8 크기가 36인 표본을 임의추출하여 구한 표본비율의 값을 $\hat{p}$이라 하면 $\hat{p}=\dfrac{1}{10}$

모비율 p에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이

$$\frac{1}{10}-1.96\times\sqrt{\frac{\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}}{36}}\le p\le\frac{1}{10}+1.96\times\sqrt{\frac{\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}}{36}}$$

이므로

$$\begin{aligned}b-a&=2\times1.96\times\sqrt{\frac{\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}}{36}}\\&=2\times1.96\times\frac{3}{10}\times\frac{1}{6}\\&=1.96\times\frac{1}{10}=0.196\end{aligned}$$

답 ③

Level 2 기본 연습

본문 108쪽

1 ③ **2** ① **3** ③ **4** 25

1 $\mathrm{E}(X)=2\times\dfrac{1}{8}+4\times\dfrac{3}{8}+6\times\dfrac{3}{8}+8\times\dfrac{1}{8}$

$$\begin{aligned}&=\frac{40}{8}\\&=5\end{aligned}$$

$$\mathrm{V}(X)=(2-5)^2\times\frac{1}{8}+(4-5)^2\times\frac{3}{8}+(6-5)^2\times\frac{3}{8}+(8-5)^2\times\frac{1}{8}$$
$$=\frac{24}{8}$$
$$=3$$

표본의 크기가 2이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=5$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{2}=\frac{3}{2}$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$이므로

$\frac{3}{2}=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-5^2$

$\mathrm{E}(\overline{X}^2)=\frac{3}{2}+25=\frac{53}{2}$

답 ③

2 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포

$\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$$\mathrm{P}(|X-m|\le 9)=\mathrm{P}\left(\left|\frac{X-m}{\sigma}\right|\le\frac{9}{\sigma}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(|Z|\le\frac{9}{\sigma}\right)$$
$$=2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{9}{\sigma}\right)$$

$2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{9}{\sigma}\right)=0.9974$에서

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{9}{\sigma}\right)=0.4987$이므로

$\frac{9}{\sigma}=3$

$\sigma=3$

즉, 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m, 3^2)$을 따른다.

또

$$\mathrm{P}(X\le 153)=\mathrm{P}\left(\frac{X-m}{3}\le\frac{153-m}{3}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{153-m}{3}\right)$$

$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{153-m}{3}\right)=0.8413$에서

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{153-m}{3}\right)=0.3413$이므로

$\frac{153-m}{3}=1$

$m=150$

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(150, 3^2)$을 따르고, 임의추출한 통조림 9개의 무게의 평균 $\overline{X}$에 대하여

$\mathrm{E}(\overline{X})=150$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{3^2}{9}=1$

이므로 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(150, 1^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-150}{1}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포

$\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(\overline{X}\ge 153)=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-150}{1}\ge\frac{153-150}{1}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\ge 3)$$
$$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 3)$$
$$=0.5-0.4987$$
$$=0.0013$$

답 ①

3 임의추출한 100명 중에서 아침식사를 거르고 등교하는 학생의 비율을 확률변수 $\hat{p}$이라 하면 구하는 확률은

$\mathrm{P}(0.07\le\hat{p}\le 0.16)$이다.

$\mathrm{E}(\hat{p})=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$,

$$\mathrm{V}(\hat{p})=\frac{\frac{10}{100}\times\frac{90}{100}}{100}=\frac{9}{10000}=\left(\frac{3}{100}\right)^2$$

이므로 확률변수 $\hat{p}$은 정규분포 $\mathrm{N}\left(\frac{1}{10}, \left(\frac{3}{100}\right)^2\right)$을 따르고,

$Z=\frac{\hat{p}-\frac{1}{10}}{\frac{3}{100}}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포

$\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(0.07\le\hat{p}\le 0.16)$

$$=\mathrm{P}\left(\frac{0.07-\frac{1}{10}}{\frac{3}{100}}\le\frac{\hat{p}-\frac{1}{10}}{\frac{3}{100}}\le\frac{0.16-\frac{1}{10}}{\frac{3}{100}}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 2)$$
$$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$$
$$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$$
$$=0.3413+0.4772$$
$$=0.8185$$

답 ③

다른 풀이

임의추출한 100명 중에서 아침식사를 거르는 학생의 수를

확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100, \frac{1}{10}\right)$을 따른다.

$\mathrm{E}(X)=100\times\frac{1}{10}=10$,

$\mathrm{V}(X)=100\times\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}=3^2$

이고, 100은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(10, 3^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-10}{3}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$100\times0.07=7$, $100\times0.16=16$이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(7\le X\le 16)&=\mathrm{P}\left(\frac{7-10}{3}\le\frac{X-10}{3}\le\frac{16-10}{3}\right)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 2)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.3413+0.4772\\&=0.8185\end{aligned}$$

4 n명을 조사하여 구한 표본비율의 값을 $\hat{p}$이라 하면

$\hat{p}=\frac{80}{100}=\frac{4}{5}$

A 제품에 만족하는 비율 p에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이

$$\frac{4}{5}-1.96\times\sqrt{\frac{\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}}{n}}\le p\le\frac{4}{5}+1.96\times\sqrt{\frac{\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}}{n}}$$

이므로

$$\begin{aligned}b-a&=2\times1.96\times\sqrt{\frac{\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}}{n}}\\&=2\times1.96\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

$\frac{4\times1.96}{5\sqrt{n}}=0.3136$에서

$\sqrt{n}=5$

따라서 구하는 자연수 n의 값은

$n=5^2=25$

답 25

Level 3 실력 완성

본문 109쪽

1 ① **2** 749 **3** 321

1 ㄱ. $\mathrm{E}(\overline{X})=m$, $\mathrm{E}(\overline{Y})=m$이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{Y})$ (참)

ㄴ. $\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{Y})=m$이고,

$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}$, $\sigma(\overline{Y})=\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$이므로

확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}\right)^2\right)$을 따르고,

확률변수 $\overline{Y}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}\right)^2\right)$을 따른다.

$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}$, $\sigma(\overline{Y})=\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$이므로

$n_1<n_2$이면 $\sigma(\overline{X})>\sigma(\overline{Y})$이다.

$\sigma(\overline{X})>\sigma(\overline{Y})$이므로 곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=g(x)$보다 중앙부분이 낮아지면서 옆으로 퍼진 모양이다.

즉, 함수 $f(x)$의 최댓값이 함수 $g(x)$의 최댓값보다 작다. (거짓)

ㄷ. Z를 표준정규분포를 따르는 확률변수라 하면

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(m\le\overline{X}\le a)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{m-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}}\le\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}}\le\frac{a-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}}\right)\\&=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}}\right)\\&=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n_1}(a-m)}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(m\le\overline{Y}\le b)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{m-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}}\le\frac{\overline{Y}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}}\le\frac{b-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}}\right)\\&=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{b-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}}\right)\\&=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n_2}(b-m)}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

$\mathrm{P}(m\le\overline{X}\le a)=\mathrm{P}(m\le\overline{Y}\le b)$이므로

$\frac{\sqrt{n_1}(a-m)}{\sigma}=\frac{\sqrt{n_2}(b-m)}{\sigma}$

$\sqrt{n_1}(a-m)=\sqrt{n_2}(b-m)$에서

$0<a-m<b-m$이므로

$\sqrt{n_1}>\sqrt{n_2}$

즉, $n_1>n_2$이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

2 $\bar{x}$를 이용하여 얻은 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\bar{x}-1.96\times\frac{1}{\sqrt{16}}\le m\le \bar{x}+1.96\times\frac{1}{\sqrt{16}}$$

즉, $\bar{x}-0.49\le m\le \bar{x}+0.49$

모평균이 7이고, 모평균이 신뢰구간에 포함되므로

$\bar{x}-0.49\le 7\le \bar{x}+0.49$에서

$6.51\le \bar{x}\le 7.49$

따라서 $M=7.49$이므로

$100M=100\times7.49=749$

답 749

3 400명을 조사하여 구한 표본비율의 값을 $\hat{p}$이라 하면

$$\hat{p}=\frac{n}{400}$$

산책로 조성을 희망하는 주민의 비율 p에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이

$$\frac{n}{400}-1.96\times\sqrt{\frac{\frac{n}{400}\times\left(1-\frac{n}{400}\right)}{400}}\le p\le \frac{n}{400}+1.96\times\sqrt{\frac{\frac{n}{400}\times\left(1-\frac{n}{400}\right)}{400}}$$

이므로

$$\begin{aligned}b-a&=2\times1.96\times\sqrt{\frac{\frac{n}{400}\times\left(1-\frac{n}{400}\right)}{400}}\\&=2\times1.96\times\frac{1}{20}\times\sqrt{\frac{n}{400}\times\left(1-\frac{n}{400}\right)}\\&=0.196\times\sqrt{\frac{n}{400}\times\left(1-\frac{n}{400}\right)}\end{aligned}$$

$0.196\times\sqrt{\frac{n}{400}\times\left(1-\frac{n}{400}\right)}\ge 0.0588$에서

$$\sqrt{\frac{n}{400}\times\left(1-\frac{n}{400}\right)}\ge\frac{3}{10}$$

양변을 제곱하면

$$\frac{n}{400}\times\left(1-\frac{n}{400}\right)\ge\frac{9}{100}$$

정리하면

$n^2-400n+14400\le 0$, $(n-40)(n-360)\le 0$

$40\le n\le 360$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n의 값은 40, 41, 42, $\cdots$, 360이고 그 개수는 321이다.

답 321

MEMO

MEMO