Ⅰ_2. 중복조합과 이항정리

[12확통01-02] 중복조합을 이해하고,
중복조합의 수를 구할 수 있다.
[12확통01-03] 이항정리를 이해하고
이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.

✡ 조합(Combination) : 순서×, 중복×

⑴ 조합 : 서로 다른 n개에서 순서에 관계없이 r개를 선택하는 경우의 수 ⇨ (기호) ${}_n\mathrm{C}_r$

☑ 순서를 생각하지 않고 그 일부를 뽑기만 한다.

(순서 ×) = (순서가 일정) = (크기가 고정)

⑵ 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수

$$ {}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \quad (\text{단, } 0 \le r \le n) $$

☑ (순열) = (조합) × (나열) ⇔ ${}_n\mathrm{P}_r = {}_n\mathrm{C}_r \times r!$

⑶ $0! = 1$, ${}_n\mathrm{C}_0 = 1$, ${}_n\mathrm{C}_n = 1$, ${}_n\mathrm{C}_1 = 1$

✡ 조합의 중요 성질

(1) ${}_{n}\mathrm{C}_{r} = {}_{n}\mathrm{C}_{n-r}$ (단, $0 \le r \le n$)

☑ ${}_{n}\mathrm{C}_{r} = {}_{n}\mathrm{C}_{s} \Leftrightarrow r = s$ 또는 $r + s = n$

(2) ${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_{r} = {}_{n}\mathrm{C}_{r}$ (단, $1 \le r \le n-1$)

✡ 조건이 있는 조합의 수

(1) n(적어도 ~) $= n$(전체) $- n$(반대인 경우)

(2) 특별한 것이 반드시 포함되어야 하는 경우

⇨ 이미 뽑았다고 생각하고 나머지만을 계산

(3) n개 팀의 경기의 수

① 토너먼트(승리한 팀만 경기) ⇨ $n-1$

② 리그전(다른 팀과 한 번씩) ⇨ ${}_{n}\mathrm{C}_{2}$

✡ 직선의 개수

(1) 어느 세 점도 같은 직선 위에 있지 않은 서로 다른 n개의 점 중에서 두 개의 점을 이어서 만든 직선의 개수

⇨ ${}_{n}\mathrm{C}_{2}$

(2) 같은 직선 위에 있는 서로 다른 m개의 점 중에서 두 개의 점을 이어서 생기는 직선의 개수

⇨ 1 (∵ 점들이 있는 직선 자체)

(3) n개의 서로 다른 점 중에서 m개의 점이 같은 직선 위에, 두 개의 점을 이어서 생기는 직선의 개수

⇨ ${}_{n}\mathrm{C}_{2} - {}_{m}\mathrm{C}_{2} + 1$

(4) 볼록 n각형에서 대각선의 개수 ⇨ ${}_{n}\mathrm{C}_{2} - n$

✡ 삼각형의 개수

(1) 어느 세 점도 같은 직선 위에 있지 않은 서로 다른 n개의 점 중에서 세 개의 점을 이어서 만든 삼각형의 개수

⇨ ${}_{n}\mathrm{C}_{3}$

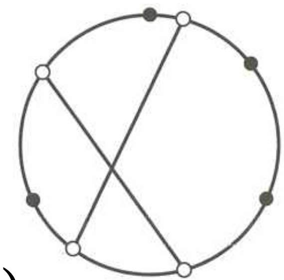
(2) 같은 직선 위에 있는 서로 다른 m개의 점 중에서 세 개의 점을 이어서 생기는 삼각형의 개수

⇨ 0

(3) n개의 서로 다른 점 중에서 m개의 점은 같은 직선 위에, 세 개의 점을 이어서 생기는 삼각형의 개수

⇨ ${}_{n}\mathrm{C}_{3}-{}_{m}\mathrm{C}_{3}$

✡ 조합의 응용 ❶



(1) 원주 위의 n개의 점에 대하여 원의 내부에서 현들이 만나서 생기는 교점의 개수

⇨ ${}_{n}\mathrm{C}_{4}$ ($\because$ 4개를 뽑아 엇갈리게 연결)

(2) 서로 다른 m개의 평행선과 서로 다른 n개의 평행선이 만날 때 평행사변형의 개수

⇨ ${}_{m}\mathrm{C}_{2}\times{}_{n}\mathrm{C}_{2}$

✡ 조합의 응용 ❷

(3) 가로선 m개, 세로선 n개에서 정사각형의 개수

① 한 변의 길이가 1 ⇨ $(m-1)\times(n-1)$

② 한 변의 길이가 2 ⇨ $(m-2)\times(n-2)$

③ 한 변의 길이가 3 ⇨ $(m-3)\times(n-3)$

④ 개수가 0이 나오기 전까지 계속하여 더한다.

(4) n개의 직선에 의하여 평면을 분할할 때,

① 최대 개수 ⇨ $2+2+3+4+\cdots+n=1+\dfrac{n(n+1)}{2}$

② 최소 개수 ⇨ $2+1+1+\cdots+1=n+1$

($\because$ 모두 평행선)

1 중복조합

(1) 중복조합의 뜻

서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 중복을 허락하여 r개를 택하는 조합을 n개에서 r개를 택하는 '중복조합'이라 하고, 이 중복조합의 수를 기호로

$${}_n\mathrm{H}_r$$

과 같이 나타낸다.

☑ ${}_n\mathrm{H}_r$의 H는 같음을 뜻하는 homogeneous의 첫 글자이다.

(2) 중복조합의 수

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수는

$${}_n\mathrm{H}_r={}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$$

☑ 문자 a, b, c 중에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 경우는 15가지이다. 이 15가지 경우를 문자가 들어갈 4개의 자리 ○와 서로 다른 문자의 사이를 구분할 2개의 막대 |를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

aaaa	aaab	aaac	aabb	aabc
○○○○||	○○○|○|	○○○||○	○○|○○|	○○|○|○
aacc	abbb	abbc	abcc	accc
○○||○○	○|○○○|	○|○○|○	○|○|○○	○||○○○
bbbb	bbbc	bbcc	bccc	cccc
|○○○○|	|○○○|○	|○○|○○	|○|○○○	||○○○○

즉, 2개의 |와 4개의 ○를 일렬로 나열한 후 왼쪽 놓인 |의 왼쪽에 ○가 있으면 그 자리에는 문자 a를, |와 |

사이에 ○가 있으면 그 자리에는 문자 b를, 오른쪽에 놓인 |의 오른쪽에 ○가 있으면 그 자리에는 문자 c를 넣으면 된다.

따라서 세 개의 문자 a, b, c 중에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 중복조합의 수 ${}_3\mathrm{H}_4$는 2개의 |와 4개의 ○를 모두 일렬로 나열하는 같은 것이 있는 순열의 수

$$\frac{6!}{2!\times 4!}=15$$

와 같다.

일반적으로 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수 ${}_n\mathrm{H}_r$은 $(n-1)$개의 |와 r개의 ○를 모두 일렬로 나열하는 같은 것이 있는 순열의 수와 같다. 또, 이 수는

$(n-1+r)$개의 자리 중에서 ○를 놓을 r개의 자리를 택하는 조합의 수와 같으므로

$$_{n}\mathrm{H}_{r}=\frac{\{(n-1)+r\}!}{(n-1)!r!}={}_{n-1+r}\mathrm{C}_{r}={}_{n+r-1}\mathrm{C}_{r}$$

이다.

예 숫자 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 5개를 택하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$_{4}\mathrm{H}_{5}={}_{4+5-1}\mathrm{C}_{5}={}_{8}\mathrm{C}_{5}={}_{8}\mathrm{C}_{3}=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$$

✡ 중복순열과 중복조합

5개의 공을 3개의 상자에 넣는 방법의 수

(단, 비어 있는 상자가 있을 수 있다.)

(1) 서로 다른 공 5개 → 서로 다른 상자 3개 : 중복순열 $_{3}\Pi_{5}$

(2) 똑같은 공 5개 → 서로 다른 상자 3개 : 중복조합 $_{3}\mathrm{H}_{5}$

(3) 서로 다른 공 5개 → 똑같은 상자 3개 : 집합의 분할

$$n(5,0,0)+n(4,1,0)+n(3,2,0)+n(3,1,1)$$
$$+n(2,2,1)={}_{5}\mathrm{C}_{5}+{}_{5}\mathrm{C}_{4}+{}_{5}\mathrm{C}_{3}+{}_{5}\mathrm{C}_{1}\times{}_{4}\mathrm{C}_{1}\div(2!)$$
$$+{}_{5}\mathrm{C}_{2}\times{}_{3}\mathrm{C}_{2}\div(2!)=1+5+10+10+15=41$$

(4) 똑같은 공 5개 → 똑같은 상자 3개 : 자연수의 분할

$$n\{(5,0,0),(4,1,0),(3,2,0),(3,1,1),(2,2,1)\}=5$$

2 중복조합의 활용

(1) 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개수

방정식 $x_1+x_2+\cdots+x_n=r$ (n은 자연수, r은 음이 아닌 정수)를 만족시키는 음이 아닌 정수 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$의 모든 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$의 개수는 ${}_n\mathrm{H}_r$이다.

☑ 방정식 $x+y+z=7$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $x,\ y,\ z$의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수를 구해 보자.

예를 들어 방정식 $x+y+z=7$의 해의 하나인 $x=1$, $y=2$, $z=4$는 서로 다른 3개의 문자 $x,\ y,\ z$ 중에서 1개의 x, 2개의 y, 4개의 z를 순서를 생각하지 않고 선택하는 경우인 $xyyzzzz$와 같다고 생각할 수 있다.

같은 방법으로 생각하면 주어진 방정식의 모든 해의 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는 서로 다른 3개의 문자 $x,\ y,\ z$ 중에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 구하는 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는

$${}_3\mathrm{H}_7={}_{3+7-1}\mathrm{C}_7={}_9\mathrm{C}_7={}_9\mathrm{C}_2=\frac{9\times 8}{2\times 1}=36$$

일반적으로 방정식 $x_1+x_2+\cdots+x_n=r$ (n은 자연수, r은 음이 아닌 정수)를 만족시키는 음이 아닌 정수 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$의 모든 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$의 개수는 서로 다른 n개의 문자 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ 중에서 r개를 택하는 중복조합의 수 ${}_n\mathrm{H}_r$과 같다.

☑ n 이상의 자연수 r에 대하여 방정식 $x_1+x_2+\cdots+x_n=r$을 만족시키는 자연수 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$의 모든 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$의 개수는 다음과 같이 구한다.

$$x_1=x_1{}'+1,\ x_2=x_2{}'+1,\ \cdots,\ x_n=x_n{}'+1$$

로 놓으면 $x_1{}',\ x_2{}',\ \cdots,\ x_n{}'$은 음이 아닌 정수이다. 방정식 $x_1+x_2+\cdots+x_n=r$을 만족시키는 자연수 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$의 모든 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$의 개수는 방정식 $x_1{}'+x_2{}'+\cdots+x_n{}'=r-n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $x_1{}',\ x_2{}',\ \cdots,\ x_n{}'$의 모든 순서쌍 $(x_1{}',\ x_2{}',\ \cdots,\ x_n{}')$의 개수와 같으므로 ${}_n\mathrm{H}_{r-n}$이다.

(2) 조건을 만족시키는 함수의 개수

실수 전체의 집합의 공집합이 아닌 두 부분집합 $X,\ Y$의 원소의 개수가 각각 $m,\ n$일 때, 집합 X에서 집합 Y로의 함수 중에서 '집합 X의 임의의 두 원소 $a,\ b$에 대하여 $a<b$이면 $f(a)\le f(b)$이다'를 만족하는 함수 f의 개수는

$${}_n\mathrm{H}_m$$

이다.

☑ 위의 조건을 만족시키는 함수는 집합 Y의 원소 n개에서 중복을 허락하여 m개를 택하여 집합 X의 원소에 크지 않은 수부터 크기순으로 대응시키면 되므로 구하는 함수의 개수는 서로 다른 n개에서 m개를 택하는 중복조합의 수인 ${}_n\mathrm{H}_m$과 같다.

✡ **똑같은 공 5개를 상자 3개에 모두 나누어 담는 경우의 수**

(1) 똑같은 상자 3개를 모두 사용하는 경우

⇨ (1개, 1개, 3개) 또는 (1개, 2개, 2개) ∴ 2가지

(2) 똑같은 상자 3개 중에서 일부만 사용해도 되는 경우

① 상자 1개 사용 ⇨ (0개, 0개, 5개)

② 상자 2개 사용 ⇨ (0개, 1개, 4개), (0개, 2개, 3개)

③ 상자 3개 사용 ⇨ (1개, 1개, 3개), (1개, 2개, 2개)

(3) 서로 다른 상자 3개를 모두 사용하는 경우

⇨ ${}_3\mathrm{H}_2 = {}_{3+2-1}\mathrm{C}_2 = {}_4\mathrm{C}_2 = 6$

(4) 서로 다른 상자 3개 중에서 일부만 사용해도 되는 경우

⇨ ${}_3\mathrm{H}_5 = {}_{3+5-1}\mathrm{C}_5 = {}_7\mathrm{C}_5 = {}_7\mathrm{C}_2 = 21$

3 이항정리

자연수 n에 대하여 다항식 $(a+b)^n$을 전개하면

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2 a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n b^n$$

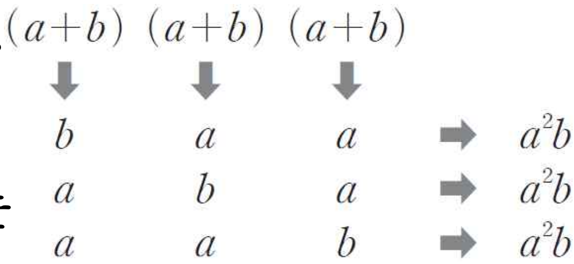
이다. 이와 같이 다항식 $(a+b)^n$을 전개하는 것을 ‘이항정리’라고 한다.

☑ 다항식 $(a+b)^3$을 전개하면

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

이때 a^2b항은 세 개의 인수 $(a+b)$ 중 어느 한 인수에서 b를 택하고, 나머지 두 인수에서 각각 a를 택하여 곱한

단항식 baa, aba, aab의 합이다.



즉, a^2b의 계수는 세 개의 인수 $(a+b)$ 중 한 개에서 b를 택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_3\mathrm{C}_1 = 3$이다.

마찬가지 방법으로 a^3, ab^2, b^3의 계수는 각각 ${}_3\mathrm{C}_0$, ${}_3\mathrm{C}_2$, ${}_3\mathrm{C}_3$임을 알 수 있다. 따라서 $(a+b)^3$의 전개식을 조합의 수를 이용하여 나타내면

$$(a+b)^3 = {}_3\mathrm{C}_0 a^3 + {}_3\mathrm{C}_1 a^2 b + {}_3\mathrm{C}_2 ab^2 + {}_3\mathrm{C}_3 b^3$$

이다. 일반적으로 자연수 n에 대하여 다항식

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\times \cdots \times (a+b)}_{n\text{개}}$$

의 전개식에서 $a^{n-r}b^r$항은 n개의 인수 $(a+b)$ 중 r개의 인수에서 b를 택하고, 나머지 $(n-r)$개의 인수에서 a를 택하여 곱한 것이므로 $a^{n-r}b^r$의 계수는 n개의 인수 $(a+b)$ 중 r개의 인수에서 b를 택하는 조합의 수와 같다.

즉, 다항식 $(a+b)^n$의 전개식에서 $a^{n-r}b^r$의 계수는 ${}_n\mathrm{C}_r$과 같다. 따라서 다항식 $(a+b)^n$의 전개식은

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2 a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n b^n$$

☑ ${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}$이므로 다항식 $(a+b)^n$의 전개식에서 $a^{n-r}b^r$의 계수와 $a^r b^{n-r}$의 계수는 같다.

4 이항계수

다항식 $(a+b)^n$의 전개식에서 각 항의 계수

$${}_n\mathrm{C}_0,\ {}_n\mathrm{C}_1,\ {}_n\mathrm{C}_2,\ \cdots,\ {}_n\mathrm{C}_r,\ \cdots,\ {}_n\mathrm{C}_n$$

을 '이항계수'라 하고, ${}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r$ $(r=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$을 '일반항'이라고 한다.

예 다항식 $(3x+y)^5$의 전개식의 일반항을 이용하여 x^2y^2의 계수를 구해 보자. 다항식 $(3x+y)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_5\mathrm{C}_r(3x)^{5-r}y^r={}_5\mathrm{C}_r\times 3^{5-r}\times x^{5-r}\times y^r$$
$$(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$$

이므로 $r=3$일 때 x^2y^2의 계수는 ${}_5\mathrm{C}_3\times 3^2=90$

5 이항계수의 성질

모든 자연수 n에 대하여 다음이 성립한다.

(1) ${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_3+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=2^n$

(2) ${}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-{}_n\mathrm{C}_3+\cdots+(-1)^n{}_n\mathrm{C}_n=0$

(3) n이 홀수일 때, ${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_4+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}$

$$={}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_3+{}_n\mathrm{C}_5+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=2^{n-1}$$

n이 짝수일 때, ${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_4+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n$

$$={}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_3+{}_n\mathrm{C}_5+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}=2^{n-1}$$

☑ 이항정리를 이용하여 다항식 $(1+x)^n$을 전개하면

$$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 x + {}_nC_2 x^2 + {}_nC_3 x^3 + \cdots + {}_nC_n x^n \quad \cdots ㉠$$

(1) ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$2^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \cdots + {}_nC_n \quad \cdots ㉡$$

(2) ㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$$0 = {}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - {}_nC_3 + \cdots + (-1)^n {}_nC_n \quad \cdots ㉢$$

(3) n이 홀수일 때, $\frac{1}{2}$(㉡ + ㉢)을 하면

$$2^{n-1} = {}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + \cdots + {}_nC_{n-1}$$

n이 홀수일 때, $\frac{1}{2}$(㉡ − ㉢)을 하면

$$2^{n-1} = {}_nC_1 + {}_nC_3 + {}_nC_5 + \cdots + {}_nC_n$$

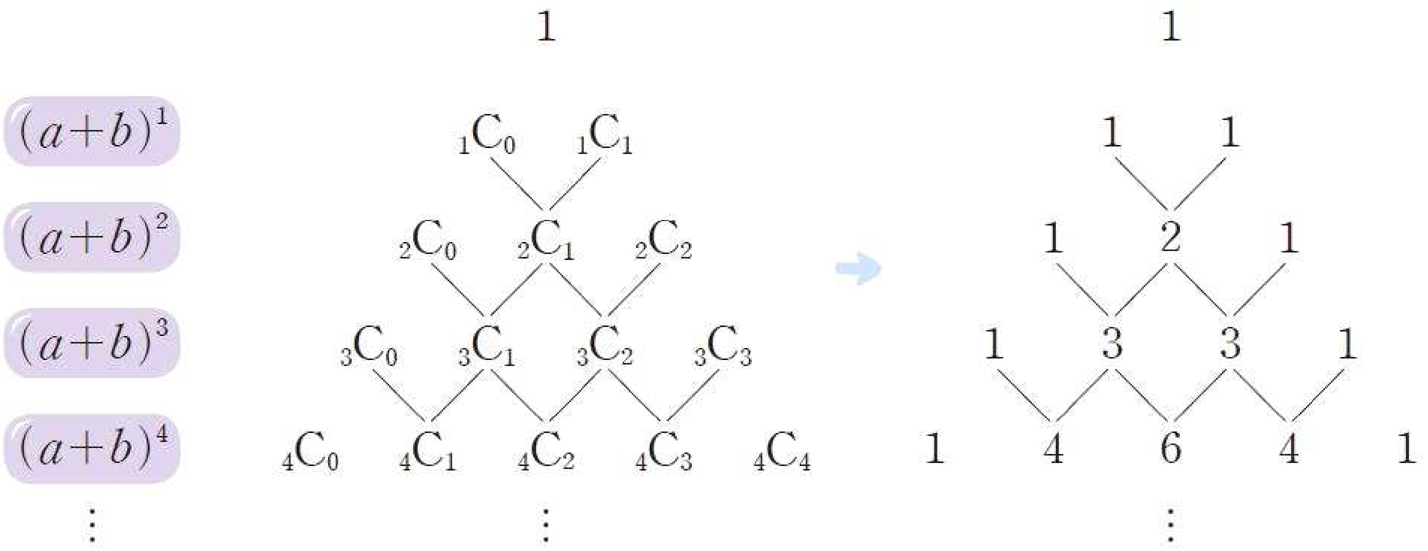
마찬가지 방법으로 n이 짝수일 때

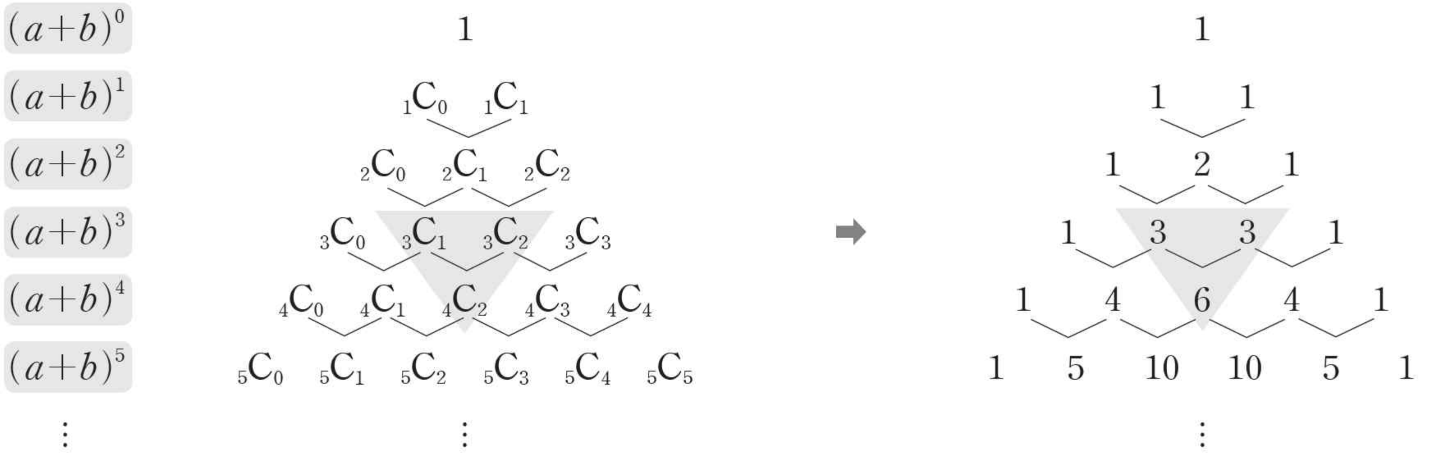
$${}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + \cdots + {}_nC_n$$

$$= {}_nC_1 + {}_nC_3 + {}_nC_5 + \cdots + {}_nC_{n-1} = 2^{n-1}$$

6 파스칼의 삼각형

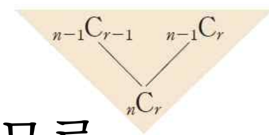
음이 아닌 정수 n에 대하여 $(a+b)^n$의 전개식에서 이항계수를 차례로 삼각형 모양으로 나열한 것을 '파스칼의 삼각형'이라고 한다.





파스칼의 삼각형에서 다음이 성립함을 알 수 있다.

(1) ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ $(0 \le r \le n)$이므로 각 단계의 이항계수의 배열은 좌우 대칭이다.



(2) ${}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r = {}_nC_r$ $(1 \le r \le n-1)$이므로 각 단계에서 이웃하는 두 수의 합은 그 두 수의 가운데의 아래쪽에 있는 다음 단계의 수와 같다.

✡ ${}_{n}\mathrm{C}_{0}+{}_{n+1}\mathrm{C}_{1}+{}_{n+2}\mathrm{C}_{2}+\cdots+{}_{n+r}\mathrm{C}_{r}={}_{n+r+1}\mathrm{C}_{r}$

예 ${}_{2}\mathrm{C}_{0}+{}_{3}\mathrm{C}_{1}+{}_{4}\mathrm{C}_{2}+{}_{5}\mathrm{C}_{3}+{}_{6}\mathrm{C}_{4}$의 값을 구해 보자.

${}_{2}\mathrm{C}_{0}={}_{3}\mathrm{C}_{0}=1$이므로

$$\begin{aligned}\therefore\ (\text{준식})&=\left({}_{3}\mathrm{C}_{0}+{}_{3}\mathrm{C}_{1}\right)+{}_{4}\mathrm{C}_{2}+{}_{5}\mathrm{C}_{3}+{}_{6}\mathrm{C}_{4}\\&=\left({}_{4}\mathrm{C}_{1}+{}_{4}\mathrm{C}_{2}\right)+{}_{5}\mathrm{C}_{3}+{}_{6}\mathrm{C}_{4}\\&=\left({}_{5}\mathrm{C}_{2}+{}_{5}\mathrm{C}_{3}\right)+{}_{6}\mathrm{C}_{4}\\&={}_{6}\mathrm{C}_{3}+{}_{6}\mathrm{C}_{4}={}_{7}\mathrm{C}_{4}={}_{7}\mathrm{C}_{3}=7\times5=35\end{aligned}$$

✡ ${}_{r}\mathrm{C}_{r}+{}_{r+1}\mathrm{C}_{r}+{}_{r+2}\mathrm{C}_{r}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{r}={}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1}$

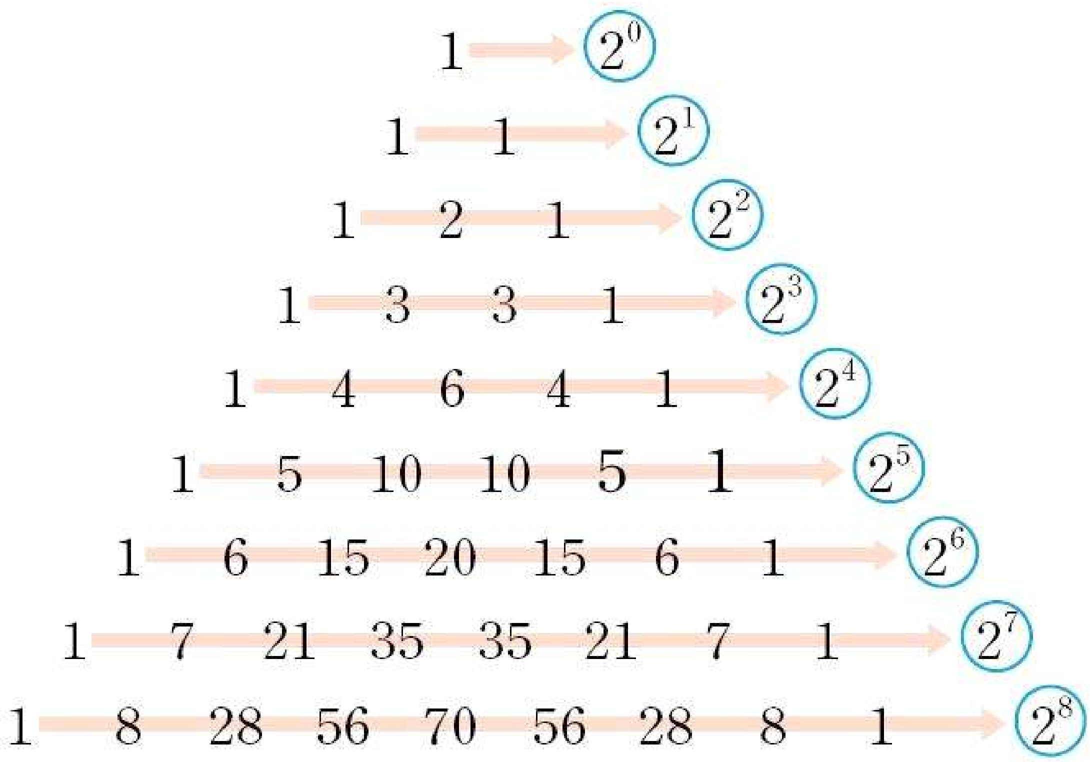
예 ${}_{2}\mathrm{C}_{2}+{}_{3}\mathrm{C}_{2}+{}_{4}\mathrm{C}_{2}+{}_{5}\mathrm{C}_{2}+{}_{6}\mathrm{C}_{2}$의 값을 구해 보자.

${}_{2}\mathrm{C}_{2}={}_{3}\mathrm{C}_{3}=1$이므로

$$\begin{aligned}\therefore\ (\text{준식})&=\left({}_{3}\mathrm{C}_{3}+{}_{3}\mathrm{C}_{2}\right)+{}_{4}\mathrm{C}_{2}+{}_{5}\mathrm{C}_{2}+{}_{6}\mathrm{C}_{2}\\&=\left({}_{4}\mathrm{C}_{3}+{}_{4}\mathrm{C}_{2}\right)+{}_{5}\mathrm{C}_{2}+{}_{6}\mathrm{C}_{2}\\&=\left({}_{5}\mathrm{C}_{3}+{}_{5}\mathrm{C}_{2}\right)+{}_{6}\mathrm{C}_{2}\\&={}_{6}\mathrm{C}_{3}+{}_{6}\mathrm{C}_{2}={}_{7}\mathrm{C}_{3}=7\times5=35\end{aligned}$$

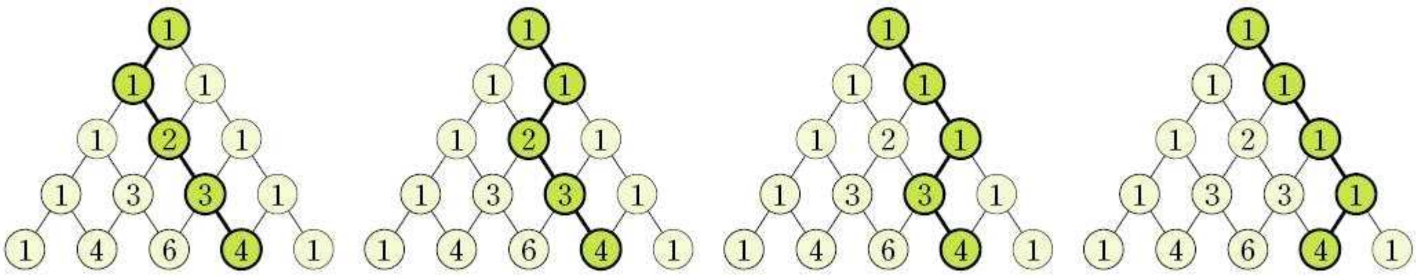
✡ 파스칼의 삼각형

(1) 행의 수의 합 : n번째 행의 수의 합은 항상 2^{n-1}

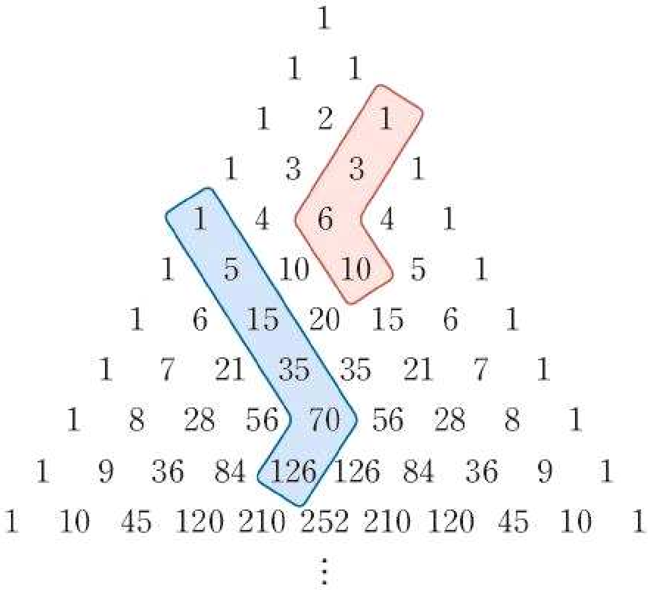


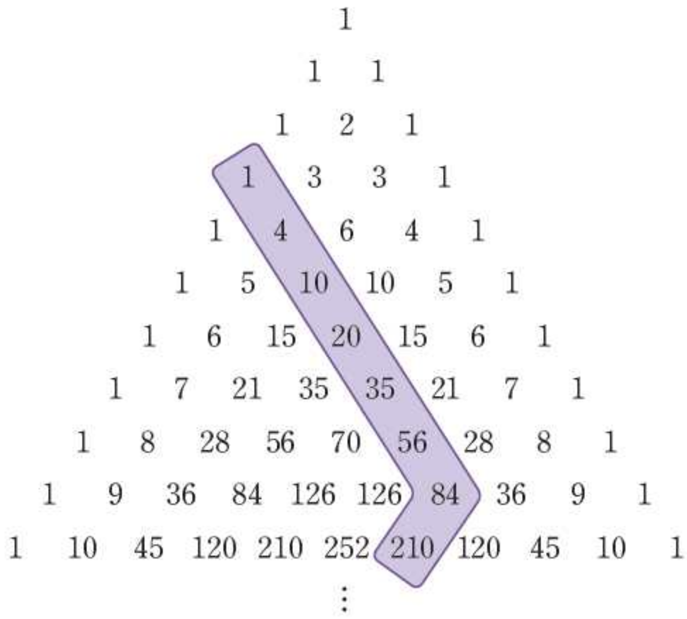
✡ 파스칼의 삼각형

(2) 첫 번째 행의 1에서 시작하여 연결된 선을 따라 어떤 숫자 n에 도달하는 최단 거리의 수는 n가지 [골턴(Galton)관]



✡ 하키 스틱 패턴


1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
⋮


1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
⋮