(1)의 결과를 이용하면 $\vec{a}\cdot\vec{b}\le|\vec{a}||\vec{b}|$이므로

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2\le(|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2$$

이때 $|\vec{a}+\vec{b}|\ge0$, $|\vec{a}|+|\vec{b}|\ge0$이므로

$$|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$$

가 성립한다. ▶ 30 %

23 문제 이해 조건 (나)로부터

$$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{c}|$$ ▶ 20 %

해결 과정 따라서

$$49=|\vec{c}|^2=|\vec{a}+\vec{b}|^2$$
$$=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$
$$=9+2\vec{a}\cdot\vec{b}+25$$

$2\vec{a}\cdot\vec{b}=15$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{15}{2}$ ▶ 40 %

두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 x°라 하면

$$\frac{15}{2}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos x^\circ=15\cos x^\circ$$

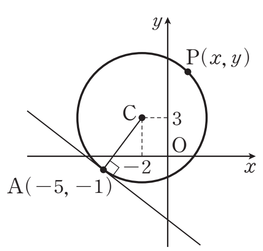
$\cos x^\circ=\frac{1}{2}$ ▶ 30 %

답 구하기 따라서 $x^\circ=60^\circ$이므로 구하는 각의 크기는 60°이다. ▶ 10 %

24 문제 이해 $|\vec{p}-\vec{c}|=5$를 성분으로 나타내면

$$(x+2)^2+(y-3)^2=5^2$$

이므로 점 P가 그리는 도형은 중심이 $\mathrm{C}(-2, 3)$이고 반지름의 길이가 5인 원이다.



▶ 40 %

해결 과정 이 원 위의 점 $\mathrm{A}(-5, -1)$에서의 접선의 법선벡터가 $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$이므로

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$
$$=(-5, -1)-(-2, 3)$$
$$=(-3, -4)$$ ▶ 30 %

답 구하기 따라서 점 $\mathrm{A}(-5, -1)$을 지나고 법선벡터가 $\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(-3, -4)$인 직선의 방정식은

$$-3(x+5)-4(y+1)=0$$

즉, $3x+4y+19=0$ ▶ 30 %

Ⅲ 공간도형과 공간좌표

1 공간도형

01 위치 관계 123 ~ 129쪽

준비하기 평행: 모서리 CD, 모서리 EF, 모서리 GH
꼬인 위치: 모서리 CG, 모서리 DH, 모서리 EH, 모서리 FG

생각 열기 ❶ 안정적으로 올려놓을 수 있다.
❷ 안정적으로 올려놓을 수 없다.

문제 1 (1), (2), (3)

문제 2 (1) 직선 CD, 직선 DE
(2) 평면 ACD, 평면 ADE, 평면 BCDE

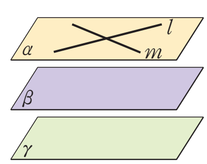
문제 3 평면 ABFE—직선 AB
평면 BCGF—직선 BC
평면 CDHG—직선 CD
평면 DAEH—직선 AD

생각 열기 ❶ 직선 n ❷ 평면 β

문제 4 $l/\!/\alpha$이므로 직선 l과 평면 α는 만나지 않는다. 이때 직선 m은 평면 α 위에 있으므로 두 직선 l과 m도 만나지 않는다. 그런데 두 직선 l과 m은 모두 한 평면 β 위에 있으므로 $l/\!/m$이다.

문제 5 $\alpha/\!/\beta$이므로 두 평면 α와 β는 만나지 않는다. 이때 직선 l은 평면 α 위에 있으므로 직선 l과 평면 β도 만나지 않는다. 따라서 $l/\!/\beta$이다.

문제 6 오른쪽 그림과 같이 평면 α 위에 있고 한 점에서 만나는 두 직선을 l, m이라 하면 $\alpha/\!/\beta$이므로



$$l/\!/\beta,\quad m/\!/\beta$$

두 직선 l, m이 평면 γ와 만난다고 가정하면 $\beta/\!/\gamma$이므로 두 직선 l, m은 평면 β와도 만난다.

이것은 $l /\!/ \beta$, $m /\!/ \beta$에 모순이므로

$$l /\!/ \gamma, \quad m /\!/ \gamma$$

두 직선 l, m은 모두 평면 α 위에 있으므로

$$\alpha /\!/ \gamma$$

생각톡톡 만나는 경우도 있다.

문제 7 (1) $90°$ (2) $60°$

생각 열기 선분 OH와 선분 AC는 서로 수직이다.

문제 8 직선 AB와 수직인 평면은 평면 AEHD, 평면 BFGC이다.

$\overline{AB} \perp \overline{AD}$, $\overline{AB} \perp \overline{AE}$이므로

$$\overline{AB} \perp (\text{평면 AEHD})$$

$\overline{AB} \perp \overline{BC}$, $\overline{AB} \perp \overline{BF}$이므로

$$\overline{AB} \perp (\text{평면 BFGC})$$

문제 9 사각형 ABCD는 정사각형이므로

$$\overline{AC} \perp \overline{BD} \quad \cdots\cdots ①$$

또, $\overline{BF} /\!/ \overline{AE}$, $\overline{AC} \perp \overline{AE}$이므로

$$\overline{AC} \perp \overline{BF} \quad \cdots\cdots ②$$

①, ②에서

$$\overline{AC} \perp (\text{평면 BFHD})$$

02 삼수선의 정리 130 ~ 132쪽

준비하기 모서리 BC, 모서리 BD, 모서리 CD

생각 열기 $90°$

문제 1 [삼수선의 정리 ❷]

$\overline{PO} \perp \alpha$이고, 직선 l은 평면 α에 포함되므로

$$\overline{PO} \perp l$$

이때 $\overline{PH} \perp l$이므로 $(\text{평면 PHO}) \perp l$

직선 OH는 평면 PHO에 포함되므로 $\overline{OH} \perp l$

[삼수선의 정리 ❸]

$\overline{PH} \perp l$, $\overline{OH} \perp l$이므로 $(\text{평면 PHO}) \perp l$

직선 PO는 평면 PHO에 포함되므로 $\overline{PO} \perp l$

이때 $\overline{PO} \perp \overline{OH}$이므로 $\overline{PO} \perp \alpha$

문제 2 $\dfrac{2\sqrt{61}}{5}$ **문제 3** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

생각 넓히기 건물의 꼭대기 C에서 건물에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{HB} \perp \overline{AB}$이므로 삼수선의 정리 ❶에 의하여

$$\overline{CB} \perp \overline{AB}$$

$\triangle$CBA는 직각삼각형이므로

$$\overline{CB} = 30 \times \tan 60° = 30\sqrt{3}$$

$\triangle$CBH에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{CH} = \sqrt{\overline{CB}^2 - \overline{HB}^2} = \sqrt{(30\sqrt{3})^2 - 30^2}$$
$$= 30\sqrt{2}$$

따라서 건물의 높이는 $30\sqrt{2}$ m이다.

03 정사영 133 ~ 136쪽

준비하기 2

생각 열기 원, 타원, 선분

문제 1 (1) 선분 EF (2) 삼각형 EFG

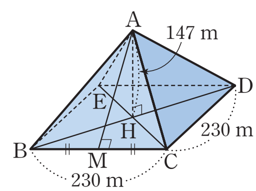
함께하기 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OB}$, $\overline{OA}$, $\overline{AB}$

생각톡톡 $\overline{AB}$의 길이와 같다.

문제 2 (1) $4\sqrt{3}$ (2) $\dfrac{3}{4}$

문제 3 $8\sqrt{3}$ **문제 4** $4\sqrt{2}\pi$

생각 넓히기 ❶ 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 사각형 BCDE에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle$BCH는 $\triangle$ABC의 평면 BCDE로의 정사영이므로



$$\triangle\text{BCH} = \frac{1}{4}\square\text{BCDE} = \frac{1}{4} \times 230^2$$
$$= 13225(\text{m}^2)$$

❷ $\overline{BC}$의 중점을 M이라 하면

$\overline{AM} = \sqrt{147^2 + 115^2} = \sqrt{34834}$이므로

$\overline{AM}$의 길이는 약 186.64 m이다.

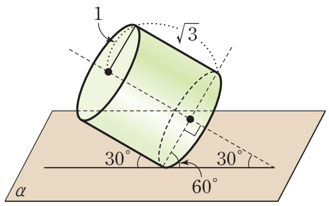
$\triangle$ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 230 \times 186.64 = 21463.6(\text{m}^2)$$

따라서 $\cos x° = \dfrac{13225}{21463.6}$이므로 $\cos x°$의 값을 소수점 아래 셋째 자리에서 반올림하면 0.62이다.

탐구 & 융합 137쪽

다음 그림과 같이 원기둥의 정사영은 밑면과 옆면이 평면과 이루는 각의 크기가 각각 다르므로 밑면의 정사영의 넓이와 옆면의 정사영의 넓이를 합해야 한다.



원기둥의 밑면이 평면 α와 이루는 각의 크기가 60°이므로 두 밑면이 이루는 정사영의 넓이의 합은

$$1^2\times\pi\times\cos 60^\circ=\frac{\pi}{2}$$

원기둥의 옆면이 평면 α와 이루는 각의 크기가 30°이므로 옆면의 정사영의 넓이는

$$2\times\sqrt{3}\times\cos 30^\circ=2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$$

따라서 구하는 원기둥의 그림자의 넓이는 $\dfrac{\pi}{2}+3$

Ⅲ-1 중단원 마무리하기 138~141쪽

01 2

02 (1) l (2) $\overline{\mathrm{OB}}$

03 (1) 90° (2) 60°

04 $6\sqrt{3}$

05 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

06 4

07 ㄷ

08 $4\sqrt{2}$

09 7

10 문제 이해 $\overline{\mathrm{DH}}\perp$(면 EFGH), $\overline{\mathrm{DI}}\perp\overline{\mathrm{MG}}$이므로 삼수선의 정리 ②에 의하여

$\overline{\mathrm{HI}}\perp\overline{\mathrm{MG}}$ ▶ 30 %

해결 과정 직각삼각형 MFG에서

$\overline{\mathrm{MG}}=\sqrt{5^2+10^2}=5\sqrt{5}$ ▶ 20 %

이때

$$\triangle\mathrm{MGH}=\frac{1}{2}\times10\times10=50$$

이므로

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{MG}}\times\overline{\mathrm{HI}}=50$$

에서 $\overline{\mathrm{HI}}=50\times2\times\dfrac{1}{5\sqrt{5}}=4\sqrt{5}$ ▶ 30 %

답 구하기 직각삼각형 DHI에서

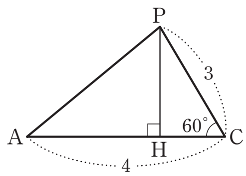
$$\overline{\mathrm{DI}}=\sqrt{\overline{\mathrm{DH}}^2+\overline{\mathrm{HI}}^2}=\sqrt{10^2+(4\sqrt{5})^2}=6\sqrt{5}$$

따라서 $\cos x^\circ=\dfrac{\overline{\mathrm{HI}}}{\overline{\mathrm{DI}}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{6\sqrt{5}}=\dfrac{2}{3}$ ▶ 20 %

11 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

12 $96\sqrt{3}\pi\ \mathrm{cm}^2$

13 삼각형 ACP의 꼭짓점 P에서 변 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{AC}}=4$, $\overline{\mathrm{CP}}=3$이고 $\angle\mathrm{ACP}=60^\circ$이므로

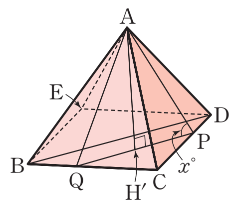


$$\overline{\mathrm{PH}}=\frac{3\sqrt{3}}{2},\quad \overline{\mathrm{CH}}=\frac{3}{2}$$

따라서 $\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{5}{2}$이므로 직각삼각형 AHP에서

$$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AH}}^2+\overline{\mathrm{PH}}^2}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{13}$$

한편, 선분 CB를 3 : 1로 내분하는 점을 Q라 하면 $\overline{\mathrm{BD}}//\overline{\mathrm{QP}}$이므로 직선 QP와 직선 AP가 이루는 각의 크기는 x°이다.



직각삼각형 PCQ에서

$\overline{\mathrm{CP}}=\overline{\mathrm{CQ}}=3$이므로 $\overline{\mathrm{QP}}=3\sqrt{2}$

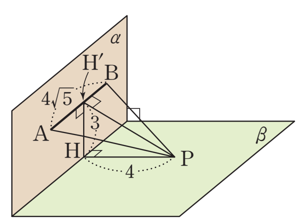
$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AQ}}=\sqrt{13}$인 이등변삼각형 AQP의 점 A에서 선분 QP에 내린 수선의 발을 H′이라 하면

$$\overline{\mathrm{PH'}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

따라서 직각삼각형 AH′P에서

$$\cos x^\circ=\frac{\overline{\mathrm{PH'}}}{\overline{\mathrm{AP}}}=\frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{13}}=\frac{3\sqrt{26}}{26}$$

14 문제 이해 다음 그림과 같이 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H, 점 H에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H′이라 하면



$\overline{PH}\perp\alpha$, $\overline{HH'}\perp$(직선 AB)

이므로 삼수선의 정리 ①에 의하여

$\overline{PH'}\perp$(직선 AB) ▶ 30 %

해결 과정 점 A와 평면 β 사이의 거리가 3이고 직선 AB가 평면 β와 평행하므로

$\overline{HH'}=3$

또, 점 P와 평면 α 사이의 거리는 4이므로

$\overline{PH}=4$

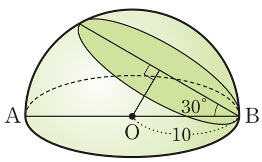
그러므로 직각삼각형 PHH′에서

$\overline{PH'}=\sqrt{\overline{PH}^2+\overline{HH'}^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$ ▶ 50 %

답 구하기 삼각형 PAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{PH'}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{5}\times5=10\sqrt{5}$ ▶ 20 %

15 반구를 주어진 조건을 만족시키는 평면으로 자를 때 생기는 단면의 반지름의 길이는



$\overline{AO}\cos30^\circ=10\times\frac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$

이므로 단면의 넓이는

$\pi\times(5\sqrt{3})^2=75\pi$

따라서 구하는 정사영의 넓이는

$75\pi\cos30^\circ=75\pi\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{75\sqrt{3}}{2}\pi$

16 $\overline{MN}$의 중점을 H, 삼각형 BCD의 무게중심을 G라 하고 $\angle AHG=x^\circ$라 하면

직각삼각형 AHN에서 $\overline{AN}=6\sqrt{3}$, $\overline{HN}=3$이므로

$\overline{AH}=\sqrt{(6\sqrt{3})^2-3^2}=3\sqrt{11}$

$\overline{GH}=6\sqrt{3}\times\frac{2}{3}-3\sqrt{3}=\sqrt{3}$

이므로 $\cos x^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{33}}{33}$

따라서 사각형 BCNM의 넓이는

$\left(\frac{1}{2}\times12\times6\sqrt{3}\right)-\left(\frac{1}{2}\times6\times3\sqrt{3}\right)$

$=36\sqrt{3}-9\sqrt{3}=27\sqrt{3}$

사각형 BCNM의 평면 AMN 위로의 정사영의 넓이는

$27\sqrt{3}\times\cos x^\circ=27\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{33}}{33}=\frac{27\sqrt{11}}{11}$

2 공간좌표

01 점의 좌표 143~147쪽

준비하기 (1) 4 (2) $\sqrt{2}$

생각 열기 ① $(1, 3, 17)$ ② 2층 1열 10번

문제 1 (1) 차례대로 $(2, 4, 3)$, $(2, 4, 0)$, $(0, 0, 3)$
(2) 차례대로 $(0, -6, 5)$, $(3, 0, 0)$, $(3, 0, 5)$

문제 2 (1) $(2, 4, 0)$ (2) $(0, 0, -1)$

함께하기 $|y_2-y_1|$, $|z_2-z_1|$, $\overline{AP}$, $\overline{AQ}$, y_2-y_1, z_2-z_1, $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

문제 3 (1) $6\sqrt{2}$ (2) 5

문제 4 (1) $\overline{AB}=\sqrt{22}$, $\overline{BC}=2\sqrt{6}$, $\overline{CA}=\sqrt{2}$
(2) $\angle A=90^\circ$인 직각삼각형

문제 5 $(0, 0, 4)$

생각톡톡 x좌표: 0, z좌표: 0

문제 6 $(3, 1, 0)$, $\left(-\frac{6}{5}, \frac{12}{5}, 0\right)$

생각 넓히기 ① $(1, 4, -5)$

② $\overline{AP}+\overline{PB}\geq\overline{A'B}$

$=\sqrt{(-1-1)^2+(2-4)^2+\{3-(-5)\}^2}$

$=6\sqrt{2}$

탐구 & 융합 148쪽

(1) (111) (2) (012)

02 선분의 내분점과 외분점 149~151쪽

준비하기 (1) $(-1, 5)$ (2) $(9, 10)$

생각 열기 2 : 1

문제 1 (1) $\left(6, -\frac{22}{5}, 1\right)$
(2) $(18, -14, -23)$
(3) $\left(\frac{11}{2}, -4, 2\right)$

함께하기 ❶ $\left(\dfrac{x_2+x_3}{2}, \dfrac{y_2+y_3}{2}, \dfrac{z_2+z_3}{2}\right)$

❷ $2:1$

❸ $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}, \dfrac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$

문제 2 $(2, -2, 3)$

생각 넓히기 ❶ 네 점 G_1, G_2, G_3, G_4의 좌표는 차례대로

$$\left(\frac{x_2+x_3+x_4}{3}, \frac{y_2+y_3+y_4}{3}, \frac{z_2+z_3+z_4}{3}\right)$$
$$\left(\frac{x_1+x_3+x_4}{3}, \frac{y_1+y_3+y_4}{3}, \frac{z_1+z_3+z_4}{3}\right)$$
$$\left(\frac{x_1+x_2+x_4}{3}, \frac{y_1+y_2+y_4}{3}, \frac{z_1+z_2+z_4}{3}\right)$$
$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

❷ $\overline{AG_1}$, $\overline{BG_2}$, $\overline{CG_3}$, $\overline{DG_4}$를 $3:1$로 내분하는 점을 각각 P_1, P_2, P_3, P_4라 하자.

점 P_1의 x좌표는

$$\frac{3\times\dfrac{x_2+x_3+x_4}{3}+1\times x_1}{3+1}=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}$$

같은 방법으로 y좌표, z좌표를 구하면 점 P_1의 좌표는

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}, \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}, \frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}\right)$$

세 점 P_2, P_3, P_4의 좌표도 점 P_1의 좌표와 같다.

❸ ❷에서 구한 네 점의 좌표가 일치한다.

03 구의 방정식 152~154쪽

준비하기 중심의 좌표: $(5, -4)$
반지름의 길이: 4

생각 열기 $r=\sqrt{(x-5)^2+(y-2)^2+(z-4)^2}$

문제 1 (1) $(x-3)^2+(y+8)^2+(z-1)^2=25$
(2) $x^2+y^2+z^2=33$

문제 2 $(x-1)^2+(y+3)^2+(z-5)^2=36$

문제 3 (1) 중심의 좌표: $(1, 0, -3)$
반지름의 길이: $\sqrt{6}$
(2) 중심의 좌표: $(-2, -3, 1)$
반지름의 길이: 3

탐구 & 융합 155쪽

(1) $(x-4)^2+(y+4)^2+(z-2)^2=4$
(2) $(x+3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=9$
(3) $(x-2)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=4$
또는 $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=4$

Ⅲ-2 중단원 마무리하기 156~159쪽

01 (1) $(3, -7, 0)$ (2) $(0, -7, 2)$ (3) $(3, 0, 2)$

02 (1) $\sqrt{51}$ (2) $2\sqrt{19}$

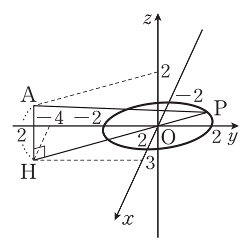
03 (1) $(5, 1, 0)$ (2) $(19, -6, 21)$ (3) $\left(4, \dfrac{3}{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$

04 9

05 (1) $(x-2)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=4$
(2) $(x-3)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=19$

06 $(-3, 0, 0)$ **07** $\sqrt{97}$

08 $A(3, -4, 2)$에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H, 원점을 O라 하면



$\overline{AH}=2$
$\overline{OH}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$

원 $x^2+y^2=4$의 반지름의 길이가 2이므로 $\overline{AP}$의 길이가 최대이려면 위의 그림과 같이 점 P는 직선 HO와 원의 교점 중 하나이어야 한다.
따라서 $\overline{AP}$의 길이의 최댓값은 $\sqrt{2^2+7^2}=\sqrt{53}$

09 해결 과정 $\overline{AB}$를 $1:2$로 내분하는 점 P가 x축 위에 있으므로 점 P의 y좌표와 z좌표는 모두 0이다. 즉,

$\dfrac{1\times b+2\times 3}{1+2}=0$에서 $b=-6$ ▶ 30 %

$\dfrac{1\times c+2\times(-3)}{1+2}=0$에서 $c=6$ ▶ 30 %

또, $\overline{AB}$를 $2:1$로 외분하는 점 Q가 yz평면 위에 있으므로 점 Q의 x좌표는 0이다. 즉,

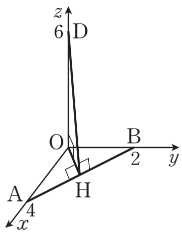
$\dfrac{2\times 6-1\times a}{2-1}=0$에서 $a=12$ ▶ 30 %

답 구하기 $a+b+c=12+(-6)+6=12$ ▶ 10 %

10 $(-6, 3, 4)$ **11** 4

12 36

13 점 D(0, 0, 6)에서 xy평면에 내린 수선의 발은 원점 O이고, 원점 O에서 두 점 A(4, 0, 0), B(0, 2, 0)을 잇는 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{OD}\perp$(면 OAB)

$\overline{OH}\perp\overline{AB}$

이므로 삼수선의 정리 ❶에 의하여 $\quad \overline{DH}\perp\overline{AB}$

즉, 점 C가 점 H의 위치에 있을 때 두 점 C와 D 사이의 거리가 최소가 된다.

$\overline{AB}=\sqrt{(0-4)^2+(2-0)^2+(0-0)^2}=2\sqrt{5}$이고,

$\overline{OA}\times\overline{OB}=\overline{AB}\times\overline{OH}$이므로

$4\times2=2\sqrt{5}\times\overline{OH}$, 즉 $\overline{OH}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

따라서 두 점 C와 D 사이의 거리의 최솟값은

$$\sqrt{\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2+6^2}=\frac{14\sqrt{5}}{5}$$

14 선분 AB를 $m:n$으로 외분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{7m-4n}{m-n},\ \frac{-6m+n}{m-n},\ \frac{-8m-3n}{m-n}\right)$$

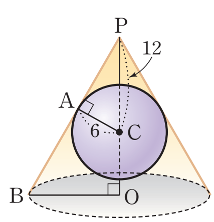
이 점이 yz평면 위에 있으므로 이 점의 x좌표는 0이다.

즉, $\dfrac{7m-4n}{m-n}=0$에서 $\quad 7m=4n$

따라서 $m=4$, $n=7$이므로 $\quad m+n=11$

15 구의 중심을 C라 하면 C(0, 0, 8)이고 구의 반지름의 길이는 6이다.

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 나온 빛이 구와 접하는 점을 A, $\overline{PA}$의 연장선이 xy평면과 만나는 점을 B라 하면



$\overline{PC}=12$, $\overline{AC}=6$이므로

$\overline{PA}=\sqrt{12^2-6^2}=6\sqrt{3}$

이때 $\triangle PAC\backsim\triangle POB$이고, $\overline{PO}=20$이므로

$\overline{PA}:\overline{PO}=\overline{AC}:\overline{OB}$에서

$6\sqrt{3}:20=6:\overline{OB}$, 즉 $\overline{OB}=\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$

따라서 구하는 그림자의 넓이는 $\dfrac{400}{3}\pi$이다.

16 해결 과정 구 S의 중심을 C(a, b, c), 반지름의 길이를 r라 하고 구 S가 x축과 y축에 접하는 점을 각각 A, B라 하면 $\quad$ A$(a, 0, 0)$, B$(0, b, 0)$

$r=\overline{AC}=\overline{BC}$이므로 $\quad r^2=b^2+c^2=a^2+c^2$

이때 $a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 $\quad a=b$

따라서 구 S의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a)^2+(z-c)^2=a^2+c^2 \quad \cdots ①$

▶ 30 %

또, 구 S가 xy평면과 만나서 생기는 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a)^2+(0-c)^2=a^2+c^2$

$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$

이 원의 넓이가 64π이므로

$a^2\pi=64\pi,\quad a^2=64,\quad a=8$ ▶ 30 %

$a=8$을 ①에 대입하면 구 S의 방정식은

$(x-8)^2+(y-8)^2+(z-c)^2=64+c^2 \quad \cdots ②$

구 S가 z축과 만나는 점의 좌표를 구하기 위해 $x=0$, $y=0$을 ②에 대입하면

$64+64+(z-c)^2=64+c^2,\quad (z-c)^2=c^2-64$

$z=c\pm\sqrt{c^2-64}$

구 S가 z축과 만나는 두 점 사이의 거리가 8이므로

$(c+\sqrt{c^2-64})-(c-\sqrt{c^2-64})=8$

에서 $\quad c^2=80$ ▶ 30 %

답 구하기 따라서 구 S의 반지름의 길이는

$r=\sqrt{a^2+c^2}=\sqrt{64+80}=\sqrt{144}=12$ ▶ 10 %

Ⅲ 대단원 **평가하기** 160 ~ 163쪽

01	④	**02**	3
03	③	**04**	60°
05	⑤	**06**	$2\sqrt{3}$
07	④	**08**	④
09	$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$	**10**	8
11	$\dfrac{2}{3}$	**12**	$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$
13	$\sqrt{7}$	**14**	7
15	$\sqrt{17}$	**16**	3
17	11	**18**	$\sqrt{14}$

19 ②　　**20** 20

21 $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-a)^2=a^2-2a+18$ ⋯ ①

(i) xy평면과 만나서 생기는 도형의 방정식을 구하기 위해 $z=0$을 ①에 대입하면

$$(x-1)^2+(y-3)^2=-2a+18$$

따라서 구가 xy평면과 만나서 생기는 도형의 넓이는

$$(-2a+18)\pi$$

(ii) yz평면과 만나서 생기는 도형의 방정식을 구하기 위해 $x=0$을 ①에 대입하면

$$(y-3)^2+(z-a)^2=a^2-2a+17$$

따라서 구가 yz평면과 만나서 생기는 도형의 넓이는

$$(a^2-2a+17)\pi$$

(iii) zx평면과 만나서 생기는 도형의 방정식을 구하기 위해 $y=0$을 ①에 대입하면

$$(x-1)^2+(z-a)^2=a^2-2a+9$$

따라서 구가 zx평면과 만나서 생기는 도형의 넓이는

$$(a^2-2a+9)\pi$$

(i)~(iii)에서 구가 xy평면, yz평면, zx평면과 만나서 생기는 도형의 넓이의 합은

$$(2a^2-6a+44)\pi=2\left\{\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{79}{4}\right\}\pi$$

즉, 구하는 넓이의 합의 최솟값은

$a=\frac{3}{2}$일 때, $\frac{79}{2}\pi$

22 (1) 정사각형 BCDE의 두 대각선의 교점을 O라 하면 삼각형 ABC의 평면 BCDE 위로의 정사영 G는 삼각형 OBC이다.

따라서 G의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times4\times2=4$$ ▶ 30 %

(2) 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times4^2=4\sqrt{3}$$

이때 G의 넓이는 4이므로

$$\cos x^\circ=\frac{4}{4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$ ▶ 40 %

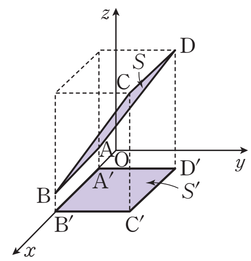
(3) 평면 BCDE와 평면 BCF가 이루는 각의 크기도 x°이므로 도형 G의 평면 BCF 위로의 정사영의 넓이는

$$4\cos x^\circ=4\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$ ▶ 30 %

23 문제 이해　다음 그림과 같이 네 점 $\mathrm{A}(1, 0, a)$, $\mathrm{B}(3, 0, a)$, $\mathrm{C}(3, 4, b)$, $\mathrm{D}(1, 4, b)$의 xy평면 위로의 정사영을 각각 A′, B′, C′, D′이라 하면

$\mathrm{A}'(1, 0, 0)$,　$\mathrm{B}'(3, 0, 0)$

$\mathrm{C}'(3, 4, 0)$,　$\mathrm{D}'(1, 4, 0)$



▶ 30 %

해결 과정　사각형 ABCD의 넓이를 S, 사각형 A′B′C′D′의 넓이를 S'이라 하면

$S'=S\cos x^\circ$에서

$$2\times4=2\times\overline{\mathrm{BC}}\times\frac{4}{7},\text{ 즉 }\overline{\mathrm{BC}}=7$$ ▶ 40 %

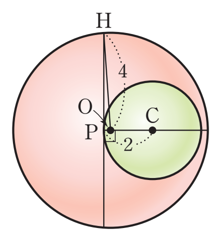
답 구하기　$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(3-3)^2+(4-0)^2+(b-a)^2}$

$=7$

에서　$(b-a)^2=33$

그런데 $b>a$이므로　$b-a=\sqrt{33}$ ▶ 30 %

24 문제 이해　구 $x^2+y^2+z^2=16$의 중심을 O, 구 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$의 중심을 $\mathrm{C}(1, 1, 1)$이라 하면 점 P에서 구 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$에 접하는 평면이 구 $x^2+y^2+z^2=16$을 자른 단면의 넓이가 최대가 되는 경우는 점 P가 다음 그림과 같은 위치에 있을 때이다.



▶ 40 %

해결 과정　평면과 구 $x^2+y^2+z^2=16$의 교점을 H라 하면 $\overline{\mathrm{OC}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{OP}}=2-\sqrt{3}$이므로

$$\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{4^2-(2-\sqrt{3})^2}=\sqrt{9+4\sqrt{3}}$$

따라서 이때의 단면은 반지름의 길이가 $\sqrt{9+4\sqrt{3}}$인 원이므로, 그 넓이는

$$(9+4\sqrt{3})\pi$$ ▶ 40 %

답 구하기　$a=9$, $b=4$이므로

$$a+b=9+4=13$$ ▶ 20 %