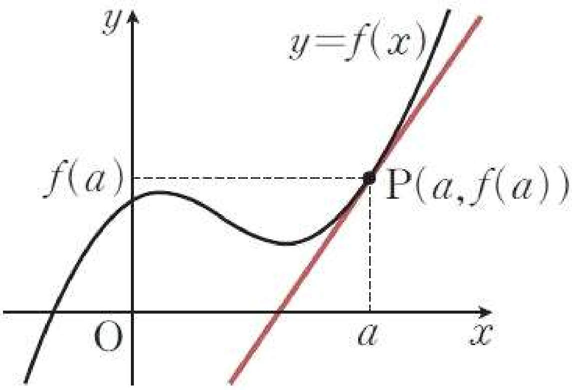
Ⅱ_3. 도함수의 활용

[12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다.
[12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
[12미적02-13] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.
[12미적02-14] 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다.

1 접선의 방정식 ❶

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$



예 곡선 $y=e^{2x}$ 위의 점 $(0, 1)$에서의 접선의 방정식을 구해 보자. $f(x)=e^{2x}$이라 하면 $f'(x)=2e^{2x}$

곡선 $y=e^{2x}$ 위의 점 $(0, 1)$에서의 접선의 기울기는

$$f'(0)=2e^0=2$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y=2(x-0)+1=2x+1$$

☑ x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ
$\Leftrightarrow f'(a)=\tan\theta$

1 접선의 방정식 ❷

☑ 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.

① 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$로 놓는다.

② $f'(t)=m$을 만족시키는 t의 값을 구한다.

③ 접선의 방정식 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$를 구한다.

예 곡선 $y=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$에 접하고 기울기가 $-\dfrac{1}{9}$인 접선의 방정식을 구해 보자. $f(x)=\dfrac{1}{x}$이라 하고 접점의 좌표를 $\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)\ (t>0)$이라 하자. $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$이므로

1 접선의 방정식 ❸

$f'(t)=-\dfrac{1}{t^2}=-\dfrac{1}{9}$에서 $t^2=9 \Rightarrow t>0$이므로 $t=3$

따라서 접점의 좌표는 $\left(3,\ \dfrac{1}{3}\right)$이므로

구하는 접선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{9}(x-3)+\frac{1}{3}=-\frac{1}{9}x+\frac{2}{3}$$

1 접선의 방정식 ❹

☑ 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위에 있지 않은 점 $(x_1,\ y_1)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.

① 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$로 놓고, 이 점에서의 접선의 방정식 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$를 구한다.

② 점 $(x_1,\ y_1)$은 이 접선 위의 점이므로 ①의 방정식에 $x=x_1,\ y=y_1$을 대입한다.

③ ②에서 실수 t의 값을 구한 후 ①에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.

1 접선의 방정식 ❺

예 원점에서 곡선 $y=\ln x$에 그은 접선의 방정식을 구해 보자.

$f(x)=\ln x$라 하고 접점의 좌표를 $(t,\ \ln t)$ $(t>0)$이라 하자. $f'(x)=\dfrac{1}{x}$이므로 곡선 위의 점 $(t,\ \ln t)$에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\dfrac{1}{t}$이고 접선의 방정식은

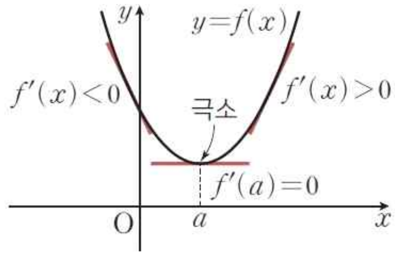
$$y=\frac{1}{t}(x-t)+\ln t=\frac{1}{t}x-1+\ln t$$

이 직선이 원점을 지나므로 $0=-1+\ln t,\ \ln t=1,\ t=e$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y=\frac{1}{e}(x-e)+\ln e=\frac{1}{e}x$$

2 함수의 극대와 극소의 판정



(1) 도함수를 이용한 극대와 극소의 판정

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

$f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가

① 양에서 음으로 바뀌면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.

② 음에서 양으로 바뀌면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

(2) 이계도함수를 이용한 극대와 극소의 판정

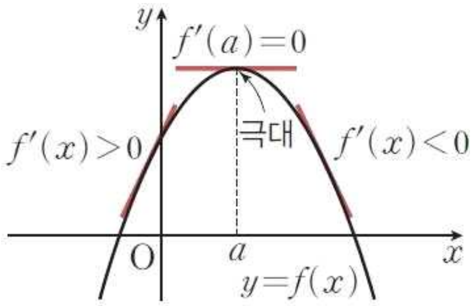
이계도함수가 존재하는 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고

① $f''(a)<0$이면

함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.

② $f''(a)>0$이면

함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

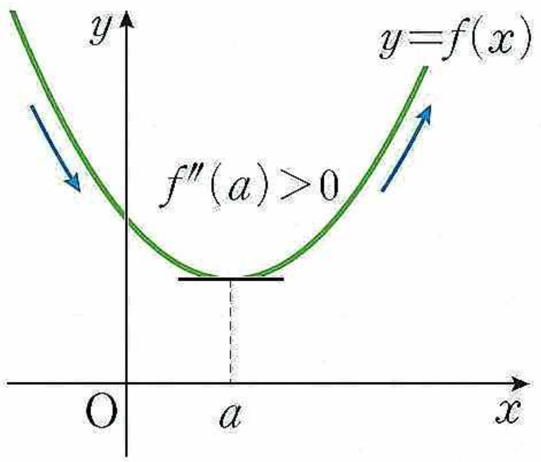


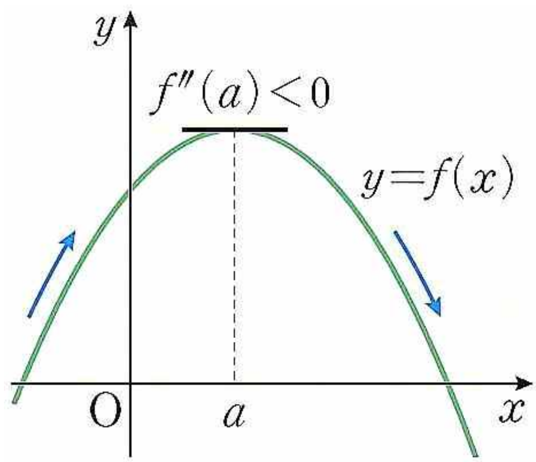
✡ 이계도함수을 이용한 함수의 극대와 극소의 판정

이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$일 때

(1) $f''(a)>0 \Rightarrow f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

☑ $f''(a)>0 \Leftrightarrow$ ⌣ 꼴





(2) $f''(a)<0 \Rightarrow f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.

☑ $f''(a)<0 \Leftrightarrow$ ⌢ 꼴

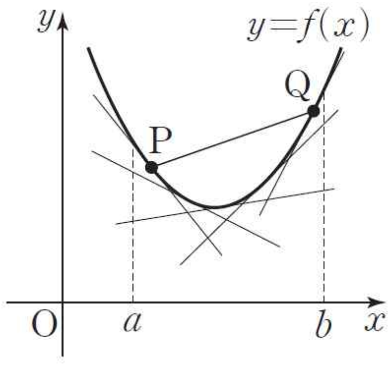
$\boxed{3}$ 곡선의 오목과 볼록 ❶

(1) 곡선의 오목과 볼록

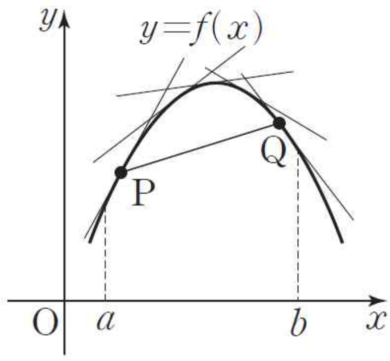
닫힌구간 $[a, b]$에서 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여 두 점 P, Q를 잇는 곡선 부분이

① 선분 PQ보다 항상 아래쪽에 있으면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 '아래로 볼록' 또는 '위로 오목'하다고 한다.

② 선분 PQ보다 항상 위쪽에 있으면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 '위로 볼록' 또는 '아래로 오목'하다고 한다.



아래로 볼록



위로 볼록

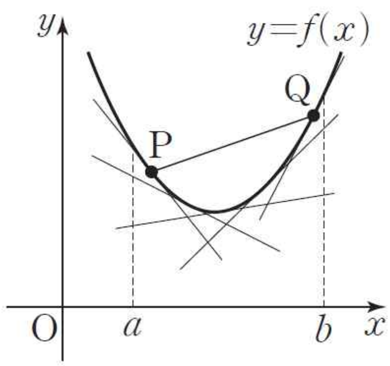
$\boxed{3}$ 곡선의 오목과 볼록 ❷

(2) 이계도함수를 이용한 곡선의 오목과 볼록의 판정

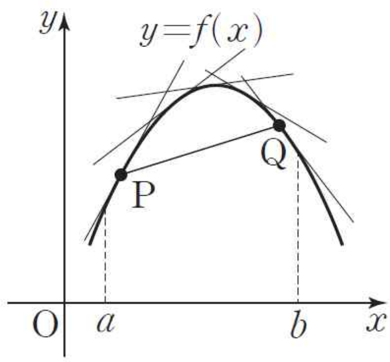
이계도함수가 존재하는 함수 $f(x)$가 어떤 구간의 모든 x에 대하여

① $f''(x)>0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록하다.

② $f''(x)<0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록하다.



아래로 볼록



위로 볼록

✡ 곡선의 오목과 볼록 ❶

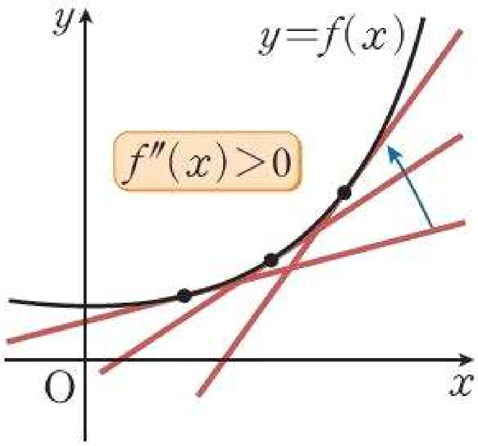
(1) $f''(x) > 0$ ⇒ 함수 $f'(x)$가 증가

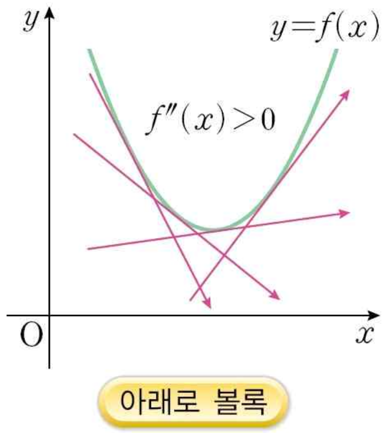
⇒ 곡선 $y = f(x)$의 접선의 기울기가 증가

⇒ 곡선 $y = f(x)$는 아래로 볼록

☑ $y = f(x)$가 아래로 볼록 ⇒ $f''(x) \geq 0$

(단, 유한개의 점에서만 $f''(x) = 0$)





✡ 곡선의 오목과 볼록 ❷

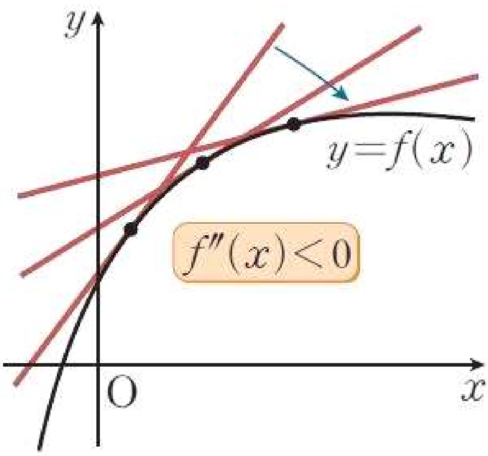
(2) $f''(x) < 0$ ⇒ 함수 $f'(x)$가 감소

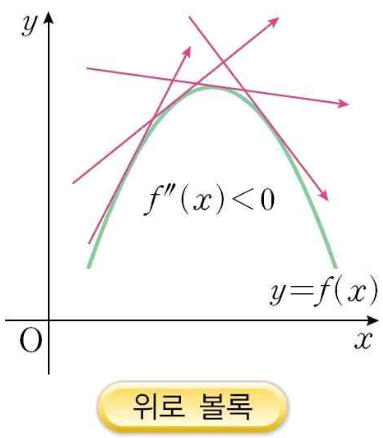
⇒ 곡선 $y = f(x)$의 접선의 기울기가 감소

⇒ 곡선 $y = f(x)$는 위로 볼록

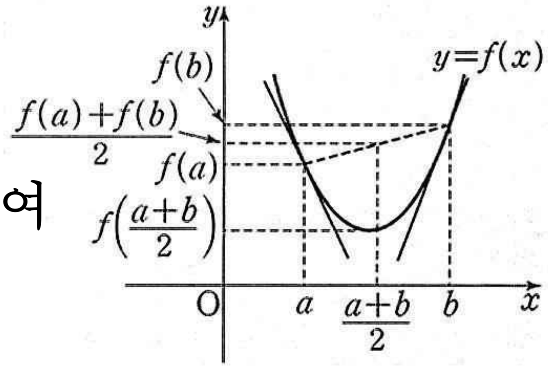
☑ $y = f(x)$가 위로 볼록 ⇒ $f''(x) \leq 0$

(단, 유한개의 점에서만 $f''(x) = 0$)





✡ 미분가능한 함수 $y=f(x)$가 아래로 볼록 ❶



(1) 임의의 두 점을 연결한 선분

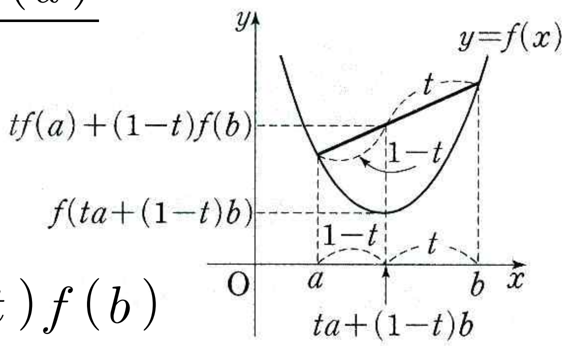
아래쪽으로만 곡선이 존재

(2) 임의의 원소 a, b $(a<b)$에 대하여

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)<\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

(3) 임의의 원소 a, b $(a<b)$에 대하여

$$f\left(\frac{mb+na}{m+n}\right)<\frac{mf(b)+nf(a)}{m+n}$$



(4) 임의의 원소 a, b $(a<b)$와

$0\le t\le 1$인 실수 t에 대하여

$f(ta+(1-t)b)<tf(a)+(1-t)f(b)$

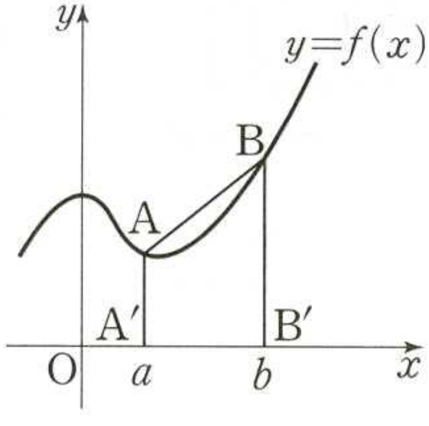
✡ 미분가능한 함수 $y=f(x)$가 아래로 볼록 ❷

(5) 임의의 원소 a, b $(a<b)$에 대하여

$$f'(a)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \text{ 또는 } \frac{f(b)-f(a)}{b-a}<f'(b)$$

(6) $f''(x)\ge 0$ (단, 유한개의 점에서만 $f''(x)=0$)

$$\Leftrightarrow \int_a^b f(x)\,dx<\frac{b-a}{2}\{f(a)+f(b)\}$$



☑ $\int_a^b f(x)\,dx$는 닫힌구간 $[a,\ b]$에서

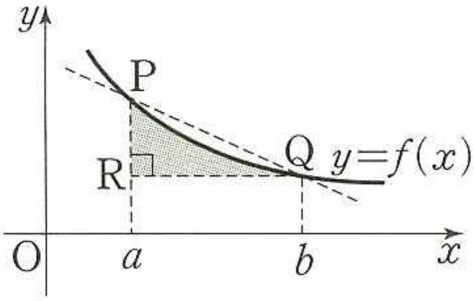
곡선 $y=f(x)$와 x축 사이의 넓이

$\frac{b-a}{2}\{f(a)+f(b)\}$는

사다리꼴 $\mathrm{AA'B'B}$의 넓이

✡ 미분가능한 함수 $y = f(x)$가 아래로 볼록 ❸

(7) $\displaystyle\int_a^b \{f(x) - f(b)\}\,dx < \frac{b-a}{2}\{f(a) - f(b)\}$



☑ $\displaystyle\int_a^b \{f(x) - f(b)\}\,dx$는

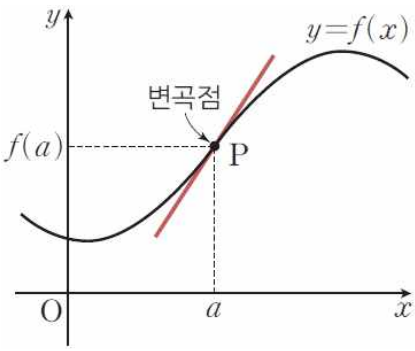
구간 $[a, b]$에서 곡선

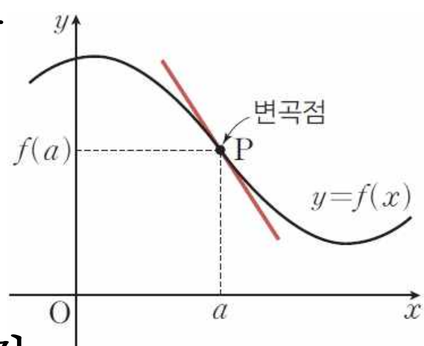
$y = f(x)$와 $f(b)$ 사이의 넓이

$\dfrac{b-a}{2}\{f(a) - f(b)\}$는 $\triangle \mathrm{PQR}$의 넓이

4 곡선의 변곡점

(1) 곡선의 변곡점





곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$에 대하여 $x = a$의 좌우에서 곡선의 모양이 아래로 볼록에서 위로 볼록으로 변하거나 위로 볼록에서 아래로 볼록으로 변할 때, 점 P를 곡선 $y = f(x)$의 '변곡점'이라고 한다.

(2) 이계도함수를 이용한 곡선의 변곡점 판정

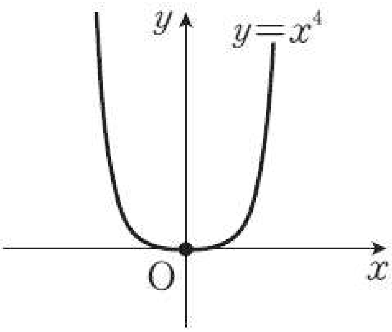
이계도함수가 존재하는 함수 $f(x)$에 대하여 $f''(a) = 0$이고, $x = a$의 좌푸에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌면 점 $(a, f(a))$는 곡선 $y = f(x)$의 변곡점이다.

✡ 변곡점의 판정

(1) 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$에서 $f''(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌면
⇒ 점 $(a, f(a))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

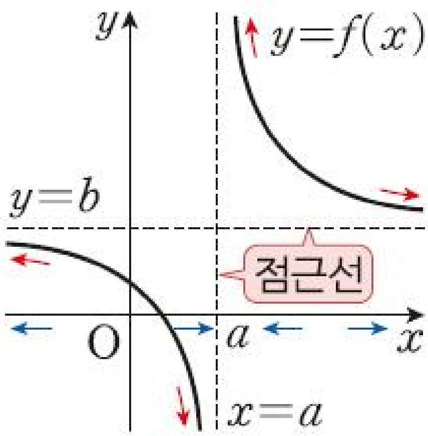
(2) 변곡점을 가진다. ⇔ ① $f''(x)=0$의 서로 다른 실근
② 미분불가능한 점

[주의] $f''(a)=0$이라고 해서 점 $(a, f(a))$가 항상 변곡점인 것은 아니다. 예를 들어 $f(x)=x^4$에서 $f''(0)=0$이지만, $x=0$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 점 $(0, 0)$은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이 아니다.



✡ 곡선의 점근선

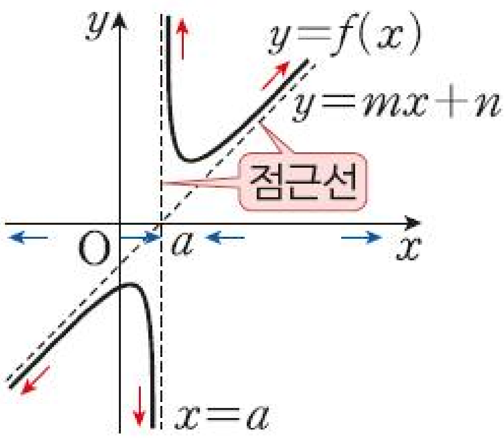
함수 $y=f(x)$와 실수 a, b에 대하여



(1) $\lim_{x\to\infty} y=b$ 또는 $\lim_{x\to-\infty} y=b$
⇒ 점근선은 직선 $y=b$

(2) $\lim_{x\to a+} y=\pm\infty$ 또는 $\lim_{x\to a-} y=\pm\infty$
⇒ 점근선은 직선 $x=a$

(3) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=m$
& $\lim_{x\to\pm\infty}(y-mx)=n$
⇒ 점근선은 직선 $y=mx+n$



✡ 곡선의 모양

$f'(x)$, $f''(x)$의 부호에 따른 곡선 $y=f(x)$의 모양은

(1) $f'(x)>0$ & $f''(x)>0$

$\Rightarrow$ $y=f(x)$는 아래로 볼록하고 증가한다. $\Rightarrow$

(2) $f'(x)<0$ & $f''(x)>0$

$\Rightarrow$ $y=f(x)$는 아래로 볼록하고 감소한다. $\Rightarrow$

(3) $f'(x)>0$ & $f''(x)<0$

$\Rightarrow$ $y=f(x)$는 위로 볼록하고 증가한다. $\Rightarrow$

(4) $f'(x)<0$ & $f''(x)<0$

$\Rightarrow$ $y=f(x)$는 위로 볼록하고 감소한다. $\Rightarrow$

5 함수의 그래프 ❶

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같은 사항을 고려하여 그린다.

(1) 함수 $y=f(x)$의 정의역과 치역

(2) 곡선 $y=f(x)$의 대칭성(y축 대칭, 원점 대칭)과 주기

(3) 곡선 $y=f(x)$와 좌표축이 만나는 점

(4) 함수 $f(x)$의 증가와 감소, 극대와 극소

(5) 곡선 $y=f(x)$의 오목과 볼록, 변곡점

(6) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, 곡선 $y=f(x)$의 점근선

예 함수 $y=\dfrac{4x}{x^2+1}$의 그래프의 개형을 그려 보자.

$f(x)=\dfrac{4x}{x^2+1}$라 하면 함수 $f(x)$의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

$$f'(x)=\frac{4\left(x^2+1\right)-4x\times 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{4\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$$ 이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$$f''(x)=\frac{-8x\left(x^2+1\right)^2-4\left(1-x^2\right)\times 2\left(x^2+1\right)\times 2x}{\left(x^2+1\right)^4}$$

$$=\frac{-8x\left(x^2+1\right)-16x\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{8x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$$ 이므로

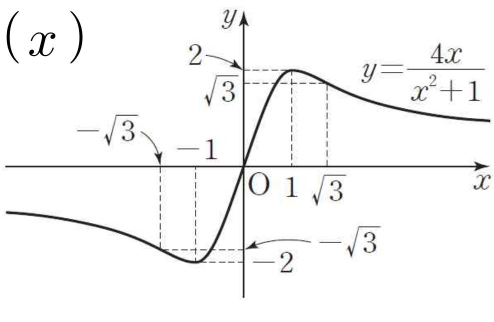
$f''(x)=0$에서 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}$

실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\sqrt{3}$	↘	-2	↗	0	↗	2	↘	$\sqrt{3}$	↘

모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$ 이므로 곡선 $y=f(x)$는 원점에 대하여 대칭이고,

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$이므로



점근선의 방정식은 $y=0$이다. $y=\dfrac{4x}{x^2+1}$의 그래프의 개형

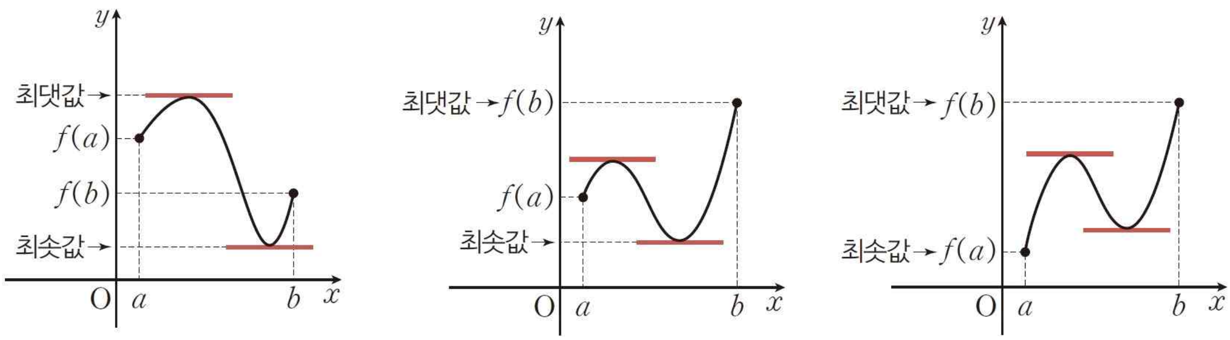
6 함수의 최댓값과 최솟값 ❶

(1) 최대·최소 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

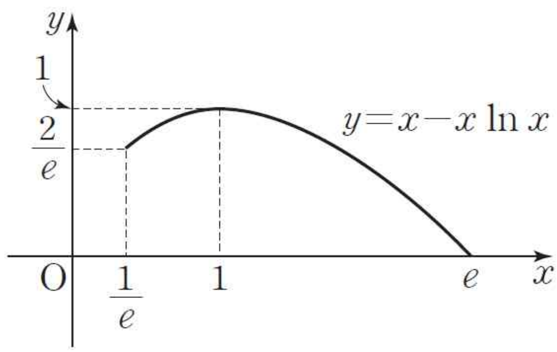
(2) 함수의 최댓값과 최솟값 구하기

닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$가 열린구간 (a, b)에서 극값을 가질 때, 극값, $f(a)$, $f(b)$ 중에 가장 큰 값이 함수 $f(x)$의 최댓값, 가장 작은 값이 함수 $f(x)$의 최솟값이다.



6 함수의 최댓값과 최솟값 ❷

예 닫힌구간 $\left[\frac{1}{e}, e\right]$에서 함수 $f(x) = x - x\ln x$의 최댓값과 최솟값을 구해 보자.



$f'(x) = 1 - \ln x - x \times \frac{1}{x} = -\ln x$이므로 $f'(x) = 0$에서 $x = 1$이고, $x = 1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x = 1$에서 극댓값 $f(1) = 1$을 갖는다. 또 $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e}$, $f(e) = 0$이므로 닫힌구간 $\left[\frac{1}{e}, e\right]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 1, 최솟값은 0이다.

7 방정식에의 활용 ❶

(1) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수

방정식 $f(x)=0$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표와 같다. 따라서 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 개수와 같다.

(2) 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수

① 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표와 같다.
따라서 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수와 같다.

7 방정식에의 활용 ❷

② 방정식 $f(x)=g(x)$에서 $f(x)-g(x)=0$이므로 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)-g(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 개수와 같다.

예 $0 \le x \le \pi$에서 방정식 $\sin x(1+\cos x)=\dfrac{1}{2}$의 서로 다른 실근의 개수를 구해 보자.

$f(x)=\sin x(1+\cos x)$라 하면

$f'(x)=\cos x(1+\cos x)+\sin x(-\sin x)$

$=\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x=\cos x+\cos^2 x-(1-\cos^2 x)$

$=2\cos^2 x+\cos x-1=(2\cos x-1)(\cos x+1)$

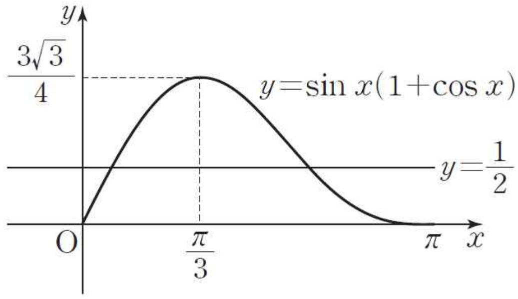
7 방정식에의 활용 ❸

$0 \leq x \leq \pi$에서 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 구하면

$\cos x = \dfrac{1}{2}$에서 $x=\dfrac{\pi}{3}$이고, $\cos x = -1$에서 $x=\pi$

$0 \leq x \leq \pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	극대	$\searrow$	0



이때 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{\pi}{3}$에서 극대

이고, 극댓값은 $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}\times\left(1+\cos\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

7 방정식에의 활용 ❹

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같이 직선 $y=\dfrac{1}{2}$

과 서로 다른 두 점에서 만나므로 $0 \leq x \leq \pi$에서 방정식

$\sin x(1+\cos x)=\dfrac{1}{2}$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

8 부등식에의 활용

(1) 부등식 $f(x) \geq 0$ 또는 $f(x) > 0$이 성립함을 보이는 방법

함수 $y = f(x)$의 그래프를 이용하여 주어진 구간에서 부등식 $f(x) \geq 0$ 또는 $f(x) > 0$이 성립함을 보이면 된다.

(2) 부등식 $f(x) \geq g(x)$ 또는 $f(x) > g(x)$가 성립함을 보이는 방법

$h(x) = f(x) - g(x)$로 놓고 주어진 구간에서 부등식 $h(x) \geq 0$ 또는 $h(x) > 0$이 성립함을 보이면 된다.

✡ 직선 운동에서의 속도와 가속도

직선 위를 움직이는 점 P의 위치가 $x = f(t)$

(1) 속도 : $v(t) = \dfrac{dx}{dt} = f'(t)$

(2) 가속도 : $a(t) = \dfrac{dv}{dt} = v'(t) = f''(t)$

위치 $\xrightarrow{\text{시각 } t\text{에 대하여 미분}}$ 속도 $\xrightarrow{\text{시각 } t\text{에 대하여 미분}}$ 가속도

$x=f(t)$ $\qquad v=\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$ $\qquad a=\dfrac{dv}{dt}=v'(t)$

위치

↓ 미분

속도

↓ 미분

가속도

✡ 속도와 운동 방향

직선 위를 움직이는 점의 속도가 $v(t)=f'(t)$

(1) $v(t)=f'(t)>0$ $\Leftrightarrow$ 위치 $x=f(t)$는 증가

$\Leftrightarrow$ $|v(t)|$의 속력으로 양의(처음) 방향으로 진행

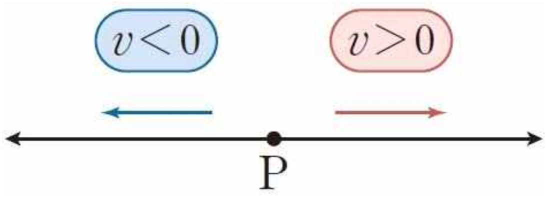
(2) $v(t)=f'(t)<0$ $\Leftrightarrow$ 위치 $x=f(t)$는 감소

$\Leftrightarrow$ $|v(t)|$의 속력으로 음의(반대) 방향으로 진행

(3) $v(t)=f'(t)=0$ $\Leftrightarrow$ ① 최고 높이에 도달했을 때

② 정지할 때

③ 운동 방향이 바뀔 때



9 속도와 가속도 ❶

일반적으로 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $(x,\ y)$는 t를 매개변수로 하는 두 함수

$$x=f(t),\ y=g(t)$$

로 나타낼 수 있다. 이때 점 P의 시각 t에서의 속도와 속력, 가속도와 가속도의 크기는 다음과 같다.

(1) 점 P의 시각 t에서의 속도와 속력

① 속도 : $\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ 또는 $(f'(t),\ g'(t))$

② 속력 : $\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$

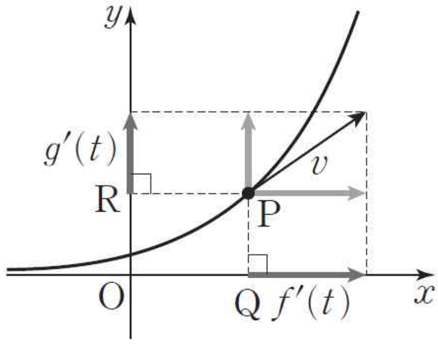
9 속도와 가속도 ❷

(2) 점 P의 시각 t에서의 가속도와 가속도의 크기

① 가속도 : $\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$ 또는 $(f''(t),\ g''(t))$

② 속력 : $\sqrt{\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)^2}=\sqrt{\{f''(t)\}^2+\{g''(t)\}^2}$

☑ 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하면 점 P가 움직일 때 두 점 Q, R은 각각 x축, y축 위에서 직선 운동을 한다.



(1) 두 점 Q, R의 시각 t에서의 속도를 각각 v_x, v_y라 하면

$$v_x=\frac{dx}{dt}=f'(t),\ v_y=\frac{dy}{dt}=g'(t)$$

이다. 이때 순서쌍 $(v_x,\ v_y)$를 점 P의 시각 t에서의 '속도'라 하고, $\sqrt{{v_x}^2+{v_y}^2}$을 점 P의 시각 t에서의 '속도의 크기' 또는 '속력'이라고 한다.

(2) 두 점 Q, R의 시각 t에서의 가속도를 각각 a_x, a_y라 하면

$$a_x=\frac{dv_x}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=f''(t),\ a_y=\frac{dv_y}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2}=g''(t)$$

이다. 이때 순서쌍 $(a_x,\ a_y)$를 점 P의 시각 t에서의 '가속도'라 하고, $\sqrt{{a_x}^2+{a_y}^2}$을 점 P의 시각 t에서의 '가속도의 크기'라고 한다.

$\boxed{\text{예}}$ 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $(x,\ y)$가 $x = t^2 - t,\ y = 3t + 1$일 때, 시각 t에서의 점 P의 속도, 속력, 가속도, 가속도의 크기를 구해 보자.

$\dfrac{dx}{dt} = 2t - 1,\ \dfrac{dy}{dt} = 3$이므로 속도는 $(2t - 1,\ 3)$

$$\therefore \text{ 속력은 } \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{(2t-1)^2 + 3^2}$$
$$= \sqrt{4t^2 - 4t + 10}$$

$\dfrac{d^2x}{dt^2} = 2,\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = 0$이므로 가속도는 $(2,\ 0)$

$$\therefore \text{ 가속도의 크기는 } \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2} = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$$