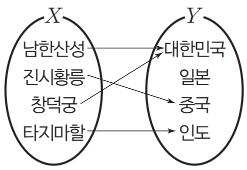
V 함수

1 함수

01 함수 219~223쪽

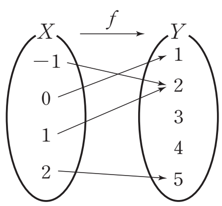
준비하기 $y=4x$

생각 열기



문제 1 (2)

문제 2 (1)



(2) 정의역: $\{-1, 0, 1, 2\}$,
공역: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$,
치역: $\{1, 2, 5\}$

문제 3 (1) 정의역: $\{x \mid x$는 실수$\}$,
치역: $\{y \mid y$는 실수$\}$
(2) 정의역: $\{x \mid x$는 실수$\}$,
치역: $\{y \mid y\leq 2$인 실수$\}$

문제 4 (1)

x	-1	0	1
$f(x)$	2	1	2
$g(x)$	2	1	2

(2) 두 함수 f와 g는 서로 같다.

문제 5 함수의 그래프: (1)
(2)와 (3)은 정의역의 원소 중에서 그에 대응하는 함숫값이 한 개가 아닌 것이 있으므로 함수의 그래프가 아니다.

생각톡톡 일대일함수이다.

문제 6 (1), (4)

문제 7 항등함수: (1)
상수함수: (3)

생각 넓히기 ❶ 학생 1명에 의자 1개가 대응되므로 일대일대응이다. 일대일대응은 아니지만 일대일함수가 되려면 의자는 최소 4개가 있어야 한다.
❷ 독서 동아리 부원 전체가 투표용지에 각자 자기 자신의 이름을 써내는 경우에 항등함수가 되고, 모두 동일한 한 명의 이름을 써내는 경우에 상수함수가 된다.

02 합성함수 224~225쪽

준비하기 (1) -3 (2) $-\frac{11}{2}$

생각 열기 119

문제 1 (1) $(g\circ f)(x)=-x^2-4x-4$
(2) $(f\circ g)(x)=-x^2+2$
(3) $(f\circ f)(x)=x+4$
(4) $(g\circ g)(x)=-x^4$

문제 2 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(3x-1)=3x$이므로

$$\begin{aligned}((f\circ g)\circ h)(x)&=(f\circ g)(h(x))\\&=(f\circ g)(x^2-2)\\&=3(x^2-2)\\&=3x^2-6\end{aligned}$$

$(g\circ h)(x)=g(h(x))=g(x^2-2)=3x^2-7$
이므로

$$\begin{aligned}(f\circ(g\circ h))(x)&=f((g\circ h)(x))\\&=f(3x^2-7)\\&=3x^2-6\end{aligned}$$

따라서 $((f\circ g)\circ h)(x)=(f\circ(g\circ h))(x)$

03 역함수 227~230쪽

준비하기 (1) $\{1, 3, 5, 7\}$ (2) 3

생각 열기 ❶ 태환: 1, 세미: 3, 경훈: 4, 민정: 2
❷ 1: 태환, 2: 민정, 3: 세미, 4: 경훈

문제 1 (1) -1 (2) -3 (3) 1 (4) 5

생각톡톡 같다.

문제 2 (1) $y=x-5$ (2) $y=-3x+12$

함께하기 ❶ $(g\circ f)(x)=-3x+4$

$(g\circ f)^{-1}(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$

$f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$

$g^{-1}(x)=-x+2$

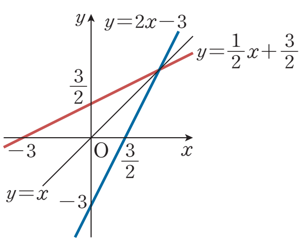
$(f^{-1}\circ g^{-1})(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$

❷ $(g\circ f)^{-1}(x)=(f^{-1}\circ g^{-1})(x)$

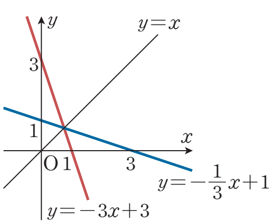
따라서 $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$

문제 3 $\frac{8}{3}$

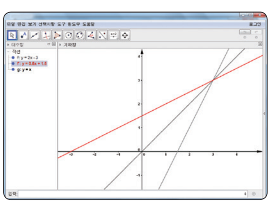
문제 4 (1)



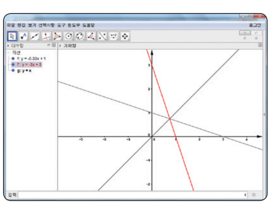
(2)



공학적 도구 (1) $y=2x-3$

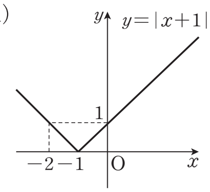


(2) $y=-\frac{1}{3}x+1$

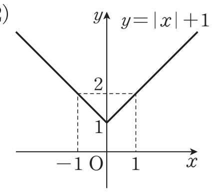


탐구 & 융합 231쪽

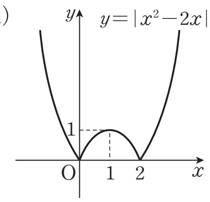
탐구 ❶ (1)



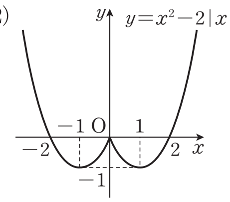
(2)



❷ (1)



(2)



V-1 중단원 마무리하기 232~234쪽

01 (1), (2)

02 일대일대응: ㄴ, ㄷ, 항등함수: ㄴ, 상수함수: ㄱ

03 (1) 2 (2) 5

(3) $(f\circ g)(x)=2x^2-1$ (4) $(f\circ f)(x)=4x-9$

04 (1) -1 (2) $f^{-1}(x)=\frac{1}{4}x-\frac{7}{4}$

05 $a=4$, $b=-1$ **06** -7

07 (1) 4 (2) 4 (3) 3 (4) 3

08 $h(x)=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$ **09** $\frac{5}{2}$

10 해결 과정 $f(x)=ax+b$의 그래프가 점 $(1, -5)$를 지나므로

$f(1)=a+b=-5$ …… ① ▶ 30 %

$y=f(x)$의 역함수의 그래프가 점 $(1, -5)$를 지나므로

$f^{-1}(1)=-5$에서 $f(-5)=1$이므로

$f(-5)=-5a+b=1$ …… ② ▶ 30 %

①, ②를 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=-4$ ▶ 20 %

답 구하기 따라서 구하는 값은

$2a-3b=10$ ▶ 20 %

11 (1) c (2) a (3) b

12 문제 이해 $f(x)=ax+b$가 일대일대응이 되려면 함수의 그래프가 두 점 $(-1,\ 1)$, $(2,\ 7)$을 지나거나 두 점 $(-1,\ 7)$, $(2,\ 1)$을 지나야 한다. ▶ 30 %

해결 과정 (i) 두 점 $(-1,\ 1)$, $(2,\ 7)$을 지날 때,

$$f(-1)=-a+b=1$$
$$f(2)=2a+b=7$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=2,\ b=3$$

따라서 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(2,\ 3)$ ▶ 30 %

(ii) 두 점 $(-1,\ 7)$, $(2,\ 1)$을 지날 때,

$$f(-1)=-a+b=7$$
$$f(2)=2a+b=1$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=-2,\ b=5$$

따라서 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(-2,\ 5)$ ▶ 30 %

답 구하기 (i), (ii)에서 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(2,\ 3)$, $(-2,\ 5)$ ▶ 10 %

13 $f(x)=ax+b$이므로

$$\begin{aligned}(f\circ f)(x)&=f(f(x))=f(ax+b)\\&=a(ax+b)+b\\&=a^2x+ab+b\end{aligned}$$

이때 $(f\circ f)(x)=4x+6$이므로

$$a^2=4,\quad ab+b=6$$

(i) $a=2$일 때, $2b+b=6$에서 $b=2$

(ii) $a=-2$일 때, $-2b+b=6$에서 $b=-6$

(i), (ii)에서 구하는 함수는

$$f(x)=2x+2 \text{ 또는 } f(x)=-2x-6$$

14 $f(x)=\begin{cases}x^2+a & (x\ge 0)\\ -x^2+a & (x<0)\end{cases}$

$f^{-1}(1)=2$에서 $f(2)=1$이므로

$$f(2)=4+a=1,\qquad a=-3$$

따라서 $f(x)=\begin{cases}x^2-3 & (x\ge 0)\\ -x^2-3 & (x<0)\end{cases}$

$(f\circ f)^{-1}(1)=f^{-1}(f^{-1}(1))=f^{-1}(2)$에서

$f^{-1}(2)=k$라 하면 $f(k)=2>0$이므로 $k\ge 0$

$$f(k)=k^2-3=2,\qquad k^2=5,\qquad k=\pm\sqrt{5}$$

이때 $k\ge 0$이므로 $k=\sqrt{5}$

즉, 구하는 값은 $(f\circ f)^{-1}(1)=\sqrt{5}$

2 유리함수와 무리함수

01 유리함수 236~241쪽

준비하기 1 $2x-1$ 2 $y=(x-2)^2-1$

생각 열기 $\dfrac{120}{x+200}$

문제 1 (1), (3)

문제 2 (1) $\dfrac{3(x-1)}{(x-2)(x+1)}$ (2) $\dfrac{x+3}{x(x-1)}$

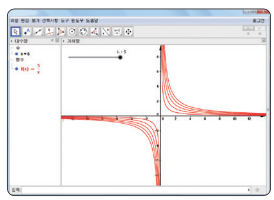
문제 3 (1) $\dfrac{x-2}{(x-1)^2}$ (2) $\dfrac{2}{x-1}$

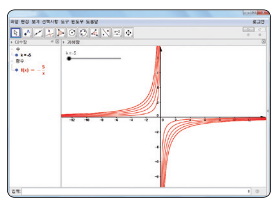
생각톡톡 실수 전체의 집합

문제 4 (1) $\{x\,|\,x\neq 1\text{인 실수}\}$

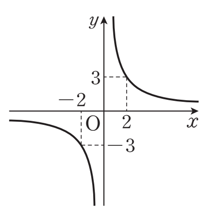
(2) $\left\{x\,\middle|\,x\neq-\dfrac{2}{3}\text{인 실수}\right\}$

함께하기

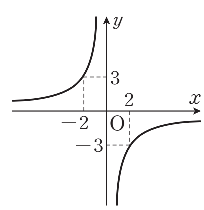




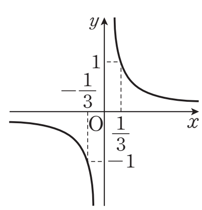
문제 5 (1)



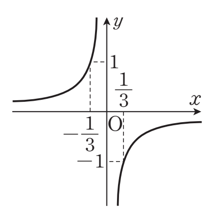
(2)



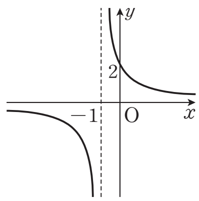
(3)



(4)



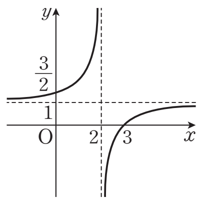
문제 6 (1)



점근선: $x=-1$

$y=0$

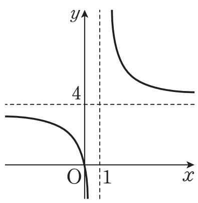
(2)



점근선: $x=2$

$y=1$

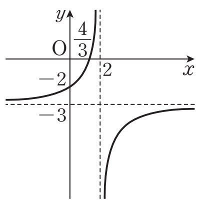
문제 7 (1)



점근선: $x=1$

$y=4$

(2)



점근선: $x=2$

$y=-3$

생각 넓히기 ❶ $y=\dfrac{k}{x-2}-1\ (k\neq0)$

❷ 1

❸ $y=\dfrac{-x+3}{x-2}$

공학적 도구 242쪽

(1) $b>-2$: () 꼴의 그래프

$b=-2$: 직선 $y=1$

$b<-2$: () 꼴의 그래프

b의 값이 변해도 $b\neq-2$인 경우에 두 점근선 $x=2$, $y=1$은 변하지 않는다.

(2) $c>0$ 또는 $-1<c<0$: () 꼴의 그래프

$c=0$: 직선 $y=-\dfrac{1}{2}x-1$

$c=-1$: 직선 $y=-1$

$c<-1$: () 꼴의 그래프

c의 값이 변해도 y절편은 항상 -1이고, $c\neq-1$인 경우에는 x절편은 항상 -2이다.

(3) $d>2$: () 꼴의 그래프

$d=2$: 직선 $y=1$

$d<2$: () 꼴의 그래프

d의 값이 변해도 $d\neq2$인 경우에 x절편은 항상 -2이고, 두 점근선 중에서 직선 $y=1$은 변하지 않는다.

02 무리함수 243~248쪽

준비하기 1 $\sqrt{3}$

2 $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$

생각 열기 $\sqrt{\dfrac{x}{4.9}}$

문제 1 (1) $x\geq-\dfrac{1}{2}$ (2) $x<3$

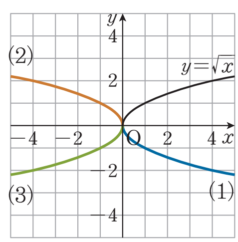
문제 2 (1) x (2) $\dfrac{2x+8}{x-4}$

문제 3 (1) $2(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1})$

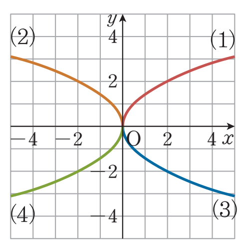
(2) $2x-1+2\sqrt{x^2-x}$

문제 4 (1) $\{x\,|\,x\geq2\}$ (2) $\left\{x\,\middle|\,x\leq\dfrac{3}{2}\right\}$

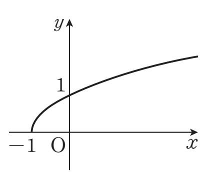
문제 5



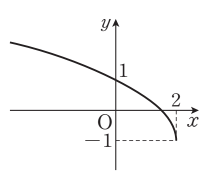
문제 6



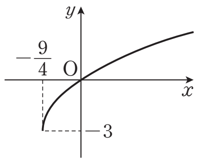
문제 7 (1)



(2)



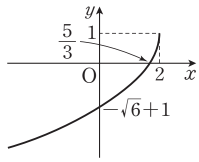
문제 8 (1)



정의역: $\left\{x \middle| x \geq -\frac{9}{4}\right\}$

치역: $\{y|y \geq -3\}$

(2)

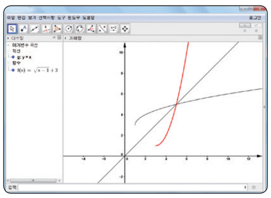


정의역: $\{x|x \leq 2\}$

치역: $\{y|y \leq 1\}$

생각 넓히기 ❶ 정의역: $\{x|x \geq 1\}$, 치역: $\{y|y \geq 3\}$

❷



정의역: $\{x|x \geq 3\}$, 치역: $\{y|y \geq 1\}$

❸ 원래 함수의 정의역은 그 역함수의 치역, 원래 함수의 치역은 그 역함수의 정의역과 같다.

V-2 중단원 마무리하기 249~251쪽

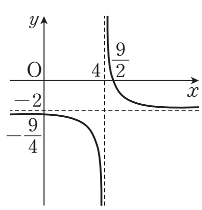
01 (1) $-\dfrac{1}{x(x-5)}$ (2) $\dfrac{x(x+2)}{x+1}$

02 (1) 정의역: $\{x|x \neq 4$인 실수$\}$

치역: $\{y|y \neq -2$인 실수$\}$

점근선: $x=4$

$y=-2$

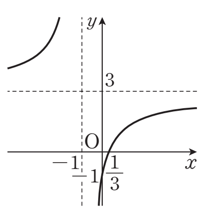


(2) 정의역: $\{x|x \neq -1$인 실수$\}$

치역: $\{y|y \neq 3$인 실수$\}$

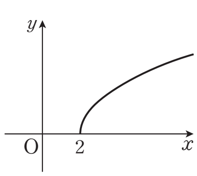
점근선: $x=-1$

$y=3$



03 (1) $-3x+7$ (2) $2(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2})$

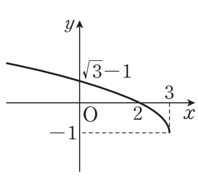
04 (1)



정의역: $\{x|x \geq 2\}$

치역: $\{y|y \geq 0\}$

(2)



정의역: $\{x|x \leq 3\}$

치역: $\{y|y \geq -1\}$

05 -4

06 $a=2$, $b=1$

07 4

08 $\sqrt{x+3}-\sqrt{x}$

09 -1

10 $a=-3$, $b=7$

11 해결 과정 $y=\sqrt{ax}\,(a \neq 0)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면

$y=\sqrt{a(x-2)}+1$ …… ① ▶ 30 %

①의 그래프가 점 $(0, 3)$을 지나므로

$3=\sqrt{-2a}+1$, $\sqrt{-2a}=2$,

$a=-2$ ▶ 30 %

$a=-2$를 ①에 대입하면

$y=\sqrt{-2(x-2)}+1$

$=\sqrt{-2x+4}+1$

이므로 $b=4$, $c=1$ ▶ 30 %

답 구하기 따라서 구하는 값은

$a^2+b^2+c^2=21$ ▶ 10 %

12 $(f \circ g)(x)=x$가 되려면 $y=g(x)$는 $y=f(x)$의 역함수이어야 한다.

$y=\dfrac{3x+5}{2x-4}$를 x에 대하여 풀면

$x=\dfrac{4y+5}{2y-3}$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\dfrac{4x+5}{2x-3}$

따라서 $g(x)=\dfrac{4x+5}{2x-3}=\dfrac{11}{2x-3}+2$이므로 이 함수의 그래프의 점근선은 두 직선 $x=\dfrac{3}{2}$과 $y=2$이다.

13 점 P의 x좌표를 $a\,(a>1)$라 하면

$\mathrm{P}\left(a, \dfrac{16}{a-1}+2\right)$, $\mathrm{Q}(a, 2)$, $\mathrm{R}\left(1, \dfrac{16}{a-1}+2\right)$

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}=\dfrac{16}{a-1}+2-2=\dfrac{16}{a-1}>0$

$\overline{\mathrm{PR}}=a-1>0$

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

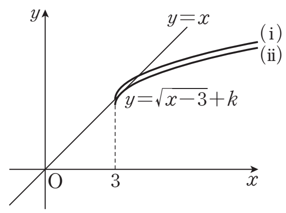
$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}=\dfrac{16}{a-1}+a-1$

$\geq 2\sqrt{\dfrac{16}{a-1}\times(a-1)}=8$

여기서 등호는 $\frac{16}{a-1}=a-1$, 즉 $a=5$일 때 성립한다.

따라서 구하는 최솟값은 8이다.

14 문제 이해 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$가 만나는 점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 만나는 점의 x좌표와 같다. ▶ 20 %



해결 과정 (i) $y=\sqrt{x-3}+k$의 그래프가 직선 $y=x$와 서로 다른 두 점에서 만날 때, 점 $(3, k)$가 직선 $y=x$ 위에 있으면 $k=3$이므로 $k\le 3$ ▶ 30 %

(ii) $y=\sqrt{x-3}+k$의 그래프와 직선 $y=x$가 한 점에서 만날 때, $\sqrt{x-3}+k=x$에서

$\sqrt{x-3}=x-k$

위의 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$x-3=x^2-2kx+k^2$,

$x^2-(2k+1)x+k^2+3=0$

위의 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2k+1)^2-4\times1\times(k^2+3)>0$에서

$k>\frac{11}{4}$ ▶ 40 %

답 구하기 (i), (ii)에서 구하는 실수 k의 값의 범위는

$\frac{11}{4}<k\le 3$ ▶ 10 %

V 대단원 평가하기 252~255쪽

01 $a=1$, $b=1$ **02** 9

03 ② **04** 1

05 ① **06** -5

07 5 **08** 10

09 $\frac{3}{2}$ **10** ⑤

11 8 **12** 102

13 $3x+1=t$라 하면 $x=\frac{t-1}{3}$이므로

$f(t)=6\times\frac{t-1}{3}-5$, $f(t)=2t-7$

즉 $f(x)=2x-7$이고, 함수 $y=f(x)$의 역함수를 구하기 위해 $y=2x-7$을 x에 대하여 풀면

$x=\frac{1}{2}y+\frac{7}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는 $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$이므로 $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$

이때 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{7}{2}$이므로 구하는 값은

$a+b=\frac{1}{2}+\frac{7}{2}=4$

따라서 옳은 것은 ④이다.

14 10 **15** 2

16 ② **17** 7

18 5 **19** -1

20 5

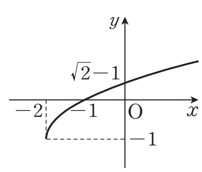
21 주어진 함수의 그래프의 점근선은 두 직선 $x=1$, $y=2$이므로 $y=\frac{k}{x-1}+2$

이 그래프가 점 $(0, 1)$을 지나므로

$1=\frac{k}{0-1}+2$, $k=1$

즉, $y=\frac{1}{x-1}+2$이므로 $y=\frac{2x-1}{x-1}$

이때 $a=1$, $b=2$, $c=-1$이므로 함수 $y=\sqrt{x+2}-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면을 지난다.



따라서 그래프가 지나는 사분면으로 옳은 것은 ③이다.

22 해결 과정 $f(2)=2$, $f(3)=1$이면 $f^2=I$이므로 모순이다.

즉, $f(2)=1$, $f(3)=2$이어야 한다. ▶ 30 %

이때 $f^3=I$이므로 역함수 g에 대하여

$g(1)=2$, $g(2)=3$, $g(3)=1$

이고, $g^3=I$이므로 $g=g^4=g^7=\cdots$

$g^2=g^5=g^8=\cdots,\quad g^3=g^6=g^9=\cdots$ ▶ 30 %

답 구하기 따라서 $g^{13}(2)=g(2)=3$,

$g^{14}(3)=g^2(3)=g(g(3))=g(1)=2$

이므로 구하는 값은

$g^{13}(2)+g^{14}(3)=3+2=5$ ▶ 40 %

23 해결 과정 주어진 함수의 그래프는 두 직선의 교점에 대해서도 대칭이다. 두 직선의 방정식

$y=x-1,\quad y=-x+5$

를 연립하여 풀면 $x=3,\ y=2$

즉, 점 $(3,\ 2)$에 대하여 대칭이므로 점근선은 두 직선

$x=3,\ y=2$ ▶ 40 %

$f(x)=\dfrac{k}{x-3}+2\ (k\neq 0$인 상수$)$ ⋯⋯ ①

①의 그래프가 점 $(1,\ 3)$을 지나므로

$3=\dfrac{k}{1-3}+2,\qquad k=-2$

$k=-2$를 ①에 대입하면

$f(x)=\dfrac{-2}{x-3}+2=\dfrac{2x-8}{x-3}$ ▶ 40 %

답 구하기 따라서 $f(7)=\dfrac{2\times7-8}{7-3}=\dfrac{3}{2}$ ▶ 20 %

24 (1) $y=\sqrt{x-1}+1$에서

$y-1=\sqrt{x-1}\ (y\geq 1)$

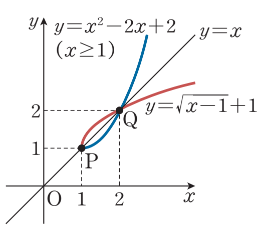
위의 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$y^2-2y+1=x-1,\quad x=y^2-2y+2\ (y\geq1)$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=x^2-2x+2\ (x\geq 1)$ ▶ 40 %

(2) 두 함수 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표는 $y=f^{-1}(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 만나는 점의 x좌표와 같다.



$x^2-2x+2=x$에서

$x^2-3x+2=0,\qquad (x-1)(x-2)=0$

이므로 $x=1$ 또는 $x=2$

즉, 점 P의 좌표는 $(1,\ 1)$

점 Q의 좌표는 $(2,\ 2)$ ▶ 50 %

따라서 구하는 길이는

$\overline{PQ}=\sqrt{(2-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$ ▶ 10 %

VI 경우의 수

1 경우의 수

01 경우의 수 261 ~ 264쪽

준비하기 (1) 3 (2) 4

생각 열기 5

문제 1 7

문제 2 10

생각 열기 6

문제 3 8

문제 4 24

문제 5 (1) 8 (2) 16

문제 6 12

생각 넓히기 ❶ (ⅰ) 합이 3인 경우

$(1,\ 2),\ (2,\ 1)$의 2가지

(ⅱ) 합이 5인 경우

$(1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)$의 4가지

(ⅲ) 합이 7인 경우

$(1,\ 6),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),$
$(5,\ 2),\ (6,\ 1)$의 6가지

(ⅳ) 합이 9인 경우

$(3,\ 6),\ (4,\ 5),\ (5,\ 4),\ (6,\ 3)$의 4가지

(ⅴ) 합이 11인 경우

$(5,\ 6),\ (6,\ 5)$의 2가지

(ⅰ)~(ⅴ)에서 합의 법칙에 의하여 눈의 수의 합이 홀수인 경우의 수는

$2+4+6+4+2=18$

❷ 짝수의 눈이 나오는 경우의 수는 3이고, 홀수의 눈이 나오는 경우의 수는 3이므로, 곱의 법칙에 의하여 (짝수, 홀수)인 경우의 수는

$3\times3=9$

(홀수, 짝수)인 경우의 수는

$3\times3=9$

이때 두 사건은 동시에 일어날 수 없으므로, 합의 법칙에 의하여 눈의 수의 합이 홀수인 경우의 수는

$9+9=18$

따라서 민지의 방법으로 구한 결과와 서로 같다.