



# 수능특강

수학영역 미적분



|    | 단원               | 쪽수 |
|----|------------------|----|
| 01 | 수열의 극한           | 4  |
| 02 | 급수               | 16 |
| 03 | 여러 가지 함수의 미분 (1) | 28 |
| 04 | 여러 가지 함수의 미분 (2) | 40 |
| 05 | 여러 가지 미분법        | 54 |
| 06 | 도함수의 활용          | 68 |
| 07 | 여러 가지 적분법        | 84 |
| 08 | 정적분의 활용          | 96 |

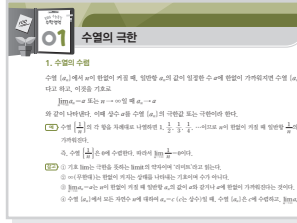


- EBSi(<http://www.ebsi.co.kr>)로 들어오셔서 회원으로 등록하세요.
- 본 교재는 EBS 인터넷 방송을 통해 학습할 수 있습니다. (VOD 무료 서비스 실시)
- 교재 및 강의 내용에 관한 문의는 EBSi(<http://www.ebsi.co.kr>)의 학습 Q&A 서비스를 활용하시기 바랍니다.



# 이 책의 구성과 특징

# Structure



## 개념 정리

교과서의 핵심 내용을 체계적으로 정리하였다.

## 예제 & 유제

예제는 개념을 적용한 대표 문항으로 문제를 해결하는 데 필요한 주요 개념을 풀이 전략으로 제시하여 풀이 과정의 이해를 돕도록 하였고, 유제는 예제와 유사한 내용의 문제나 일반화된 문제를 제시하여 학습 내용과 문제에 대한 연관성을 익히도록 구성하였다.



## Level 1 - Level 2 - Level 3

Level 1 기초 연습은 기초 개념의 인지 정도를 확인할 수 있는 문항을 제시하였으며, Level 2 기본 연습은 기본 응용 문항을, 그리고 Level 3 실력 완성은 수학적 사고력과 문제 해결 능력을 함양할 수 있는 문항을 제시하여 대수학능력시험 실전에 대비할 수 있도록 구성하였다.

## 대표 기출 문제

대수학능력시험과 모의평가 기출 문항으로 구성하였으며 기존 출제 유형을 파악할 수 있도록 출제 경향과 출제 의도를 제시하였다.



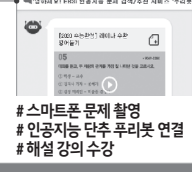
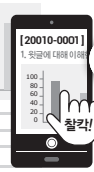
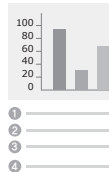
## EBS 스마트북 활용 안내

EBS 스마트북은 스마트폰으로 바로 찍어 해설 영상을 수강할 수 있고, 교재 문제를 파일(한글, 이미지)로 다운로드하여 쉽게 활용할 수 있습니다.

### 학생 모르는 문제, 찍어서 해설 강의 수강

[2010-0001]

1. 뒷글에 대해 이해한 내용으로 가장 적절한 것은?



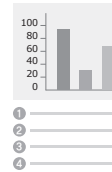
#스마트폰 문제 촬영  
#인공지능 단추 푸리봇 연결  
#해설 강의 수강

※ EBSi 고교강의 앱 설치 후 이용하실 수 있습니다.  
※ EBSi 홈페이지 및 앱 검색창에서 문항코드 입력으로도 확인이 가능합니다.

### 교사 교재 문항을 한글(HWP)문서로 저장

[2010-0001]

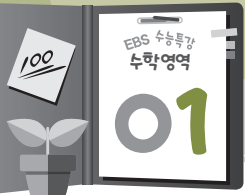
1. 뒷글에 대해 이해한 내용으로 가장 적절한 것은?



• EBS 교재 문항을 한글(HWP)파일로 다운로드하여 이용할 수 있습니다



※ 교사지원센터(<http://teacher.ebsi.co.kr>) 접속 후 '교사 인증'을 통해 이용 가능



# 수열의 극한

## 1. 수열의 수렴

수열  $\{a_n\}$ 에서  $n$ 이 한없이 커질 때, 일반항  $a_n$ 의 값이 일정한 수  $\alpha$ 에 한없이 가까워지면 수열  $\{a_n\}$ 은  $\alpha$ 에 수렴한다고 하고, 이것을 기호로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \text{ 또는 } n \rightarrow \infty \text{ 일 때 } a_n \rightarrow \alpha$$

와 같이 나타낸다. 이때 상수  $\alpha$ 를 수열  $\{a_n\}$ 의 극한값 또는 극한이라 한다.

**예** 수열  $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 의 각 항을 차례대로 나열하면  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ 이므로  $n$ 이 한없이 커질 때 일반항  $\frac{1}{n}$ 의 값은 0에 한없이 가까워진다.

즉, 수열  $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 은 0에 수렴한다. 따라서  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ 이다.

**참고** ① 기호  $\lim$ 는 극한을 뜻하는 limit의 약자이며 ‘리미트’라고 읽는다.

②  $\infty$ (무한대)는 한없이 커지는 상태를 나타내는 기호이며 수가 아니다.

③  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ 는  $n$ 이 한없이 커질 때 일반항  $a_n$ 의 값이  $\alpha$ 와 같거나  $\alpha$ 에 한없이 가까워진다는 것이다.

④ 수열  $\{a_n\}$ 에서 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $a_n = c$  ( $c$ 는 상수)일 때, 수열  $\{a_n\}$ 은  $c$ 에 수렴하고,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c = c$ 이다.

## 2. 수열의 발산

수열  $\{a_n\}$ 에서  $n$ 이 한없이 커질 때, 일반항  $a_n$ 의 값이 일정한 수에 수렴하지 않으면 수열  $\{a_n\}$ 은 발산한다고 한다.

(1) 수열  $\{a_n\}$ 에서  $n$ 이 한없이 커질 때, 일반항  $a_n$ 의 값이 한없이 커지면 수열  $\{a_n\}$ 은 양의 무한대로 발산한다고 하고, 이것을 기호로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{ 또는 } n \rightarrow \infty \text{ 일 때 } a_n \rightarrow \infty$$

와 같이 나타낸다.

**예** 수열  $\{n^2\}$ 의 각 항을 차례대로 나열하면  $1, 4, 9, \dots$ 이므로  $n$ 이 한없이 커질 때 일반항  $n^2$ 의 값은 한없이 커진다.

즉, 수열  $\{n^2\}$ 은 양의 무한대로 발산한다. 따라서  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$ 이다.

(2) 수열  $\{a_n\}$ 에서  $n$ 이 한없이 커질 때, 일반항  $a_n$ 의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 수열  $\{a_n\}$ 은 음의 무한대로 발산한다고 하고, 이것을 기호로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \text{ 또는 } n \rightarrow \infty \text{ 일 때 } a_n \rightarrow -\infty$$

와 같이 나타낸다.

**예** 수열  $\{-2^n\}$ 의 각 항을 차례대로 나열하면  $-2, -4, -8, \dots$ 이므로  $n$ 이 한없이 커질 때 일반항  $-2^n$ 의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커진다. 즉, 수열  $\{-2^n\}$ 은 음의 무한대로 발산한다. 따라서  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-2^n) = -\infty$ 이다.

(3) 수열  $\{a_n\}$ 에서  $n$ 이 한없이 커질 때, 일반항  $a_n$ 의 값이 일정한 수에 수렴하지도 않고 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않으면 수열  $\{a_n\}$ 은 진동한다고 한다.

**예** 수열  $\{(-1)^n\}$ 의 각 항을 차례대로 나열하면  $-1, 1, -1, 1, \dots$ 이므로 일반항  $(-1)^n$ 의 값은 일정한 수에 수렴하지도 않고 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않는다. 따라서 수열  $\{(-1)^n\}$ 은 진동한다.



## 예제 1

### 수열의 수렴과 발산

수열  $\{a_n\}$ 의 일반항이  $a_n = (-1)^n$ 일 때, 보기의 수열 중에서 수렴하는 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

$\neg. \{a_{2n-1}\}$

$\neg. \{a_n \cos n\pi\}$

$\neg. \left\{ \frac{a_{3n}}{\log 2n} \right\}$

①  $\neg$

②  $\neg$

③  $\neg, \neg$

④  $\neg, \neg$

⑤  $\neg, \neg, \neg$

풀이 전략

- (1) 수열  $\{a_n\}$ 에서  $n$ 이 한없이 커질 때,  $a_n$ 의 값이 한없이 가까워지는 일정한 수가 있는지의 여부를 조사한다.  
 (2) 상수  $c$ 에 대하여  $\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$ 이다.

풀이

$\neg. \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1) = -1$ 이므로 수열  $\{a_{2n-1}\}$ 은  $-1$ 에 수렴한다.

$\neg. n$ 이 홀수일 때  $a_n = -1$ 이고  $\cos n\pi = -1$ 이므로  $a_n \cos n\pi = 1$

$n$ 이 짝수일 때  $a_n = 1$ 이고  $\cos n\pi = 1$ 이므로  $a_n \cos n\pi = 1$

그러므로 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $a_n \cos n\pi = 1$

따라서  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cos n\pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$ 이므로 수열  $\{a_n \cos n\pi\}$ 은  $1$ 에 수렴한다.

$\neg. \left\{ \frac{a_{3n}}{\log 2n} \right\}$ 의 각 항을 차례대로 나열하면

$$-\frac{1}{\log 2}, \frac{1}{\log 4}, -\frac{1}{\log 6}, \frac{1}{\log 8}, \dots$$

이므로  $n$ 이 한없이 커질 때,  $\frac{a_{3n}}{\log 2n}$ 의 값은  $0$ 에 한없이 가까워진다.

따라서  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{3n}}{\log 2n} = 0$ 이므로 수열  $\left\{ \frac{a_{3n}}{\log 2n} \right\}$ 은  $0$ 에 수렴한다.

이상에서 수렴하는 수열은  $\neg, \neg, \neg$ 이다.

답 ⑤

정답과 풀이 4쪽

[20010-0001]

유제

1

수열  $\{a_n\}$ 의 일반항이  $a_n = \sin \frac{(2n-1)\pi}{2}$ 일 때, 수열  $\{b_n\}$ 에 대하여 수열  $\{a_n b_n\}$ 이 수렴하도록 하는 수열  $\{b_n\}$ 으로 알맞은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기

$\neg. \left\{ \frac{1}{n} \right\}$

$\neg. \left\{ \frac{2n-1}{2} \right\}$

$\neg. \left\{ \sin \frac{(2n+1)\pi}{2} \right\}$

①  $\neg$

②  $\neg$

③  $\neg, \neg$

④  $\neg, \neg$

⑤  $\neg, \neg, \neg$

### 3. 수열의 극한에 대한 기본 성질

수렴하는 두 수열  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ 에 대하여  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$  ( $\alpha, \beta$ 는 상수)일 때

- (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} c a_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \alpha$  (단,  $c$ 는 상수)
- (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha + \beta$
- (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha - \beta$
- (4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha \beta$
- (5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$  (단,  $b_n \neq 0$ ,  $\beta \neq 0$ )

**예** 두 수열  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ 에 대하여  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -2$ 일 때

- (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2a_n = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2 \times 3 = 6$
- (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3 + (-2) = 1$
- (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3 - (-2) = 5$
- (4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3 \times (-2) = -6$
- (5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$  (단,  $b_n \neq 0$ )

**참고** 위의 성질은 두 수열  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ 이 모두 수렴하는 경우에만 적용할 수 있다.

### 4. 수열의 극한의 대소 관계

두 수열  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ 이 수렴하고  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$  ( $\alpha, \beta$ 는 상수)일 때

- (1) 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $a_n \leq b_n$ 이면  $\alpha \leq \beta$ 이다.
- (2) 수열  $\{c_n\}$ 이 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $a_n \leq c_n \leq b_n$ 을 만족시키고  $\alpha = \beta$ 이면  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha$ 이다.

**예** 수열  $\{a_n\}$ 이 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $1 - \frac{1}{n} \leq a_n \leq 1 + \frac{1}{n}$ 을 만족시키면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \text{ 이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \text{ 이다.}$$

**참고** (1)에서 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $a_n < b_n$ 이지만  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 인 경우가 있다.

예를 들어  $a_n = -\frac{1}{n}$ ,  $b_n = \frac{1}{n}$ 이면 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $a_n < b_n$ 이지만  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ 이다.

(2)에서 수열  $\{c_n\}$ 이 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $a_n < c_n < b_n$ 을 만족시킬 때  $\alpha = \beta$ 이면  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha$ 가 성립한다.



## 예제 2

### 수열의 극한에 대한 성질

두 수열  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ 에 대하여  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n + 1) = 5$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n - 2b_n) = 4$ 일 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ 의 값은?

(단, 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $b_n \neq 0$ 이다.)

①  $\frac{1}{2}$

② 1

③  $\frac{3}{2}$

④ 2

⑤  $\frac{5}{2}$

**풀이 전략** 수렴하는 두 수열  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ 에 대하여 다음이 성립한다.

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  (단,  $c$ 는 상수)

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

(4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

(5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$  (단,  $b_n \neq 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ )

**풀이**  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n + 1) = 5$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} (2a_n + 1) - \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n + 1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \times 5 - \frac{1}{2} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{2} (3a_n - 2b_n) + \frac{3}{2} a_n \right\} = -\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n - 2b_n) + \frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \\ &= -\frac{1}{2} \times 4 + \frac{3}{2} \times 2 = 1 \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{2}{1} = 2$$

답 ④

정답과 풀이 4쪽

[20010-0002]

유제

2

수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a_n - 1}{2a_n + 3} = -1$ 일 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (4a_n - 1)$ 의 값은?

(단, 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $2a_n + 3 \neq 0$ 이다.)

①  $-\frac{11}{5}$

②  $-\frac{12}{5}$

③  $-\frac{13}{5}$

④  $-\frac{14}{5}$

⑤ -3

[20010-0003]

유제

3

수열  $\{a_n\}$ 이 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $n(n+1) < 2a_n < n(n+3)$ 을 만족시킬 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6a_n}{n^2 + 2n}$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

## 5. 수열의 극한

### (1) $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 수열의 극한

일반항의 분모와 분자가 각각 발산하는 다항식으로 주어진 수열의 극한은 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나누어 그 극한을 생각한다.

이때 두 다항식  $f(n)$ ,  $g(n)$ 에 대하여  $f(n)$ ,  $g(n)$ 의 차수에 따라  $\frac{f(n)}{g(n)}$ 의 극한은 다음과 같다.

(단,  $f(n)$ ,  $g(n)$ 은  $n$ 에 대한 차수가 모두 1 이상이고, 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $g(n) \neq 0$ 이다.)

① ( $f(n)$ 의 차수) > ( $g(n)$ 의 차수)일 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$  또는  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = -\infty$ 이다.

예  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 4}{2n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - \frac{4}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^2 + 5}{n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n + \frac{5}{n}}{1 + \frac{3}{n}} = -\infty$$

② ( $f(n)$ 의 차수) = ( $g(n)$ 의 차수)일 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \frac{(f(n) \text{의 최고차항의 계수})}{(g(n) \text{의 최고차항의 계수})}$ 이다.

예  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 3}{5n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n}}{5 - \frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (2 + \frac{3}{n})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (5 - \frac{1}{n})} = \frac{2 + 0}{5 - 0} = \frac{2}{5}$

③ ( $f(n)$ 의 차수) < ( $g(n)$ 의 차수)일 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ 이다.

예  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 1}{n^2 + 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{n})} = \frac{0 + 0}{1 + 0} = 0$

### (2) $\infty - \infty$ 꼴의 수열의 극한

①  $\infty - \infty$  꼴의 다항식은 최고차항으로 묶어 그 극한을 생각한다.

예  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n^2 - 3n + 4) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (2 - \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2}) = \infty$

②  $\infty - \infty$  꼴의 무리식은 식을 변형한 후 그 극한을 생각한다.

예  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 2n} - n)(\sqrt{n^2 + 2n} + n)}{\sqrt{n^2 + 2n} + n}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2 + 2n} + n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1} = 1$$





### 예제 3

### 수열의 극한값의 계산

두 상수  $a, b$ 에 대하여  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + an} - bn) = 3$ 일 때,  $a+b$ 의 값은? (단,  $a \geq -4$ )

① 10

② 12

③ 14

④ 16

⑤ 18

**풀이 전략**  $\infty - \infty$  꼴의 무리식은 식을 변형한 후 그 극한을 생각하고, 분모, 분자가 모두 다항식인  $\frac{\infty}{\infty}$  꼴의 수열의 극한은 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나누어 그 극한을 생각한다.

$$\begin{aligned}
 \text{풀이} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + an} - bn) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4n^2 + an} - bn)(\sqrt{4n^2 + an} + bn)}{\sqrt{4n^2 + an} + bn} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4n^2 + an})^2 - (bn)^2}{\sqrt{4n^2 + an} + bn} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4 - b^2)n^2 + an}{\sqrt{4n^2 + an} + bn} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4 - b^2)n + a}{\sqrt{4 + \frac{a}{n}} + b} \quad \dots\dots \text{㉠}
 \end{aligned}$$

㉠이 수렴하므로  $4 - b^2 = 0$ 에서  $b^2 = 4$

이때  $b \leq 0$ 이면  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + an} - bn) = \infty$ 이므로  $b > 0$

즉,  $b = 2$

그러므로  $\frac{a}{\sqrt{4+2}} = 3$ 에서  $a = 12$

따라서  $a + b = 12 + 2 = 14$

**답** ③

정답과 풀이 4쪽

[20010-0004]

**유제 4**  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n} - \sqrt{n^2 - n})$ 의 값은?

①  $\frac{1}{2}$ 

② 1

③  $\frac{3}{2}$ 

④ 2

⑤  $\frac{5}{2}$ 

[20010-0005]

**유제 5**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 + \dots + (2n)^2}{n^3}$ 의 값은?

①  $\frac{13}{6}$ ②  $\frac{7}{3}$ ③  $\frac{5}{2}$ ④  $\frac{8}{3}$ ⑤  $\frac{17}{6}$

## 6. 등비수열의 극한

등비수열  $\{r^n\}$ 의 수렴과 발산은 공비  $r$ 의 값의 범위에 따라 다음과 같다.

- (1)  $r > 1$ 일 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$  (발산)
- (2)  $r = 1$ 일 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1$  (수렴)
- (3)  $-1 < r < 1$ 일 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$  (수렴)
- (4)  $r \leq -1$ 일 때, 수열  $\{r^n\}$ 은 진동한다. (발산)

**설명** (1)  $r > 1$ 일 때,

$r = 1 + h$  ( $h > 0$ )으로 놓으면 수학적 귀납법에 의하여

$$r^n = (1+h)^n \geq 1 + nh \quad (n \geq 1)$$

임을 보일 수 있다.

이때  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + nh) = \infty$ 이므로  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$

(2)  $r = 1$ 일 때,

수열  $\{r^n\}$ 의 모든 항이 1이므로  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1$

(3)  $-1 < r < 1$ 일 때,

$r = 0$ 이면 수열  $\{r^n\}$ 의 모든 항이 0이므로  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$

$r \neq 0$ 이면  $\frac{1}{|r|} > 1$ 이므로 (1)에 의하여  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|r^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{|r|}\right)^n = \infty$

따라서  $\lim_{n \rightarrow \infty} |r^n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{|r^n|}} = 0$ 이므로  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$

(4)  $r \leq -1$ 일 때,

$r = -1$ 이면 수열  $\{r^n\}$ 은  $-1, 1, -1, 1, \dots$ 이므로 진동한다.

$r < -1$ 이면  $|r| > 1$ 이므로  $\lim_{n \rightarrow \infty} |r^n| = \infty$ 이고,  $n$ 이 한없이 커질 때  $r^n$ 의 부호가 교대로 바뀌므로 수열  $\{r^n\}$ 은 진동한다.

**참고** ① 수열  $\{r^n\}$ 이 수렴하기 위한 필요충분조건은  $-1 < r \leq 1$ 이다.

② 수열  $\{ar^n\}$ 이 수렴하기 위한 필요충분조건은  $a=0$  또는  $-1 < r \leq 1$ 이다.

③  $r^n$ 을 포함한 수열은 일반적으로  $|r| > 1$ ,  $|r| < 1$ ,  $r=1$ ,  $r=-1$ 인 경우로 나누어 극한값을 구한다.

**예** ① 등비수열  $\{2^n\}$ 은 공비가 2이고  $2 > 1$ 이므로 양의 무한대로 발산한다.

즉,  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty$

② 등비수열  $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ 은 공비가  $-\frac{1}{2}$ 이고  $-1 < -\frac{1}{2} < 1$ 이므로 0에 수렴한다.

즉,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$

③ 등비수열  $\{(-2)^n\}$ 은 공비가  $-2$ 이고  $-2 < -1$ 이므로 진동(발산)한다.



## 예제 4

### 등비수열의 극한

$x \neq -1$  일 때, 함수  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x^{n+1} - 1}{x^n + 3}$ 에 대하여  $f(2) + (f \circ f)(1)$ 의 값은? (단,  $n$ 은 자연수이다.)

①  $\frac{13}{3}$

②  $\frac{11}{3}$

③ 3

④  $\frac{7}{3}$

⑤  $\frac{5}{3}$

**풀이 전략** 등비수열  $\{r^n\}$ 의 수렴과 발산은 다음과 같다.

(1)  $r > 1$ 일 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$  (발산)

(2)  $r = 1$ 일 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1$  (수렴)

(3)  $-1 < r < 1$ 일 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$  (수렴)

(4)  $r \leq -1$ 일 때, 등비수열  $\{r^n\}$ 은 진동한다. (발산)

**풀이**  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x^{n+1} - 1}{x^n + 3}$ 에서

(i)  $|x| > 1$ 일 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x|^n = \infty$ 에서  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x^{n+1} - 1}{x^n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x - \frac{1}{x^n}}{1 + \frac{3}{x^n}} = \frac{2x - 0}{1 + 0} = 2x$$

(ii)  $|x| < 1$ 일 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x^{n+1} - 1}{x^n + 3} = \frac{0 - 1}{0 + 3} = -\frac{1}{3}$$

(iii)  $x = 1$ 일 때,  $f(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times 1^{n+1} - 1}{1^n + 3} = \frac{2 - 1}{1 + 3} = \frac{1}{4}$

(i), (ii), (iii)에서  $f(2) = 2 \times 2 = 4$ ,  $(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{3}$ 이므로

$$f(2) + (f \circ f)(1) = 4 + \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{11}{3}$$

답 ②

정답과 풀이 5쪽

[20010-0006]

유제

6

첫째항이 1, 공비가 3인 등비수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1}}{a_n a_{n+1}}$ 의 값은?

①  $\frac{1}{8}$

②  $\frac{1}{4}$

③  $\frac{3}{8}$

④  $\frac{1}{2}$

⑤  $\frac{5}{8}$

[20010-0007]

1  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+4}{n^2+2n}$ 의 값은?

- ① 1                      ② 2                      ③ 3                      ④ 4                      ⑤ 5

[20010-0008]

2 수열  $\{a_n\}$ 이 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $3n-3 < a_n < 3n+1$ 을 만족시킬 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n-1}}{n}$ 의 값은?

- ①  $\frac{3}{2}$                       ② 3                      ③  $\frac{9}{2}$                       ④ 6                      ⑤  $\frac{15}{2}$

[20010-0009]

3 두 수열  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ 에 대하여  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 2b_n) = 3$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = -4$ 일 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{(a_n)^2 + 4(b_n)^2\}$ 의 값은?

- ① 21                      ② 22                      ③ 23                      ④ 24                      ⑤ 25

[20010-0010]

4 두 상수  $a$ ,  $b$ 에 대하여  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{4n^2+4n-1} - (an+b)\} = 3$ 일 때,  $a-b$ 의 값은?

- ① 0                      ② 2                      ③ 4                      ④ 6                      ⑤ 8

[20010-0011]

5 수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1}a_n + 3^{n+1}}{3^n a_n + 4^n} = 2$ 일 때, 상수  $\alpha$ 의 값은?

(단, 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $3^n a_n + 4^n \neq 0$ 이다.)

- ①  $\frac{1}{3}$                       ②  $\frac{1}{2}$                       ③ 1                      ④ 2                      ⑤ 3

[20010-0012]

1 등차수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $a_1 + a_5 = 12$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{2n^2 - 3} = 4$ 일 때,  $a_{10}$ 의 값은?

- ① 56                      ② 58                      ③ 60                      ④ 62                      ⑤ 64

[20010-0013]

2 수열  $\{a_n\}$ 이 모든 자연수  $n$ 에 대하여 부등식  $\left| a_n - \frac{2^{n-1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n} \right| < \left( \frac{1}{4} \right)^n$ 을 만족시킬 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값은?

- ①  $\frac{1}{3}$                       ②  $\frac{1}{2}$                       ③ 1                      ④ 2                      ⑤ 3

[20010-0014]

3 두 수열  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ 에 대하여  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 3b_n) = 2$ 일 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a_n + 2b_n}{a_n + b_n}$ 의 값은?  
(단, 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $a_n > 0$ ,  $b_n > 0$ 이다.)

- ①  $\frac{11}{4}$                       ② 3                      ③  $\frac{13}{4}$                       ④  $\frac{7}{2}$                       ⑤  $\frac{15}{4}$

[20010-0015]

4 등차수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $\sum_{n=1}^{10} a_n = 300$ ,  $\sum_{n=11}^{20} a_n = 100$ 일 때,  $f(n) = \sum_{k=n}^{2n} a_k$ ,  $g(n) = \sum_{k=1}^n a_{3k}$ 라 하자.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{a_{n+1}}{n+1} + \frac{f(n)}{g(n)} \right\}$ 의 값은?

- ①  $-\frac{3}{2}$                       ② -1                      ③  $-\frac{1}{2}$                       ④ 0                      ⑤  $\frac{1}{2}$

[20010-0016]

5 자연수  $n$ 에 대하여 직선  $y=n$ 과 두 곡선  $y = \log_2(1-x)$ ,  $y = \log_2(2x-4) + 1$ 이 만나는 점을 각각  $A_n$ ,  $B_n$ 이라 하고, 두 점  $A_n$ ,  $B_n$ 에서  $x$ 축에 내린 수선의 발을 각각  $C_n$ ,  $D_n$ 이라 하자. 삼각형  $OA_nC_n$ 의 넓이를  $S_n$ , 삼각형  $OB_nD_n$ 의 넓이를  $T_n$ 이라 할 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{T_n}$ 의 값은? (단, O는 원점이다.)

- ①  $\frac{1}{4}$                       ②  $\frac{1}{2}$                       ③ 1                      ④ 2                      ⑤ 4

[20010-0017]

1 자연수  $n$ 에 대하여 이차방정식  $x^2 + 2nx - n = 0$ 의 서로 다른 두 실근을  $\alpha_n, \beta_n (\alpha_n < \beta_n)$ 이라 하자. 수직선 위의 두 점  $A(\alpha_n), B(\beta_n)$ 에 대하여 선분  $AB$ 를  $n : 1$ 로 내분하는 점을  $P(p_n)$ 이라 할 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ 의 값은?

- ①  $-\frac{3}{2}$       ②  $-\frac{4}{3}$       ③  $-1$       ④  $-\frac{2}{3}$       ⑤  $-\frac{1}{2}$

[20010-0018]

2 자연수  $n$ 에 대하여 곡선  $y = x^3$  위의 점  $P(n, n^3)$ 과 원점  $O$ 를 지나는 원  $C$ 가 있다. 곡선  $y = x^3$  위의 점  $P$ 에서의 접선  $l$ 과 원  $C$  위의 점  $P$ 에서의 접선  $m$ 이 서로 수직일 때, 원  $C$ 의 중심의  $x$ 좌표를  $a_n$ 이라 하자.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ 의 값은?

- ①  $\frac{1}{6}$       ②  $\frac{1}{3}$       ③  $\frac{1}{2}$       ④  $\frac{2}{3}$       ⑤  $\frac{5}{6}$

[20010-0019]

3 함수  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + 2x + 1}{x^{2n} + 1}$ 과 일반항이  $a_n = \begin{cases} p & (n=1) \\ qn+r & (n=2, 3, 4, \dots) \end{cases}$ 인 수열  $\{a_n\}$ 이

$$\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) \{f(x-n) + a_n\}] = f(1) \{f(1-n) + a_n\}$$

을 만족시킬 때,  $p+q+r$ 의 값은? (단,  $p, q, r$ 는 상수이다.)

- ① 2      ② 1      ③ 0      ④ -1      ⑤ -2



## 대표 기출 문제

### 출제 경향

기본적인 수열의 극한값을 구하는 문제, 수열의 극한에 대한 기본 성질과 대소 관계를 이용하여 수열의 극한값을 구하는 문제, 주어진 그래프나 도형으로부터 수열의 일반항을 구하여 극한값을 구하는 문제 등이 출제된다.

모든 항이 양수인 수열  $\{a_n\}$ 이 모든 자연수  $n$ 에 대하여 부등식

$$\sqrt{9n^2+4} < \sqrt{na_n} < 3n+2$$

를 만족시킬 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ 의 값은? [3점]

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

2020학년도 대수능 9월 모의평가

**출제 의도** ▶ 수열의 극한의 대소 관계에 대한 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

**풀이**

수열  $\{a_n\}$ 이 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$\sqrt{9n^2+4} < \sqrt{na_n} < 3n+2$$

를 만족시키므로

$$9n^2+4 < na_n < (3n+2)^2$$

$n^2 > 0$ 이므로

$$\frac{9n^2+4}{n^2} < \frac{a_n}{n} < \frac{(3n+2)^2}{n^2}$$

$$\text{이때 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^2+4}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+2)^2}{n^2} = 9 \text{이므로}$$

수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 9$$

답 ④

## 1. 급수의 뜻

(1) 수열  $\{a_n\}$ 의 각 항을 덧셈 기호  $+$ 로 연결한 식

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

을 급수라 하고, 이것을 기호  $\sum$ 를 사용하여  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 과 같이 나타낸다. 즉,

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

예 ①  $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} 2n$

②  $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

③  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \cdots + 2^{-n} + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$

(2) 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 에서 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합  $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 를 이 급수의 제  $n$ 항까지의 부분합이라 한다.

## 2. 급수의 수렴과 발산

급수  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 제  $n$ 항까지의 부분합으로 이루어진 수열  $\{S_n\}$ 이 일정한 값  $S$ 에 수렴하면, 즉

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = S$$

이면 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은  $S$ 에 수렴한다고 한다.

이때  $S$ 를 이 급수의 합이라고 하며, 이것을 기호로

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = S \text{ 또는 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

와 같이 나타낸다.

한편 부분합으로 이루어진 수열  $\{S_n\}$ 이 발산할 때, 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 발산한다고 한다.

예 ① 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ 의 제  $n$ 항까지의 부분합을  $S_n$ 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

이때  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$ 이므로  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1$

② 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)$ 의 제  $n$ 항까지의 부분합을  $S_n$ 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n (2k-1) = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2$$

이때  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$ 이므로  $\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)$ 은 양의 무한대로 발산한다.





## 예제 1

### 급수의 합

수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합  $S_n$ 이  $S_n = 2n^3 + 6n^2 + 4n$ 일 때,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 의 값은?

- ①  $\frac{1}{6}$                       ②  $\frac{1}{3}$                       ③  $\frac{1}{2}$                       ④  $\frac{2}{3}$                       ⑤  $\frac{5}{6}$

**풀이 전략** 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 제  $n$ 항까지의 부분합으로 이루어진 수열  $\{S_n\}$ 이 일정한 값  $S$ 에 수렴하면  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = S$ 이다.

**풀이** (i)  $a_1 = S_1 = 2 + 6 + 4 = 12$

(ii)  $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = (2n^3 + 6n^2 + 4n) - \{2(n-1)^3 + 6(n-1)^2 + 4(n-1)\} \\ &= 2n^3 + 6n^2 + 4n - (2n^3 - 6n^2 + 6n - 2 + 6n^2 - 12n + 6 + 4n - 4) \\ &= 6n^2 + 6n = 6n(n+1) \end{aligned}$$

(i), (ii)에서  $a_n = 6n(n+1)$  ( $n \geq 1$ )이므로

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{6k(k+1)} = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{6} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$\text{따라서 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{6}$$

답 ①

정답과 풀이 9쪽

[20010-0020]

유제

1 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합을  $S_n$ 이라 할 때,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{S_n S_{n+1}}$ 의 값은?

- ①  $\frac{1}{6}$                       ②  $\frac{1}{3}$                       ③  $\frac{1}{2}$                       ④ 2                      ⑤ 3

[20010-0021]

유제

2 수열  $\{a_n\}$ 의 일반항이  $a_n = \frac{(-1)^n}{n(n+2)}$ 일 때,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$ 이다.  $80\alpha^2$ 의 값을 구하시오.

(단,  $\alpha$ 는 상수이다.)

### 3. 급수와 수열의 극한 사이의 관계

(1) 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하면  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 이다.

**설명** 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이  $S$ 에 수렴한다고 하자. 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 제  $n$ 항까지의 부분합을  $S_n$ 이라 하면

$$a_n = S_n - S_{n-1} \quad (n \geq 2) \text{이고,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

따라서 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하면  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 이다.

(2) (1)의 대우인 ‘ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ 이면 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 발산한다.’도 참이다.

**예**  $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \text{이다.}$$

한편  $1 + \frac{1}{n} > 1$ 이고,  $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ 은 양의 무한대로 발산하므로  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ 도 양의 무한대로 발산한다.

즉, 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 발산한다.

(3) (1)의 역인 ‘ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 이면 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 수렴한다.’는 거짓이다.

즉,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 이지만 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 발산하는 경우가 존재한다.

**예**  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ 일 때

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$$

(ii) 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 제  $n$ 항까지의 부분합을  $S_n$ 이라 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(k+1) - k} = \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\ &= (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= \sqrt{n+1} - 1 \end{aligned}$$

이때  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - 1) = \infty$ 이므로 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 발산한다.

(i), (ii)에 의하여  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ 일 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 이지만 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 발산한다.



## 예제 2

### 급수와 수열의 극한 사이의 관계

두 수열  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ 에 대하여  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 2b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + 3n} + n}{n+2}$ 이고, 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n + b_n - 5)$ 가 수렴할 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ 의 값은?

①  $\frac{2}{3}$

②  $\frac{4}{3}$

③ 2

④  $\frac{8}{3}$

⑤  $\frac{10}{3}$

**풀이 전략** (1) 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하면  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 이다.

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ 이면 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 발산한다.

**풀이**  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 2b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + 3n} + n}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{3}{n}} + 1}{1 + \frac{2}{n}} = \frac{\sqrt{4+1} + 1}{1} = 3$

급수  $\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n + b_n - 5)$ 가 수렴하므로  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n + b_n - 5) = 0$ 에서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{(2a_n + b_n - 5) + 5\} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n + b_n - 5) + \lim_{n \rightarrow \infty} 5 = 0 + 5 = 5$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \{(2a_n + b_n) + (a_n + 2b_n)\} \\ &= \frac{1}{3} \{\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n + b_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 2b_n)\} \\ &= \frac{1}{3} (5 + 3) = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

**답** ④

정답과 풀이 9쪽

[20010-0022]

**유제 3** 수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n - 8) = 10$ 일 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_{n-1} + a_{2n})$ 의 값을 구하시오.

[20010-0023]

**유제 4** 수열  $\{a_n\}$ 에 대하여 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - n^2 + 2n}{n^2}$ 이 수렴할 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n - 4a_n}{n^2 + a_n}$ 의 값은?

(단, 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $n^2 + a_n \neq 0$ 이다.)

①  $-\frac{1}{2}$

②  $-\frac{1}{3}$

③ 1

④ 2

⑤ 3

#### 4. 급수의 성질

두 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 모두 수렴하고,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = T$ 라 할 때

(1)  $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n = cS$  (단,  $c$ 는 상수)

(2)  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S + T$

(3)  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S - T$

**예**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 3$ 일 때,  $\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n - b_n) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2 \times 2 - 3 = 1$

#### 5. 등비급수

(1) 첫째항이  $a$ 이고 공비가  $r$ 인 등비수열  $\{ar^{n-1}\}$ 에 대하여 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

을 첫째항이  $a$ 이고 공비가  $r$ 인 등비급수라 한다.

(2) 등비급수  $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$  ( $a \neq 0$ )은

①  $|r| < 1$ 일 때, 수렴하고 그 합은  $\frac{a}{1-r}$ 이다.

②  $|r| \geq 1$ 일 때, 발산한다.

**설명**  $a=0$ 이면  $ar^{n-1}=0$ 이므로  $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=0$ 이다.

$a \neq 0$ 일 때, 등비급수  $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ 의 수렴과 발산을  $r$ 의 값의 범위에 따라 조사해 보자.

①  $|r| < 1$ 일 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ 이므로  $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n ar^{k-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r}$ 이다.

②  $|r| \geq 1$ 일 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} ar^{n-1} \neq 0$ 이므로 등비급수  $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ 은 발산한다.

**예** ① 수열  $\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$ 은 첫째항이  $\frac{1}{4}$ , 공비가  $\frac{1}{4}$ 인 등비수열이다.

이때  $\left|\frac{1}{4}\right| < 1$ 이므로 등비급수  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ 은 수렴하고  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$ 이다.

② 수열  $\{(-3)^{n-1}\}$ 은 첫째항이 1, 공비가  $-3$ 인 등비수열이다.

이때  $|-3| > 1$ 이므로 등비급수  $\sum_{n=1}^{\infty} (-3)^{n-1}$ 은 발산한다.

**참고** 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ 이 수렴하기 위한 필요충분조건은  $a=0$  또는  $|r| < 1$ 이다.

#### 6. 등비급수의 활용

도형의 길이나 넓이가 일정한 비율로 한없이 작아질 때, 이 모든 도형의 길이의 합 또는 넓이의 합은 등비급수의 합을 활용하여 구할 수 있다.



### 예제 3

### 등비급수의 합

등비수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $a_1 + a_3 = 14$ ,  $a_2 + a_4 = 42$ 일 때,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{a_n}$ 의 값은?

- ①  $\frac{7}{2}$       ②  $\frac{9}{2}$       ③  $\frac{11}{2}$       ④  $\frac{13}{2}$       ⑤  $\frac{15}{2}$

**풀이 전략**  $|r| < 1$ 일 때,  $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$ 이다.

**풀이** 등비수열  $\{a_n\}$ 의 공비를  $r$ 라 하면

$$a_2 + a_4 = r(a_1 + a_3)$$

이므로  $42 = 14r$ 에서  $r = 3$

$a_1 + a_3 = 14$ 에서

$$a_1(1 + r^2) = 14$$

$$10a_1 = 14$$

$$a_1 = \frac{7}{5}$$

그러므로  $a_n = \frac{7}{5} \times 3^{n-1}$ 에서  $\frac{7}{a_n} = \frac{5}{3^{n-1}} = 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right\} = \frac{5}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{15}{2}$$

답 ⑤

정답과 풀이 10쪽

[20010-0024]

**유제 5** 첫째항이 2인 등비수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{4}{3}$ 일 때,  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$ 의 값은?

- ①  $\frac{8}{3}$       ②  $\frac{10}{3}$       ③ 4      ④  $\frac{14}{3}$       ⑤  $\frac{16}{3}$

[20010-0025]

**유제 6** 수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합을  $S_n$ 이라 할 때,  $\log_2(S_n + 1) = 3n$ 이다.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{q}{p}$ 일 때,  $p+q$ 의 값을 구하시오. (단,  $p$ 와  $q$ 는 서로소인 자연수이다.)

[20010-0026]

**1** 두 수열  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ 에 대하여  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n + 3b_n) = 35$ 일 때,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 의 값은?

- ① 6                      ② 7                      ③ 8                      ④ 9                      ⑤ 10

[20010-0027]

**2** 첫째항이 2인 수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$ 일 때,  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ 의 값은?

- ① 1                      ② 2                      ③ 3                      ④ 4                      ⑤ 5

[20010-0028]

**3** 수열  $\{a_n\}$ 이 수렴하고,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n + 6)$ 을 만족시킬 때,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 값은?

- ① 2                      ② 4                      ③ 6                      ④ 8                      ⑤ 10

[20010-0029]

**4** 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x^2 - 8x + 14}{2} \right)^n$ 이 수렴하도록 하는 모든 정수  $x$ 의 값의 합은?

- ① 6                      ② 8                      ③ 10                      ④ 12                      ⑤ 14

[20010-0030]

**5**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 1}{2^{2n-1}}$ 의 값은?

- ①  $\frac{14}{3}$                       ②  $\frac{16}{3}$                       ③ 6                      ④  $\frac{20}{3}$                       ⑤  $\frac{22}{3}$

[20010-0031]

**1** 첫째항이 6, 공차가 4인 등차수열  $\{a_n\}$ 에 대하여 수열  $\{b_n\}$ 을  $b_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 라 할 때,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{b_n}$ 의 값은?

- ①  $\frac{1}{2}$                       ② 1                      ③  $\frac{3}{2}$                       ④ 2                      ⑤  $\frac{5}{2}$

[20010-0032]

**2** 두 수열  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킬 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{(a_n)^2 + (b_n)^2\}$ 의 값은?

(가)  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = 1$

(나) 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $\frac{1-3n^2}{2n^2+4} < b_n < \frac{2n-3n^2}{2n^2+4}$ 이다.

- ①  $\frac{7}{2}$                       ② 4                      ③  $\frac{9}{2}$                       ④ 5                      ⑤  $\frac{11}{2}$

[20010-0033]

**3** 자연수  $n$ 에 대하여 직선  $y=n$ 과 두 곡선  $y = -\log_2 \frac{x}{2}$ ,  $y = \log_4 \frac{1}{x}$ 의 교점을 각각  $P_n$ ,  $Q_n$ 이라 하자.

$a_n = \overline{P_n Q_n}$ 일 때,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 값은?

- ①  $\frac{5}{4}$                       ②  $\frac{4}{3}$                       ③  $\frac{3}{2}$                       ④  $\frac{5}{3}$                       ⑤  $\frac{7}{4}$

[20010-0034]

**4** 수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left( \frac{5}{2} \right)^n a_n \right\} = 1$ 일 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1} + 3^{n+1} a_n}{4^n + 3^n a_n}$ 의 값은?

(단, 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $4^n + 3^n a_n \neq 0$ 이다.)

- ①  $\frac{2}{3}$                       ②  $\frac{4}{3}$                       ③  $\frac{3}{2}$                       ④ 3                      ⑤ 4

[20010-0035]

**5** 등비수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $a_1 \neq 0$ ,  $a_1 + a_2 + a_3 = \sum_{n=4}^{\infty} a_n$ 일 때,  $\frac{a_{10}}{a_4}$ 의 값은?

- ①  $\frac{1}{2}$                       ②  $\frac{1}{4}$                       ③  $\frac{1}{6}$                       ④  $\frac{1}{8}$                       ⑤  $\frac{1}{10}$

[20010-0036]

6 첫째항이 2이고 공비가  $r$  ( $0 < r < 1$ )인 등비수열  $\{a_n\}$ 이 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $a_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ 를 만족시킬 때,

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+2}$ 의 값은?

- ① 1                      ②  $\frac{4}{3}$                       ③  $\frac{5}{3}$                       ④ 2                      ⑤  $\frac{7}{3}$

[20010-0037]

7  $a_1=1$ 이고 공비가 양수인 등비수열  $\{a_n\}$ 에 대하여 수열  $\{b_n\}$ 이

$$b_{2n-1} = \log_3 (a_1 a_3 a_5 \cdots a_{2n-1}) \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

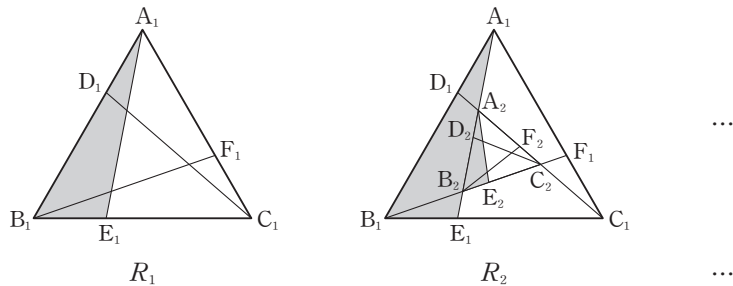
$$b_{2n} = \log_{\frac{1}{3}} (a_2 a_4 a_6 \cdots a_{2n}) \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

을 만족시킨다.  $\sum_{n=1}^{20} b_n = 110$ 일 때,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 값은?

- ①  $\frac{3}{8}$                       ②  $\frac{5}{8}$                       ③  $\frac{7}{8}$                       ④  $\frac{9}{8}$                       ⑤  $\frac{11}{8}$

[20010-0038]

8 그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정삼각형  $A_1B_1C_1$ 의 세 변  $A_1B_1$ ,  $B_1C_1$ ,  $C_1A_1$ 을 1 : 2로 내분하는 점을 각각  $D_1$ ,  $E_1$ ,  $F_1$ 이라 하고, 삼각형  $A_1B_1E_1$ 에 색칠하여 얻은 그림을  $R_1$ 이라 하자. 그림  $R_1$ 에서 두 선분  $A_1E_1$ ,  $C_1D_1$ 의 교점을  $A_2$ , 두 선분  $A_1E_1$ ,  $B_1F_1$ 의 교점을  $B_2$ , 두 선분  $B_1F_1$ ,  $C_1D_1$ 의 교점을  $C_2$ 라 하고, 삼각형  $A_2B_2C_2$ 에 대하여 그림  $R_1$ 을 얻은 것과 같은 방법으로 색칠하여 얻은 그림을  $R_2$ 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여  $n$ 번째 얻은 그림  $R_n$ 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를  $S_n$ 이라 할 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은?



- ①  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$                       ②  $\frac{19\sqrt{3}}{24}$                       ③  $\frac{5\sqrt{3}}{6}$                       ④  $\frac{7\sqrt{3}}{8}$                       ⑤  $\frac{11\sqrt{3}}{12}$



[20010-0039]

1 수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $a_n = \frac{(-1)^n}{2n}$ 이고 수열  $\{b_n\}$ 이

$$b_n = \begin{cases} a_n & (a_n \geq a_{n+1}) \\ a_{n+1} & (a_n < a_{n+1}) \end{cases} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

을 만족시킬 때,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} b_{2n+1}$ 의 값은?

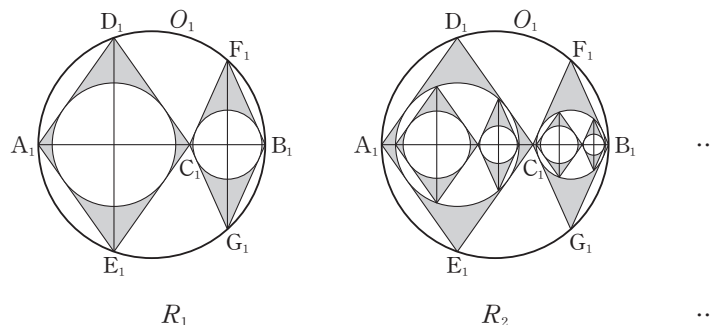
- ①  $\frac{1}{20}$       ②  $\frac{1}{16}$       ③  $\frac{1}{12}$       ④  $\frac{1}{8}$       ⑤  $\frac{1}{4}$

[20010-0040]

2 곡선  $y=2x^2$  위의 한 점  $(a_n, 2(a_n)^2)$ 에서의 접선을  $l_n$ , 직선  $l_n$ 의  $x$ 절편을  $a_{n+1}$ 이라 할 때, 곡선  $y=2x^2$ 과 직선  $l_n$ , 직선  $x=a_{n+1}$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를  $S_n$ 이라 하자.  $a_1=1$ 일 때,  $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{q}{p}$ 이다.  $p+q$ 의 값을 구하시오. (단,  $p$ 와  $q$ 는 서로소인 자연수이다.)

[20010-0041]

3 그림과 같이 반지름의 길이가 3인 원  $O_1$ 의 지름  $A_1B_1$ 에 대하여 선분  $A_1B_1$ 을 2:1로 내분하는 점을  $C_1$ 이라 하자. 선분  $A_1C_1$ 의 중점을 지나고 선분  $A_1C_1$ 에 수직인 직선이 원  $O_1$ 과 만나는 점을 각각  $D_1, E_1$ , 선분  $C_1B_1$ 의 중점을 지나고 선분  $C_1B_1$ 에 수직인 직선이 원  $O_1$ 과 만나는 점을 각각  $F_1, G_1$ 이라 하자. 두 사각형  $A_1E_1C_1D_1$ 과  $C_1G_1B_1F_1$ 에 각각 내접하는 원을 그리고 사각형의 내부와 사각형에 내접하는 원의 외부의 공통 부분에 색칠하여 얻은 그림을  $R_1$ 이라 하자. 그림  $R_1$ 에서 새로 그려진 두 원에 같은 방법으로 색칠하여 얻은 그림을  $R_2$ 라 하고, 이와 같은 과정을 계속하여  $n$ 번째 얻은 그림  $R_n$ 에 색칠된 부분의 넓이를  $S_n$ 이라 하면  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = a\sqrt{2} + b\sqrt{5} + c\pi$ 이다.  $11(a+b+c)$ 의 값을 구하시오. (단,  $a, b, c$ 는 유리수이다.)





## 대표 기출 문제

### 출제 경향

기본적인 급수의 합을 구하는 문제, 급수가 수렴할 때 수열의 극한값을 구하는 문제, 등비급수가 수렴할 조건을 구하는 문제 등이 출제된다.

수열  $\{a_n\}$ 이  $\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n - 3) = 2$ 를 만족시킨다.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = r$ 일 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+2} - 1}{r^n + 1}$ 의 값은? [3점]

①  $\frac{7}{4}$

② 2

③  $\frac{9}{4}$

④  $\frac{5}{2}$

⑤  $\frac{11}{4}$

2020학년도 대수능 6월 모의평가

**출제 의도** ▶ 급수와 수열의 극한 사이의 관계를 이용하여 등비수열의 극한을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

**풀이**  $\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n - 3) = 2$ 에서  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n - 3) = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2}(2a_n - 3) + \frac{3}{2} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n - 3) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{2} \times 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

즉,  $r = \frac{3}{2}$

$r > 1$ 이면  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$ 에서  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+2} - 1}{r^n + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^2 - \frac{1}{r^n}}{1 + \frac{1}{r^n}} \\ &= \frac{r^2 - 0}{1 + 0} = r^2 \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \end{aligned}$$



답 ③



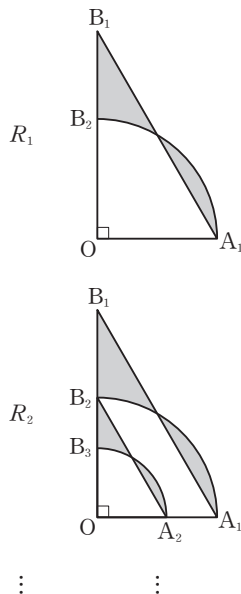
## 대표 기출 문제

### 출제 경향

등비급수의 합을 이용하여 도형의 길이나 넓이의 합을 구하는 문제 등이 출제되고 있다.

그림과 같이  $\overline{OA_1}=4$ ,  $\overline{OB_1}=4\sqrt{3}$ 인 직각삼각형  $OA_1B_1$ 이 있다. 중심이 O이고 반지름의 길이가  $\overline{OA_1}$ 인 원이 선분  $OB_1$ 과 만나는 점을  $B_2$ 라 하자. 삼각형  $OA_1B_1$ 의 내부와 부채꼴  $OA_1B_2$ 의 내부에서 공통된 부분을 제외한  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을  $R_1$ 이라 하자. 그림  $R_1$ 에서 점  $B_2$ 를 지나고 선분  $A_1B_1$ 에 평행한 직선이 선분  $OA_1$ 과 만나는 점을  $A_2$ , 중심이 O이고 반지름의 길이가  $\overline{OA_2}$ 인 원이 선분  $OB_2$ 과 만나는 점을  $B_3$ 이라 하자. 삼각형  $OA_2B_2$ 의 내부와 부채꼴  $OA_2B_3$ 의 내부에서 공통된 부분을 제외한  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을  $R_2$ 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여  $n$ 번째 얻은 그림  $R_n$ 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를  $S_n$ 이라 할 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]

- ①  $\frac{3}{2}\pi$       ②  $\frac{5}{3}\pi$       ③  $\frac{11}{6}\pi$       ④  $2\pi$       ⑤  $\frac{13}{6}\pi$



2019학년도 대수능

**출제 의도** ▶ 닮음비를 이용하여 등비급수의 공비를 구하고 등비급수의 합을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

**풀이** 그림  $R_1$ 에서 부채꼴  $OA_1B_2$ 의 호  $A_1B_2$ 와 선분  $A_1B_1$ 이 만나는 점을  $C_1$ 이라 하자.

$\angle C_1OA_1 = \frac{\pi}{3}$ 이므로 부채꼴  $OA_1C_1$ 의 넓이와 삼각형  $OA_1C_1$ 의 넓이의 차는

$$\frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \times 4^2 \times \sin \frac{\pi}{3} = \frac{8}{3}\pi - 4\sqrt{3} \quad \cdots \textcircled{1}$$

또  $\angle C_1OB_1 = \frac{\pi}{6}$ 이므로 삼각형  $OB_1C_1$ 의 넓이와 부채꼴  $OB_1C_1$ 의 넓이의 차는

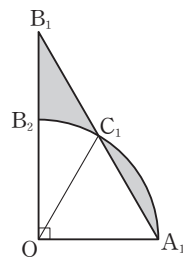
$$\frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{3} \times \sin \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{\pi}{6} = 4\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } S_1 = \left( \frac{8}{3}\pi - 4\sqrt{3} \right) + \left( 4\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi \right) = \frac{4}{3}\pi$$

한편 삼각형  $OA_nB_n$ 과 삼각형  $OA_{n+1}B_{n+1}$ 의 닮음비는  $\overline{OB_n} : \overline{OB_{n+1}} = \sqrt{3} : 1$

따라서 그림  $R_n$ 에 색칠되어 있는 부분의 넓이  $S_n$ 은 첫째항이  $\frac{4}{3}\pi$ 이고, 공비가  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}$ 인 등비수열의 첫째 항부터 제  $n$ 항까지의 합이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\frac{4}{3}\pi}{1 - \frac{1}{3}} = 2\pi$$



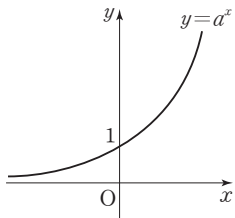
답 ④

## 여러 가지 함수의 미분 (1)

### 1. 지수함수의 극한

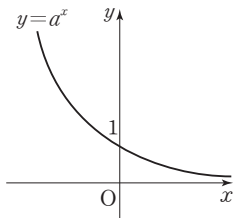
지수함수  $y=a^x$  ( $a>0$ ,  $a\neq 1$ )의 극한은 지수함수의 그래프를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

(1)  $a>1$ 일 때



$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

(2)  $0 < a < 1$ 일 때



$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty$$

**예** ①  $\lim_{x \rightarrow \infty} 3^x = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^x = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = \infty$

② 지수함수  $y=\left(\frac{3}{5}\right)^x$ 에서  $0 < \frac{3}{5} < 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x}{5^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{5}\right)^x = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x}{5^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^x = \infty$$

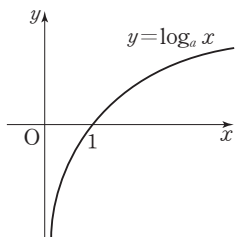
**참고** 지수함수  $y=a^x$  ( $a>0$ ,  $a\neq 1$ )은 실수 전체의 집합에서 연속이므로 실수  $b$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow b} a^x = a^b$$

### 2. 로그함수의 극한

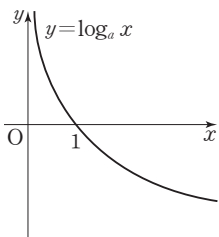
로그함수  $y=\log_a x$  ( $a>0$ ,  $a\neq 1$ )의 극한은 로그함수의 그래프를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

(1)  $a>1$ 일 때



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$$

(2)  $0 < a < 1$ 일 때



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = \infty$$

**예** ①  $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_3 x = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_3 x = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_{\frac{1}{3}} x = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_{\frac{1}{3}} x = \infty$

② 로그함수  $y=\log_5 x$ 에서  $5>1$ 이므로  $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_5 x = \infty$ 이고

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 \log_5 x + 4}{2 \log_5 x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3}{2} + \frac{2}{\log_5 x} \right) = \frac{3}{2} + 0 = \frac{3}{2}$$

**참고** 로그함수  $y=\log_a x$  ( $a>0$ ,  $a\neq 1$ )은 양의 실수 전체의 집합에서 연속이므로 양의 실수  $b$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow b} \log_a x = \log_a b$$



## 예제 1

### 지수함수와 로그함수의 극한

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^{x+2} + 6^{x+2}}{6^x + a^x + 2} = 36$ 을 만족시키는 자연수  $a$ 의 개수는?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

**풀이 전략** (1)  $1 \leq a < 6$ ,  $a = 6$ ,  $a > 6$ 일 때로 나누어 극한값을 구한다.

(2) ①  $a > 1$ 일 때,  $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$

②  $0 < a < 1$ 일 때,  $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty$

**풀이**  $a$ 가 자연수이므로  $1 \leq a < 6$ ,  $a = 6$ ,  $a > 6$ 일 때로 나누어  $a$ 의 값을 구하면 다음과 같다.

(i)  $1 \leq a < 6$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^{x+2} + 6^{x+2}}{6^x + a^x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^2 \times \left(\frac{a}{6}\right)^x + 6^2}{1 + \left(\frac{a}{6}\right)^x + \frac{2}{6^x}} = \frac{0 + 36}{1 + 0 + 0} = 36$$

이므로 주어진 식을 만족시키는 자연수  $a$ 의 값은 1, 2, 3, 4, 5이다.

(ii)  $a = 6$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6^{x+2} + 6^{x+2}}{6^x + 6^x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \times 6^{x+2}}{2 \times 6^x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6^2}{1 + \frac{1}{6^x}} = \frac{36}{1 + 0} = 36$$

이므로  $a = 6$ 은 주어진 식을 만족시킨다.

(iii)  $a > 6$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^{x+2} + 6^{x+2}}{6^x + a^x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^2 + 6^2 \times \left(\frac{6}{a}\right)^x}{\left(\frac{6}{a}\right)^x + 1 + \frac{2}{a^x}} = \frac{a^2 + 0}{0 + 1 + 0} = a^2$$

$a > 6$ 이므로  $a^2 = 36$ 을 만족시키는 자연수  $a$ 의 값은 없다.

(i), (ii), (iii)에서 주어진 식을 만족시키는 자연수  $a$ 는 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로 그 개수는 6이다.

**답** ③

정답과 풀이 14쪽

[20010-0042]

**유제**

**1**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{2x-1} - 3^{x+2}}{3^{x-1} + 4^{x-1}}$ 의 값은?

①  $\frac{1}{4}$ ②  $\frac{1}{2}$ 

③ 1

④ 2

⑤ 4

[20010-0043]

**유제**

**2**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_2(x^3 + 5x)}{4 \log_2 x^2 + \log_2 x}$ 의 값은?

①  $\frac{1}{4}$ ②  $\frac{1}{3}$ ③  $\frac{1}{2}$ ④  $\frac{2}{3}$ ⑤  $\frac{3}{4}$

### 3. 무리수 $e$ 의 정의

$x$ 의 값이 0에 한없이 가까워질 때,  $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 의 값은 일정한 값에 가까워지며 그 극한값을  $e$ 로 나타낸다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

이다. 이때 수  $e$ 는 무리수이며 그 값은  $e=2.71828182845904\cdots$ 임이 알려져 있다.

**[참고]** (1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

(2) 0이 아닌 실수  $a$ 에 대하여

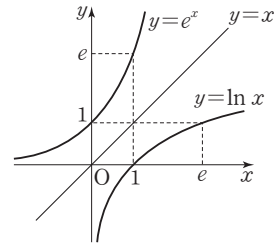
$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (1+ax)^{\frac{1}{ax}} \right\}^a = e^a$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}} \right\}^a = e^a$$

### 4. 자연로그의 정의

무리수  $e$ 를 밑으로 하는 로그  $\log_e x$ 를 자연로그라 하고, 기호로  $\ln x$ 와 같이 나타낸다.

로그함수  $y = \ln x$ 와 지수함수  $y = e^x$ 은 서로 역함수의 관계에 있으므로 두 함수의 그래프는 직선  $y = x$ 에 대하여 대칭이다.



**[참고]**  $\textcircled{1} e^0 = 1$        $\textcircled{2} e^1 = e$        $\textcircled{3} \ln 1 = 0$        $\textcircled{4} \ln e = 1$

### 5. 무리수 $e$ 의 정의를 이용한 여러 가지 함수의 극한

$$(1) \textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a} \quad (\text{단, } a > 0, a \neq 1)$$

$$(2) \textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (\text{단, } a > 0, a \neq 1)$$

**[설명]** (1)  $\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$

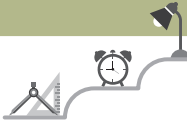
$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$$

(2)  $\textcircled{1} e^x - 1 = t$ 로 놓으면  $x = \ln(1+t)$ 이고,  $x \rightarrow 0$ 일 때  $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}} = \frac{1}{\ln e} = 1$$

$\textcircled{2} a^x - 1 = t$ 로 놓으면  $x = \log_a(1+t)$ 이고,  $x \rightarrow 0$ 일 때  $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log_a(1+t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a$$



## 예제 2

## 무리수 $e$ 의 정의를 이용한 함수의 극한

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8^x - 4^x - 2^x + 1}{\ln(1+2x^2)}$ 의 값은?

- ①  $\frac{1}{2}(\ln 2)^2$       ②  $(\ln 2)^2$       ③  $\frac{3}{2}(\ln 2)^2$       ④  $2(\ln 2)^2$       ⑤  $\frac{5}{2}(\ln 2)^2$

**풀이 전략**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$  ( $a > 0, a \neq 1$ )을 이용하기 위하여 주어진 식을 변형한다.

**풀이**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8^x - 4^x - 2^x + 1}{\ln(1+2x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4^x - 1)(2^x - 1)}{\ln(1+2x^2)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{2x^2}{\ln(1+2x^2)} \times \frac{4^x - 1}{x} \times \frac{2^x - 1}{x} \times \frac{1}{2} \right\}$$

이때  $2x^2 = t$ 라 하면  $x \rightarrow 0$ 일 때  $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{\ln(1+2x^2)} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t}{\ln(1+t)} = 1$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8^x - 4^x - 2^x + 1}{\ln(1+2x^2)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{2x^2}{\ln(1+2x^2)} \times \frac{4^x - 1}{x} \times \frac{2^x - 1}{x} \times \frac{1}{2} \right\} \\ &= 1 \times \ln 4 \times \ln 2 \times \frac{1}{2} \\ &= (\ln 2)^2 \end{aligned}$$

답 ②

정답과 풀이 14쪽

[20010-0044]

유제

**3**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{3x} = \frac{1}{6}$ 일 때, 상수  $a$ 의 값은?

- ①  $\frac{1}{6}$       ②  $\frac{1}{5}$       ③  $\frac{1}{4}$       ④  $\frac{1}{3}$       ⑤  $\frac{1}{2}$

[20010-0045]

유제

**4** 함수  $f(x)$ 가  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{f(x)} = \frac{1}{3}$ 을 만족시킬 때,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + x}{e^{2x} - 1}$ 의 값은?

- ①  $\frac{1}{2}$       ② 1      ③  $\frac{3}{2}$       ④ 2      ⑤  $\frac{5}{2}$

## 6. 지수함수의 도함수

(1) 지수함수  $y=e^x$ 에 대하여

$$y'=e^x$$

(2) 지수함수  $y=a^x$  ( $a>0, a\neq 1$ )에 대하여

$$y'=a^x \ln a$$

**설명** (1) 지수함수  $y=e^x$ 에서 도함수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} \\ &= e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \times 1 \\ &= e^x \end{aligned}$$

(2) 지수함수  $y=a^x$  ( $a>0, a\neq 1$ )에서 도함수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} \\ &= a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \times \ln a \\ &= a^x \ln a \end{aligned}$$

**예** ① 함수  $y=e^{x+1}$ 에 대하여

$$y'=(e^{x+1})'=(e \times e^x)'=e \times (e^x)'=e \times e^x=e^{x+1}$$

② 함수  $y=xe^x$ 에 대하여

$$y'=(xe^x)'=(x)' \times e^x + x \times (e^x)'=1 \times e^x + x \times e^x=(1+x)e^x$$

③ 함수  $y=3^x$ 에 대하여

$$y'=(3^x)'=3^x \ln 3$$

④ 함수  $y=x \times 3^x$ 에 대하여

$$y'=(x \times 3^x)'=(x)' \times 3^x + x \times (3^x)'=1 \times 3^x + x \times 3^x \ln 3=3^x(1+x \ln 3)$$

**참고**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ 의 기하학적 의미

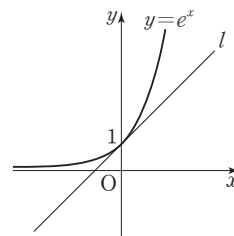
함수  $f(x)=e^x$ 이라 하면

$$f(0)=e^0=1$$

$$f'(0)=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x}=1$$

즉,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x}$ 의 값은 함수  $y=e^x$ 의 그래프 위의 점  $(0, 1)$ 에서의 접선의 기울기이다.

이 접선을  $l$ 이라 하면 직선  $l$ 의 기울기는 1이므로 직선  $l$ 의 방정식은  $y=x+1$ 이다.







### 예제 3

### 지수함수의 도함수

모든 실수  $x$ 에 대하여 연속인 함수  $f(x)$ 가  $(x-3)f(x)=2^x+2^{-x+3}-9$ 를 만족시킬 때,  $f(3)$ 의 값은?

- ①  $5 \ln 2$       ②  $6 \ln 2$       ③  $7 \ln 2$       ④  $8 \ln 2$       ⑤  $9 \ln 2$

**풀이 전략** (1) 함수  $f(x)$ 가  $x=a$ 에서 연속이면  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)=f(a)$ 이다.

(2) 함수  $f(x)$ 가  $x=a$ 에서 미분가능할 때,  $f'(a)=\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

**풀이**  $(x-3)f(x)=2^x+2^{-x+3}-9$ 에서  $x \neq 3$ 일 때

$$f(x)=\frac{2^x+2^{-x+3}-9}{x-3} \quad (x \neq 3)$$

이다. 함수  $f(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여 연속이므로  $x=3$ 에서 연속이고

$$f(3)=\lim_{x \rightarrow 3} f(x)=\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2^x+2^{-x+3}-9}{x-3}$$

$g(x)=2^x+2^{-x+3}$ 이라 하면  $g(3)=9$ 이고

$$g'(x)=(2^x+2^{-x+3})'=(2^x)'+2^3 \times \left\{ \left( \frac{1}{2} \right)^x \right\}'$$

$$=2^x \ln 2 + 2^3 \times \left( \frac{1}{2} \right)^x \ln \frac{1}{2}$$

$$=2^x \ln 2 - 2^{-x+3} \ln 2$$

$$=(2^x - 2^{-x+3}) \ln 2$$

따라서

$$f(3)=\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2^x+2^{-x+3}-9}{x-3}=\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x)-g(3)}{x-3}=g'(3)=(8-1) \ln 2=7 \ln 2$$

**답** ③

정답과 풀이 15쪽

[20010-0046]

**유제 5** 함수  $f(x)=3^{x+1}+3^{2x}$ 에 대하여  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h)-f(1-h)}{h}=a \ln 3$ 이다.  $a$ 의 값을 구하시오.

[20010-0047]

**유제 6**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 e^x + ax - 2e}{x-1} = b$ 일 때,  $a+b$ 의 값은? (단,  $a, b$ 는 상수이다.)

- ①  $e$       ②  $2e$       ③  $3e$       ④  $4e$       ⑤  $5e$

## 7. 로그함수의 도함수

(1) 로그함수  $y = \ln x$ 에 대하여

$$y' = \frac{1}{x}$$

(2) 로그함수  $y = \log_a x$  ( $a > 0, a \neq 1$ )에 대하여

$$y' = \frac{1}{x \ln a}$$

**설명** (1) 로그함수  $y = \ln x$ 에서 도함수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \frac{x+h}{x} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} \times \frac{x}{h} \ln \left( 1 + \frac{h}{x} \right) \right\} = \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left( 1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h}} \\ &= \frac{1}{x} \times \ln e = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

(2) 로그함수  $y = \log_a x$  ( $a > 0, a \neq 1$ )에 대하여  $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ 이므로

$$y' = (\log_a x)' = \left( \frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \frac{1}{\ln a} \times (\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}$$

**예** ① 함수  $y = \ln 2x$ 의 도함수는

$$y' = (\ln 2x)' = (\ln 2 + \ln x)' = \frac{1}{x}$$

② 함수  $y = x \ln x$ 의 도함수는

$$y' = (x \ln x)' = (x)' \times \ln x + x \times (\ln x)' = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

③ 함수  $y = \log_3 x$ 의 도함수는

$$y' = (\log_3 x)' = \left( \frac{\ln x}{\ln 3} \right)' = \frac{1}{x \ln 3}$$

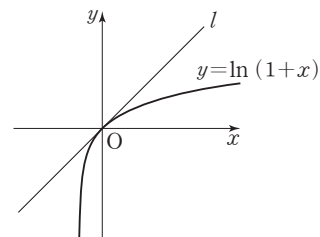
**참고**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ 의 기하학적 의미

함수  $f(x) = \ln(1+x)$ 라 하면

$$f(0) = \ln(1+0) = \ln 1 = 0$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

즉,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ 의 값은 함수  $y = \ln(1+x)$ 의 그래프 위의 점  $O(0, 0)$ 에서의 접선의 기울기이다. 이 접선을  $l$ 이라 하면 직선  $l$ 의 기울기는 1이므로 직선  $l$ 의 방정식은  $y = x$ 이다.





## 예제 4

### 로그함수의 도함수

함수  $f(x) = (\log_3 9x)^2$ 에 대하여  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1+2h}{3}\right) - f\left(\frac{1-4h}{3}\right)}{h}$ 의 값은?

①  $\frac{4}{\ln 3}$

②  $\frac{6}{\ln 3}$

③  $\frac{8}{\ln 3}$

④  $\frac{10}{\ln 3}$

⑤  $\frac{12}{\ln 3}$

**풀이 전략** (1) 함수  $f(x)$ 가  $x=a$ 에서 미분가능하면  $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

(2) 미분가능한 두 함수  $f(x), g(x)$ 에 대하여  $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

(3) 로그함수  $y = \log_a x$  ( $a > 0, a \neq 1$ )에 대하여  $y' = \frac{1}{x \ln a}$

**풀이** 함수  $f(x)$ 가  $x = \frac{1}{3}$ 에서 미분가능하므로

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1+2h}{3}\right) - f\left(\frac{1-4h}{3}\right)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left\{f\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}h\right) - f\left(\frac{1}{3}\right)\right\} - \left\{f\left(\frac{1}{3} - \frac{4}{3}h\right) - f\left(\frac{1}{3}\right)\right\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}h\right) - f\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{2}{3}h} \times \frac{2}{3} + \frac{f\left(\frac{1}{3} - \frac{4}{3}h\right) - f\left(\frac{1}{3}\right)}{-\frac{4}{3}h} \times \frac{4}{3} \right] \\ &= \frac{2}{3}f'\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{4}{3}f'\left(\frac{1}{3}\right) = 2f'\left(\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

$f(x) = (\log_3 9x)^2 = (2 + \log_3 x)^2$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2 + \log_3 x)' \times (2 + \log_3 x) + (2 + \log_3 x) \times (2 + \log_3 x)' \\ &= \frac{1}{x \ln 3} \times (2 + \log_3 x) + (2 + \log_3 x) \times \frac{1}{x \ln 3} = \frac{2(2 + \log_3 x)}{x \ln 3} \end{aligned}$$

따라서

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1+2h}{3}\right) - f\left(\frac{1-4h}{3}\right)}{h} = 2f'\left(\frac{1}{3}\right) = 2 \times \frac{2\left(2 + \log_3 \frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{3} \ln 3} = \frac{12}{\ln 3}$$

답 ⑤

정답과 풀이 15쪽

[20010-0048]

유제

**7**  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax \log_2 x - b}{x^2 - 4} = 1 + \frac{1}{\ln 2}$ 을 만족시키는 두 상수  $a, b$ 에 대하여  $a+b$ 의 값은?

① 10

② 12

③ 14

④ 16

⑤ 18

[20010-0049]

1  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{2x+3} - 3^{x+4}}{2^{2x-1} + 3^{x+2}}$ 의 값은?

① 12

② 14

③ 16

④ 18

⑤ 20

[20010-0050]

2 함수  $f(x)$ 가  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{\ln 2x} = 6$ 을 만족시킬 때,  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{2x-1}$ 의 값은?

① 6

② 8

③ 10

④ 12

⑤ 14

[20010-0051]

3 함수  $f(x) = e^x \ln 2x$ 에 대하여  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{2}+2h\right) - f\left(\frac{1}{2}-2h\right)}{h}$ 의 값은?

①  $4\sqrt{e}$ ②  $4e$ ③  $8\sqrt{e}$ ④  $8e$ ⑤  $16\sqrt{e}$ 

[20010-0052]

4  $x > -\frac{1}{2}$ 에서 연속인 함수  $f(x)$ 가  $f(x) \ln(1+2x) = e^{3x} - 1$ 을 만족시킬 때,  $f(0)$ 의 값은?

① 1

②  $\frac{3}{2}$ 

③ 2

④  $\frac{5}{2}$ 

⑤ 3

[20010-0053]

5 함수  $f(x) = x^2 \ln x + ax$ 가  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 5}{x^3 - 1} = b$ 를 만족시킬 때,  $a+b$ 의 값은? (단,  $a, b$ 는 상수이다.)

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

[20010-0054]

1  $x > 0$ 에서 정의된 함수  $f(x)$ 가  $f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{\sqrt{x^2+h} - x}$ 일 때,  $f'(1)$ 의 값은?

- ①  $e$                       ②  $2e$                       ③  $3e$                       ④  $4e$                       ⑤  $5e$

[20010-0055]

2 함수  $f(x) = \begin{cases} ae^{x-2} - 4x & (x \leq 2) \\ x^2 + 2bx - 3a & (x > 2) \end{cases}$ 가  $x=2$ 에서 미분가능할 때,  $a+b$ 의 값은? (단,  $a, b$ 는 상수이다.)

- ①  $-1$                       ②  $-3$                       ③  $-5$                       ④  $-7$                       ⑤  $-9$

[20010-0056]

3  $x > 0$ 인 모든 실수  $x$ 에 대하여 함수  $f(x)$ 가  $1 + \ln x \leq f(x) \leq e^{x-1}$ 을 만족시킬 때,  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(2x) - 1}{2x^2 - x}$ 의 값은?

- ①  $\frac{1}{2}$                       ②  $1$                       ③  $\frac{3}{2}$                       ④  $2$                       ⑤  $\frac{5}{2}$

[20010-0057]

4 좌표평면에서 곡선  $y = \ln x$  위의 서로 다른 두 점  $A(1, 0)$ ,  $P(t, \ln t)$ 에 대하여  $\overline{AQ} = \overline{PQ}$ 인  $y$ 축 위의 점  $Q$ 의  $y$ 좌표를  $f(t)$ 라 할 때,  $\lim_{t \rightarrow 1} f(t)$ 의 값은?

- ①  $\frac{1}{e^2}$                       ②  $\frac{1}{e}$                       ③  $1$                       ④  $e$                       ⑤  $e^2$

[20010-0058]

1 자연수  $n$ 에 대하여  $a_n = \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x \{\ln(x+k) - \ln x\}$ 라 할 때,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 의 값은?

①  $\frac{1}{4}$

②  $\frac{1}{2}$

③ 1

④ 2

⑤ 4

[20010-0059]

2 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수  $f(x)$ 에 대하여  $g(x) = f(x) \log_2 x$ 라 하자.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(x)+4}{x^2-2x} = 3$ 일 때,  $g'(2)$ 의 값은?

①  $4 - \frac{2}{\ln 2}$

②  $4 - \frac{1}{\ln 2}$

③  $6 - \frac{2}{\ln 2}$

④  $6 - \frac{1}{\ln 2}$

⑤  $8 - \frac{2}{\ln 2}$

[20010-0060]

3 다항함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

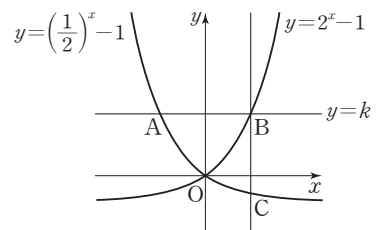
$$(가) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{e^{-2x+1}-1} = \frac{1}{4}$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 2x^3}{x^3 \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right)} = 2$$

$8f(1)$ 의 값을 구하시오.

[20010-0061]

4 그림과 같이 양수  $k$ 에 대하여 직선  $y=k$ 가 두 함수  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$ ,  $y = 2^x - 1$ 의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B를 지나고  $x$ 축에 수직인 직선이 함수  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$ 의 그래프와 만나는 점을 C라 하자.  $\lim_{k \rightarrow 0+} \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ 의 값은?



①  $\frac{1}{4 \ln 2}$

②  $\frac{1}{2 \ln 2}$

③  $\frac{1}{\ln 2}$

④  $\frac{2}{\ln 2}$

⑤  $\frac{4}{\ln 2}$



## 대표 기출 문제

### 출제 경향

지수함수와 로그함수의 극한값을 구하는 문제, 무리수  $e$ 의 정의를 이용하여 함수의 극한값을 구하는 문제, 지수함수와 로그함수의 도함수를 이용하여 미분계수를 구하는 문제, 함수의 연속성과 미분가능성의 관계 등을 구하는 문제가 출제된다.

함수  $f(x) = e^x(2x+1)$ 에 대하여  $f'(1)$ 의 값은? [3점]

- ①  $8e$                       ②  $7e$                       ③  $6e$                       ④  $5e$                       ⑤  $4e$

2018학년도 대수능 6월 모의평가

**출제 의도** ▶ 지수함수의 도함수와 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

**풀이**  $f(x) = e^x(2x+1)$ 에서

$$f'(x) = e^x(2x+1) + e^x \times 2 = e^x(2x+3)$$

$$\text{따라서 } f'(1) = e(2+3) = 5e$$

답 ④

**다른 풀이**  $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{1+h}\{2(1+h)+1\} - 3e}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2he^{1+h} + 3e(e^h - 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 2e^{1+h} + 3e \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

$$= 2e + 3e \times 1$$

$$= 5e$$

## 여러 가지 함수의 미분 (2)

### 1. $\csc \theta$ , $\sec \theta$ , $\cot \theta$ 의 정의

좌표평면에서 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가  $r$ 인 원 위의 임의의 점  $P(x, y)$ 에 대하여  $x$ 축의 양의 방향을 시초선으로 할 때, 동경 OP가 나타내는 한 각의 크기를  $\theta$ 라 하면  $\csc \theta$ ,  $\sec \theta$ ,  $\cot \theta$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\csc \theta = \frac{r}{y} \ (y \neq 0), \sec \theta = \frac{r}{x} \ (x \neq 0), \cot \theta = \frac{x}{y} \ (y \neq 0)$$

**설명** 동경 OP가 나타내는 한 각의 크기를  $\theta$ 라 하면

$$\frac{r}{y} \ (y \neq 0), \frac{r}{x} \ (x \neq 0), \frac{x}{y} \ (y \neq 0)$$

의 값은  $r$ 의 값에 관계없이  $\theta$ 의 값에 따라 각각 하나로 정해진다. 따라서

$$\theta \rightarrow \frac{r}{y} \ (y \neq 0), \theta \rightarrow \frac{r}{x} \ (x \neq 0), \theta \rightarrow \frac{x}{y} \ (y \neq 0)$$

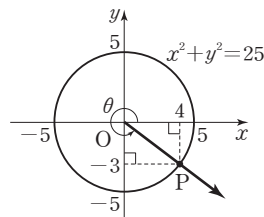
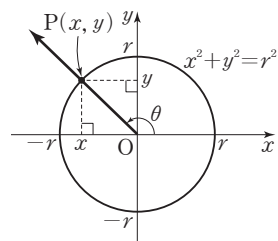
과 같은 대응은 모두  $\theta$ 에 대한 함수이다. 이 함수를 차례대로  $\theta$ 에 대한 코시컨트함수, 시컨트함수, 코탄젠트함수라 하고, 이것을 기호로 각각 다음과 같이 나타낸다.

$$\csc \theta = \frac{r}{y} \ (y \neq 0), \sec \theta = \frac{r}{x} \ (x \neq 0), \cot \theta = \frac{x}{y} \ (y \neq 0)$$

**참고**  $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}, \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$

**예** 그림과 같이 원점 O와 점  $P(4, -3)$ 을 지나는 동경 OP가 나타내는 각의 크기를  $\theta$ 라 하면  $\overline{OP} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$ 이므로

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} = -\frac{5}{3}, \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{5}{4}, \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = -\frac{4}{3}$$



### 2. 삼각함수 사이의 관계

(1)  $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$

(2)  $1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$

**설명** 삼각함수 사이에

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

의 관계가 성립한다.  $\textcircled{1}$ 의 양변을  $\cos^2 \theta$  ( $\cos \theta \neq 0$ )으로 나누면

$$\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}, \tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$$

또한  $\textcircled{1}$ 의 양변을  $\sin^2 \theta$  ( $\sin \theta \neq 0$ )으로 나누면

$$1 + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta}, 1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

**예**  $\theta$ 가 제3사분면의 각이고  $\tan \theta = \frac{4}{3}$ 일 때,  $\sec \theta$ ,  $\cos \theta$ 의 값을 구해 보자.

$$\sec^2 \theta = \tan^2 \theta + 1 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 1 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 \text{ 이고 } \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} < 0 \text{ 이므로}$$

$$\sec \theta = -\frac{5}{3}, \cos \theta = \frac{1}{\sec \theta} = -\frac{3}{5}$$





## 예제 1

## 삼각함수 사이의 관계

그림과 같이 원  $x^2 + y^2 = 1$  위의 점 P를 지나는 동경 OP가 나타내는 한 각의 크기를  $\theta$ 라 하자. 두 점 A, B의 좌표가 각각 (1, 0), (0, 1)이고, 점 B를 지나고 y축에 수직인 직선이 동경 OP와 만나는 점을 Q라 하자.  $\overline{BQ} = 2$ 일 때,

$\sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \times \csc\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ 의 값은? (단, O는 원점이고,  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이다.)

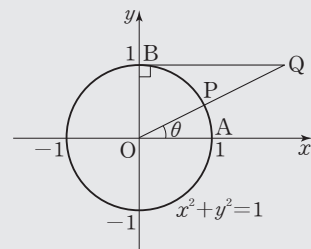
①  $\frac{2}{5}$

②  $\frac{4}{5}$

③ 1

④  $\frac{5}{4}$

⑤  $\frac{5}{2}$



**풀이 전략** (1)  $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$ ,  $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$ ,  $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$

(2)  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$ ,  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta$

**풀이** 직각삼각형 OQB에서  $\overline{OQ}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{BQ}^2 = 1^2 + 2^2 = 5$ ,  $\overline{OQ} = \sqrt{5}$

선분 BQ와 x축은 서로 평행하므로  $\angle OQB = \angle POA = \theta$

한편 직각삼각형 OQB에서

$$\sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OB}} = \sqrt{5}$$

$$\csc\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{BQ}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

따라서  $\sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \times \csc\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \sqrt{5} \times \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{5}{2}$

답 ⑤

정답과 풀이 19쪽

[20010-0062]

유제

1  $\tan \theta = 2$ 일 때,  $\csc^2 \theta + \sec^2 \theta$ 의 값은?

①  $\frac{21}{4}$

②  $\frac{23}{4}$

③  $\frac{25}{4}$

④  $\frac{27}{4}$

⑤  $\frac{29}{4}$

[20010-0063]

유제

2  $\frac{\cot \theta}{1 + \csc \theta} - \frac{\cot \theta}{1 - \csc \theta} = 4\sqrt{2}$ 일 때,  $\sec^2 \theta$ 의 값은?

① 2

② 4

③ 8

④ 16

⑤ 32

### 3. 사인함수와 코사인함수의 덧셈정리

$$(1) \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$(2) \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$(3) \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$(4) \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

**설명** 삼각함수의 덧셈정리는 두 각  $\alpha, \beta$ 의 삼각함수를 이용하여  $\alpha + \beta, \alpha - \beta$ 의 삼각함수를 나타내는 방법이다.

좌표평면에서 그림과 같이 두 각  $\alpha, \beta$ 가 나타내는 동경과 원  $x^2 + y^2 = 1$ 의 교점을 각각 A, B라 하고, 원점 O를 중심으로 부채꼴 OAB를 시계 방향으로  $\beta$ 만큼 회전할 때, 두 점 A, B가 이동한 점을 각각 C, D라 하면

$$A(\cos \alpha, \sin \alpha), B(\cos \beta, \sin \beta),$$

$$C(\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta)), D(1, 0)$$

이다. 이때

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= (\cos \beta - \cos \alpha)^2 + (\sin \beta - \sin \alpha)^2 \\ &= (\cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta) + (\sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta) \\ &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \\ &= 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \\ \overline{CD}^2 &= \{1 - \cos(\alpha - \beta)\}^2 + \{0 - \sin(\alpha - \beta)\}^2 \\ &= 1 - 2 \cos(\alpha - \beta) + \{\cos^2(\alpha - \beta) + \sin^2(\alpha - \beta)\} \\ &= 2 - 2 \cos(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

이다. 한편 삼각형 OAB와 삼각형 OCD는 서로 합동이므로

$$\overline{AB} = \overline{CD}, \text{ 즉 } \overline{AB}^2 = \overline{CD}^2$$

이 성립한다. 즉,

$$2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = 2 - 2 \cos(\alpha - \beta)$$

이고, 이 식을 정리하면 다음이 성립한다.

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

위의 ①에  $\beta$  대신  $-\beta$ 를 대입하면

$$\cos\{\alpha - (-\beta)\} = \cos \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \sin(-\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

위의 ①에  $\alpha$  대신  $\frac{\pi}{2} - \alpha$ 를 대입하면

$$\cos\left\{\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right\} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos \beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

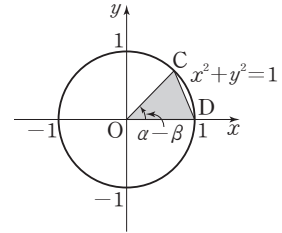
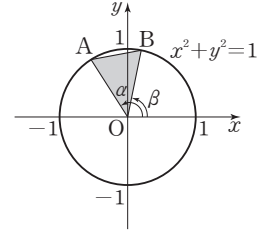
위의 ②에  $\beta$  대신  $-\beta$ 를 대입하면

$$\sin\{\alpha + (-\beta)\} = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

**예**  $\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$





## 예제 2

### 사인함수와 코사인함수의 덧셈정리

그림과 같이 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여  $\angle ABC = \alpha$ ,  $\angle ACD = \beta$ 라 하자.

$\cos \alpha = -\frac{5}{13}$ ,  $\cos \beta = \frac{3}{5}$ 일 때,  $\sin(\angle DAC)$ 의 값은? (단,  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ,  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ )

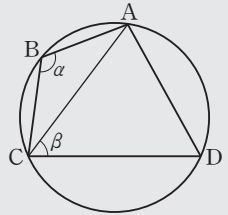
①  $\frac{10}{13}$

②  $\frac{4}{5}$

③  $\frac{54}{65}$

④  $\frac{56}{65}$

⑤  $\frac{58}{65}$



**풀이 전략** (1)  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

(2)  $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$

**풀이**  $\angle DAC = \theta$ 라 하면

$\angle DAC$ ,  $\angle DBC$ 는 호 CD에 대한 원주각이므로  $\angle DBC = \angle DAC = \theta$

또  $\angle ACD$ ,  $\angle ABD$ 는 호 AD에 대한 원주각이므로  $\angle ABD = \angle ACD = \beta$

이때  $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$ 이므로  $\alpha = \beta + \theta$ ,  $\theta = \alpha - \beta$

$\cos \alpha = -\frac{5}{13}$  ( $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ),  $\cos \beta = \frac{3}{5}$  ( $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ )에서  $\sin \alpha$ ,  $\sin \beta$ 는 모두 양수

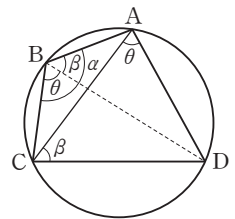
이므로

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(-\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}, \quad \sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

따라서

$$\begin{aligned} \sin(\angle DAC) &= \sin \theta = \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ &= \frac{12}{13} \times \frac{3}{5} - \left(-\frac{5}{13}\right) \times \frac{4}{5} = \frac{56}{65} \end{aligned}$$

답 ④



정답과 풀이 19쪽

[20010-0064]

유제

3

$\frac{\cos 135^\circ \cos 15^\circ + \sin 135^\circ \sin 15^\circ}{\sin 75^\circ \cos 15^\circ - \cos 75^\circ \sin 15^\circ}$ 의 값은?

①  $-\frac{\sqrt{6}}{3}$

②  $-\frac{\sqrt{5}}{3}$

③  $-\frac{2}{3}$

④  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

⑤  $-\frac{\sqrt{2}}{3}$

[20010-0065]

유제

4

$\sin(\alpha - \beta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{3}{5}$ 일 때,  $\cos 2\alpha$ 의 값은? (단,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ,  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ )

①  $-\frac{7\sqrt{2}}{10}$

②  $-\frac{3\sqrt{2}}{5}$

③  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

④  $-\frac{2\sqrt{2}}{5}$

⑤  $-\frac{3\sqrt{2}}{10}$

#### 4. 탄젠트함수의 덧셈정리

$$(1) \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$(2) \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

**설명** 사인함수와 코사인함수의 덧셈정리를 이용하면 다음이 성립한다.

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \quad \dots\dots ㉑$$

위의 ㉑의 우변의 분자, 분모를 각각  $\cos \alpha \cos \beta$  ( $\cos \alpha \cos \beta \neq 0$ )으로 나누면

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \times \frac{\sin \beta}{\cos \beta}} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \quad \dots\dots ㉒$$

위의 ㉒에  $\beta$  대신  $-\beta$ 를 대입하면

$$\tan\{\alpha + (-\beta)\} = \frac{\tan \alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan \alpha \tan(-\beta)} = \frac{\tan \alpha + (-\tan \beta)}{1 - \tan \alpha (-\tan \beta)}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

**예**  $\tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \times \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$

**참고** 두 직선이 이루는 예각의 크기

기울기가  $m, m'$ 인 두 직선  $l, l'$ 이  $x$ 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각  $\alpha, \beta$  ( $0 \leq \beta < \alpha < \pi, \alpha \neq \frac{\pi}{2}, \beta \neq \frac{\pi}{2}$ )

라 하고 두 직선이 이루는 예각의 크기를  $\theta$ 라 하면

(i)  $0 < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$ 일 때

$$\tan \theta = \tan(\alpha - \beta)$$

(ii)  $\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < \pi$ 일 때

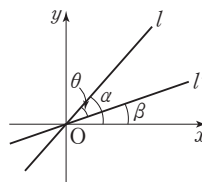
$$\tan \theta = \tan\{\pi - (\alpha - \beta)\} = -\tan(\alpha - \beta)$$

(i), (ii)에서  $\tan \alpha = m, \tan \beta = m'$ 이므로

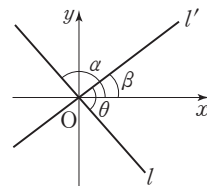
$$\tan \theta = |\tan(\alpha - \beta)| = \left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right|$$

$$= \left| \frac{m - m'}{1 + mm'} \right| \quad (\text{단, } mm' \neq -1)$$

(i)  $\theta = \alpha - \beta$



(ii)  $\theta = \pi - (\alpha - \beta)$



**예** 두 직선  $y = 2x, y = \frac{1}{3}x$ 가 이루는 예각의 크기를 구해 보자.

두 직선이 이루는 각의 크기를  $\theta$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ )라 하면  $\tan \theta = \left| \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + 2 \times \frac{1}{3}} \right| = 1$ 이므로  $\theta = \frac{\pi}{4}$ 이다.

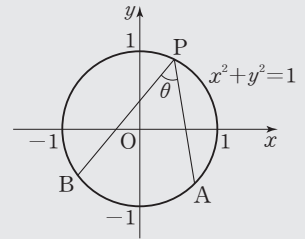
## 예제 3

## 탄젠트함수의 덧셈정리

그림과 같이 원  $x^2+y^2=1$  위의 서로 다른 세 점  $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ,  $B\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ ,

$P(x, y)$ 에 대하여  $\angle APB = \theta$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ )라 할 때,  $\tan 2\theta$ 의 값은?

- ①  $-\frac{15}{2}$       ②  $-7$       ③  $-\frac{13}{2}$       ④  $-6$       ⑤  $-\frac{11}{2}$



**풀이 전략**  $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$

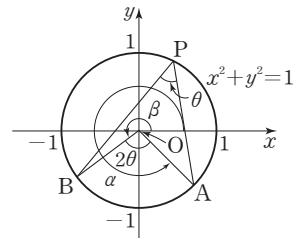
**풀이**  $\angle APB$ 와  $\angle AOB$ 는 각각 호 AB에 대한 원주각과 중심각이므로  
 $\angle AOB = 2\angle APB = 2\theta$ 이다. 이때 동경 OA가 나타내는 각의 크기를  
 $\alpha$  ( $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$ ), 동경 OB가 나타내는 각의 크기를  $\beta$  ( $\pi < \beta < \frac{3}{2}\pi$ )라 하면  
삼각함수의 정의에 의하여

$$\tan \alpha = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1, \quad \tan \beta = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

이때  $2\theta = \alpha - \beta$ 이므로

$$\tan 2\theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{-1 - \frac{3}{4}}{1 + (-1) \times \frac{3}{4}} = -7$$

답 ②



정답과 풀이 20쪽

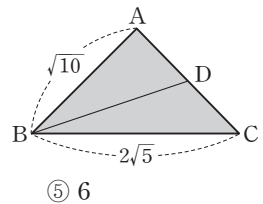
[20010-0066]

유제

5

그림과 같이  $\overline{AB} = \sqrt{10}$ ,  $\overline{BC} = 2\sqrt{5}$ 인 삼각형 ABC에서 변 AC 위의 한 점 D에 대하여  $\tan(\angle ABD) = \frac{1}{2}$ ,  $\tan(\angle DBC) = \frac{1}{3}$ 이다. 삼각형 ABC의 넓이는?

- ① 4      ②  $\frac{9}{2}$       ③ 5      ④  $\frac{11}{2}$



[20010-0067]

유제

6

두 직선  $y = mx - 2$ 와  $y = -\frac{1}{2}x + 2$ 가 이루는 예각의 크기가  $\frac{\pi}{4}$ 일 때, 양수  $m$ 의 값은?

- ①  $\frac{8}{3}$       ② 3      ③  $\frac{10}{3}$       ④  $\frac{11}{3}$       ⑤ 4

## 5. 삼각함수의 극한

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (\text{단, } x \text{의 단위는 라디안이다.})$$

**[설명]** 그림과 같이 중심각의 크기가  $x$  (라디안)이고 반지름의 길이가 1인 부채꼴 OAB에 대하여 점 A를 지나고 선분 OA에 수직인 직선과 선분 OB의 연장선의 교점을 T라 하자.

(i)  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 일 때

(삼각형 OAB의 넓이) < (부채꼴 OAB의 넓이) < (삼각형 OAT의 넓이)이므로

$$\frac{1}{2} \times 1^2 \times \sin x < \frac{1}{2} \times 1^2 \times x < \frac{1}{2} \times 1 \times (1 \times \tan x)$$

$$\sin x < x < \tan x \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

$\sin x > 0$ 이므로  $\textcircled{A}$ 의 부등식의 각 변을  $\sin x$ 로 나누면

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{B}$ 의 부등식의 각 변의 역수를 취하면

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$\lim_{x \rightarrow 0+} \cos x = 1, \lim_{x \rightarrow 0+} 1 = 1$ 이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(ii)  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 일 때

$x = -t$ 로 놓으면  $0 < t < \frac{\pi}{2}$ 이고,  $x \rightarrow 0-$ 일 때  $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{-\sin t}{-t} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sin t}{t} = 1$$

따라서 (i), (ii)에서  $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin x}{x} = 1$ 이므로  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 이다.

**[참고]**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{\cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \times \frac{1}{1} = 1$

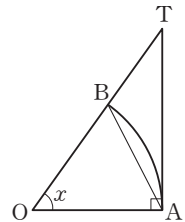
**[예]**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}, \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$ 의 값을 구해 보자.

$2x = t$ 로 놓으면  $x \rightarrow 0$ 일 때  $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 2x}{2x} \times 2 \right) = 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 2 \times 1 = 2$$

$x - \pi = t$ 로 놓으면  $x = \pi + t$ 이고,  $x \rightarrow \pi$ 일 때  $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi + t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t}{t} = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = -1$$



## 예제 4

## 삼각함수의 극한

그림과 같이  $\overline{AB}=1$ ,  $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$ 인 삼각형 ABC의 꼭짓점 B에서 변 AC에 내린 수선의 발을 H라 하고, 선분 BH 위의 한 점을 P라 하자.  $\angle CAB=\angle BCP=\theta$ 이고, 삼각형 PCH의 넓이를  $S(\theta)$ 라 할 때,  $\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3}$ 의 값은? (단,  $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ )

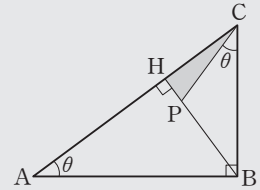
①  $\frac{1}{16}$

②  $\frac{1}{8}$

③  $\frac{1}{4}$

④  $\frac{1}{2}$

⑤ 1



**풀이 전략**  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1, \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan \theta}{\theta} = 1, \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan \theta}$

**풀이**  $\overline{BC} = \overline{AB} \times \tan \theta = 1 \times \tan \theta = \tan \theta$

삼각형 ABH와 삼각형 BCH는 닮음이므로  $\angle CBH = \theta, \angle BCH = \frac{\pi}{2} - \theta$

또  $\angle PCH = \angle BCH - \angle BCP = \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - \theta = \frac{\pi}{2} - 2\theta$

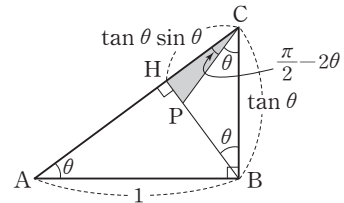
$\overline{CH} = \overline{BC} \times \sin \theta = \tan \theta \times \sin \theta = \tan \theta \sin \theta$

$\overline{PH} = \overline{CH} \times \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) = \tan \theta \sin \theta \times \frac{1}{\tan 2\theta} = \frac{\tan \theta \sin \theta}{\tan 2\theta}$

따라서  $S(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{CH} \times \overline{PH} = \frac{1}{2} \times \tan \theta \sin \theta \times \frac{\tan \theta \sin \theta}{\tan 2\theta} = \frac{(\tan \theta \sin \theta)^2}{2 \tan 2\theta}$  이므로

$\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3} = \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{(\tan \theta \sin \theta)^2}{2\theta^3 \tan 2\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left\{ \frac{1}{4} \times \left(\frac{\tan \theta}{\theta}\right)^2 \times \left(\frac{\sin \theta}{\theta}\right)^2 \times \frac{2\theta}{\tan 2\theta} \right\} = \frac{1}{4} \times 1^2 \times 1^2 \times 1 = \frac{1}{4}$

정답 ③



정답과 풀이 20쪽

[20010-0068]

유제

7

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos x}$ 의 값은?

①  $\frac{1}{16}$

②  $\frac{1}{8}$

③  $\frac{1}{4}$

④  $\frac{1}{2}$

⑤ 1

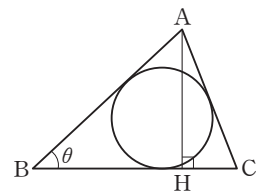
[20010-0069]

유제

8

그림과 같이  $\angle ABC = \theta$ 인 예각삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자.  $\overline{AH} = \sin \theta$ ,  $\overline{AC} = \sqrt{2 - 2 \cos \theta}$ 이고, 삼각형 ABC에 내접하는 원의 반지름의 길이를  $r(\theta)$ 라 할 때,

$\lim_{\theta \rightarrow 0+} \left\{ \left( \frac{1}{2r(\theta)} - \frac{1}{\overline{AH}} \right) \times \frac{\overline{AC}}{\theta} \right\} = \alpha$ 이다.  $120\alpha$ 의 값을 구하시오.



## 6. 사인함수와 코사인함수의 미분

(1)  $y = \sin x$ 이면  $y' = \cos x$

(2)  $y = \cos x$ 이면  $y' = -\sin x$

**설명** (1)  $f(x) = \sin x$ 라 하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \sin h - \sin x(1 - \cos h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \cos x \times \frac{\sin h}{h} - \sin x \times \frac{1 - \cos h}{h} \right) \end{aligned}$$

이때  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ 이고,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos h)(1 + \cos h)}{h(1 + \cos h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 h}{h(1 + \cos h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin^2 h}{h(1 + \cos h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\sin h}{h} \times \frac{\sin h}{1 + \cos h} \right) = 1 \times \frac{0}{1 + 1} = 0 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} - \sin x \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} \\ &= \cos x \times 1 - \sin x \times 0 = \cos x \end{aligned}$$

따라서  $y = \sin x$ 이면  $y' = \cos x$

(2)  $g(x) = \cos x$ 라 하면

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin x \sin h - \cos x(1 - \cos h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( -\sin x \times \frac{\sin h}{h} - \cos x \times \frac{1 - \cos h}{h} \right) \\ &= -\sin x \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} - \cos x \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} \\ &= -\sin x \times 1 - \cos x \times 0 = -\sin x \end{aligned}$$

따라서  $y = \cos x$ 이면  $y' = -\sin x$

**예** 함수  $f(x) = \cos x + x \sin x$ 의 도함수를 구해 보자.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\cos x)' + \{(x)' \times \sin x + x \times (\sin x)'\} \\ &= -\sin x + (1 \times \sin x + x \times \cos x) = x \cos x \end{aligned}$$





## 예제 5

### 사인함수와 코사인함수의 미분

함수  $f(x) = e^x(\sin x + \cos x)$ 에 대하여 함수  $g(x)$ 를  $g(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) + f(x-h) - 2f(x)}{h}$ 라 할 때,

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - 2e^x}{x^2}$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

**풀이 전략** (1) 미분가능한 함수  $f(x)$ 에 대하여  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

(2)  $(\sin x)' = \cos x$ ,  $(\cos x)' = -\sin x$

**풀이**  $f'(x) = (e^x)' \times (\sin x + \cos x) + e^x \times (\sin x + \cos x)'$

$$= e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) = 2e^x \cos x$$

$$g(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) + f(x-h) - 2f(x)}{h} = 2 \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - f(x)}{2h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h}$$

$$= 2 \times f'(x) - f'(x) = f'(x) = 2e^x \cos x$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - 2e^x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x \cos x - 2e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( -2e^x \times \frac{1 - \cos x}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ -2e^x \times \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ -2e^x \times \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ -2e^x \times \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 \times \frac{1}{1 + \cos x} \right\} = -2 \times 1^2 \times \frac{1}{1 + 1} = -1 \end{aligned}$$

답 ②

정답과 풀이 21쪽

[20010-0070]

유제

**9** 함수  $f(x) = e^x \cos x$ 에 대하여 방정식  $f'(x) = 0$ 을 만족시키는 모든 실근의 합은? (단,  $0 < x < 2\pi$ )

①  $\frac{\pi}{2}$

②  $\frac{3}{4}\pi$

③  $\pi$

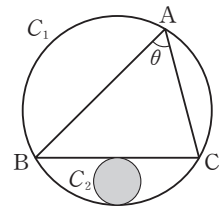
④  $\frac{5}{4}\pi$

⑤  $\frac{3}{2}\pi$

[20010-0071]

유제

**10** 그림과 같이 예각삼각형 ABC에 외접하는 원  $C_1$ 의 반지름의 길이는 2이다. 원  $C_1$ 과 선분 BC로 둘러싸인 두 부분 중 넓이가 작은 쪽에서 원  $C_1$ 과 선분 BC에 동시에 접하는 원을 그렸을 때, 그 크기가 가장 큰 원을  $C_2$ 라 하자.  $\angle CAB = \theta$ 일 때 원  $C_2$ 의 넓이를  $f(\theta)$ 라 하면  $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = k\pi$ 이다.  $20k^2$ 의 값을 구하시오.

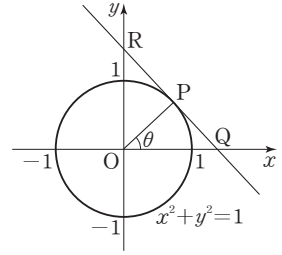


[20010-0072]

- 1 그림과 같이 원  $x^2+y^2=1$  위의 점 P에서의 접선이  $x$ 축과 만나는 점을 Q,  $y$ 축과 만나는 점을 R라 하자.  $\angle POQ = \theta$ 라 할 때, 다음 중  $\cot \theta$ 와 항상 같은 것은?

(단, O는 원점이고,  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이다.)

- ①  $\overline{OQ}$                       ②  $\overline{OR}$                       ③  $\overline{PQ}$   
 ④  $\overline{PR}$                       ⑤  $\overline{QR}$



[20010-0073]

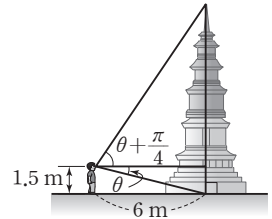
- 2 닫힌구간  $[0, \pi]$ 에서 함수  $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin x + a$ 의 최솟값이  $-1$ 일 때, 상수  $a$ 의 값은?

- ①  $-2$                       ②  $-1$                       ③  $0$                       ④  $1$                       ⑤  $2$

[20010-0074]

- 3 그림과 같이 탑의 밑부분의 중심으로부터  $6\text{ m}$  떨어진 지점에서 눈높이가  $1.5\text{ m}$ 인 학생이 눈높이를 기준으로 탑의 밑부분의 중심을 내려다본 각의 크기가  $\theta$ 이고, 눈높이를 기준으로 탑의 꼭대기를 올려다본 각의 크기가  $\theta + \frac{\pi}{4}$ 이다. 이 탑의 높이를  $h\text{ m}$ 라 할 때,  $10h$ 의 값을 구하시오.

(단, 탑의 밑부분의 중심과 꼭대기를 지나는 직선은 지면에 수직이다.)



[20010-0075]

- 4  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{e^{2x} - 1}$ 의 값은?

- ①  $\frac{1}{4}$                       ②  $\frac{1}{2}$                       ③  $1$                       ④  $2$                       ⑤  $4$

[20010-0076]

- 5 함수  $f(x) = (x + \pi) \sin x$ 에 대하여  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2} + h\right) - f\left(\frac{\pi}{2} - h\right)}{2h}$ 의 값은?

- ①  $\frac{1}{4}$                       ②  $\frac{1}{2}$                       ③  $1$                       ④  $2$                       ⑤  $4$

[20010-0077]

- 1 이차방정식  $x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 두 실근을  $\cot \alpha$ ,  $\cot \beta$ 라 할 때,  $\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ 의 값은?  
 (단,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ )

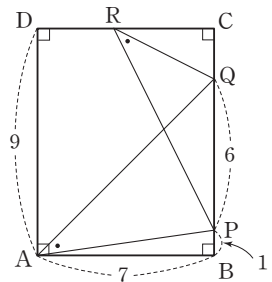
- ①  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$       ②  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$       ③ 0      ④  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       ⑤  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

[20010-0078]

- 2 그림과 같이  $\overline{AB}=7$ ,  $\overline{AD}=9$ 인 직사각형 ABCD가 있다. 선분 BC 위의 두 점 P, Q와 선분 CD 위의 한 점 R가 다음 조건을 만족시킬 때,  $\overline{AR}^2$ 의 값을 구하시오.

(가)  $\overline{BP}=1$ ,  $\overline{PQ}=6$

(나)  $\angle PAQ = \angle PRQ$

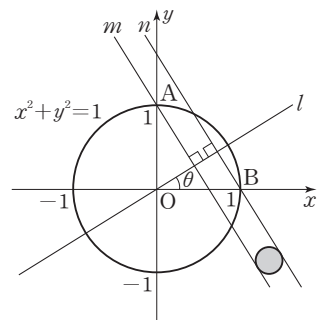


[20010-0079]

- 3 그림과 같이 원  $x^2 + y^2 = 1$ 의 중심을 지나고 기울기가 양수인 직선  $l$ 이  $x$ 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를  $\theta$ 라 하자. 또 점 A(0, 1)을 지나고 직선  $l$ 에 수직인 직선을  $m$ , 점 B(1, 0)을 지나고 직선  $l$ 에 수직인 직선을  $n$ 이라 하자. 두 직선  $m$ ,  $n$ 에 동시에 접하는 원의 넓이를  $S(\theta)$ 라 할 때,

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{S(\theta)}{\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)^2} \text{의 값은? (단, } \theta \neq \frac{\pi}{4} \text{)}$$

- ①  $\frac{\pi}{6}$       ②  $\frac{\pi}{4}$       ③  $\frac{\pi}{3}$       ④  $\frac{\pi}{2}$       ⑤  $\frac{2}{3}\pi$



[20010-0080]

- 4 함수  $f(x) = 2 \sin x$ 일 때,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(\sin x)}{1 - \cos x}$ 의 값은?

- ①  $\frac{1}{4}$       ②  $\frac{1}{2}$       ③ 1      ④ 2      ⑤ 4

[20010-0081]

1

원점  $O$ 를 지나는 두 직선  $y=x$ ,  $y=2x$ 와 직선  $y=mx+1-m$ 이 만나는 두 점을 각각  $A$ ,  $B$ 라 하고, 직선  $y=mx+1-m$ 이  $x$ 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를  $\theta$ 라 하자. 두 점  $A$ ,  $B$ 가 제1사분면에 있고, 삼각형  $OAB$ 가 이등변삼각형이 되도록 하는 모든  $\theta$ 의 값의 합을  $\omega$ 라 할 때,  $\tan \omega$ 의 값은?

(단,  $m>0$ ,  $m \neq 1$ ,  $m \neq 2$ )

- ①  $-\frac{7}{2}$       ②  $-3$       ③  $-\frac{5}{2}$       ④  $-2$       ⑤  $-\frac{3}{2}$

[20010-0082]

2

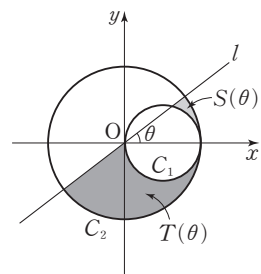
그림과 같이 원점  $O$ 를 지나고  $x$ 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가  $\theta$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ )인 직선을  $l$ 이라 하자. 두 원

$$C_1 : (x-2)^2 + y^2 = 4, C_2 : x^2 + y^2 = 16$$

과 직선  $l$ 로 둘러싸인 도형 중 직선  $l$ 의 아래쪽에 있으면서 제1사분면에 있는 색칠한 부분의 넓이를  $S(\theta)$ , 제3사분면, 제4사분면에 있는 색칠한 부분의 넓이를  $T(\theta)$

라 할 때,  $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta) - 4\theta + 4 \sin \theta}{\theta^2 \{6\pi - T(\theta)\}}$ 의 값은?

- ①  $\frac{1}{16}$       ②  $\frac{1}{8}$       ③  $\frac{1}{4}$       ④  $\frac{1}{2}$       ⑤ 1

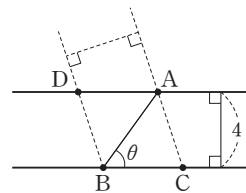


[20010-0083]

3

그림과 같이 폭이 4로 일정한 종이의 윗변의 한 점을  $A$ , 아랫변의 한 점을  $B$ 라 하자. 선분  $AB$ 를 접는 선으로 종이를 접어서 아랫변의 점  $C$ 와 윗변의 점  $D$ 가 일치할 때,  $\angle ABC = \theta$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ )라 하자. 사각형  $ADBC$ 의 넓이를  $S(\theta)$ 라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, 종이의 윗변과 아랫변은 평행한 선분이고 종이의 길이는 충분히 길다.)



보기

ㄱ.  $S\left(\frac{\pi}{4}\right) = 16$

ㄴ.  $S(\theta) = 48$ 이면  $\sin \theta + \cos \theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 이다.

ㄷ.  $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{6 \times \left\{ S\left(\frac{\pi}{6}\right) - S(\theta) \right\}}{(6\theta - \pi) \times S\left(\frac{\pi}{6}\right) \times S(\theta)} = \frac{1}{8}$

- ① ㄱ      ② ㄴ      ③ ㄱ, ㄴ      ④ ㄴ, ㄷ      ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

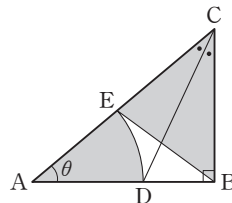


## 대표 기출 문제

출제  
경향

삼각함수의 덧셈정리를 이용하는 문제와 도형에서 삼각함수의 극한을 이용하여 극한값을 구하는 문제가 출제된다.

그림과 같이  $\overline{AB}=1$ ,  $\angle B=\frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형 ABC에서  $\angle C$ 를 이등분하는 직선과 선분 AB의 교점을 D, 중심이 A이고 반지름의 길이가  $\overline{AD}$ 인 원과 선분 AC의 교점을 E라 하자.  $\angle A=\theta$ 일 때, 부채꼴 ADE의 넓이를  $S(\theta)$ , 삼각형 BCE의 넓이를  $T(\theta)$ 라 하자.  $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\{S(\theta)\}^2}{T(\theta)}$ 의 값은? [4점]



- ①  $\frac{1}{4}$                       ②  $\frac{1}{2}$                       ③  $\frac{3}{4}$                       ④ 1                      ⑤  $\frac{5}{4}$

2019학년도 대수능

**출제 의도** ▶ 도형의 넓이를 삼각함수로 나타내고 극한값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

**풀이** 직각삼각형 ABC에서  $\overline{AB}=1$ ,  $\angle A=\theta$ 이므로  $\overline{AC}=\sec \theta$ ,  $\overline{BC}=\tan \theta$   
이때  $\overline{AD}=k$ 라 하면 선분 CD가  $\angle C$ 를 이등분하므로  $\overline{AD}:\overline{BD}=\overline{AC}:\overline{BC}$

$$k:(1-k)=\sec \theta:\tan \theta, k=\frac{\sec \theta}{\sec \theta+\tan \theta}=\frac{1}{1+\sin \theta}$$

$$\text{즉, } \overline{AD}=\frac{1}{1+\sin \theta} \text{이므로 } S(\theta)=\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{1+\sin \theta}\right)^2 \times \theta = \frac{\theta}{2(1+\sin \theta)^2}$$

$$\text{한편 } \overline{CE}=\overline{AC}-\overline{AE}=\overline{AC}-\overline{AD} \text{에서 } \overline{CE}=\sec \theta - \frac{1}{1+\sin \theta} = \frac{1+\sin \theta - \cos \theta}{(1+\sin \theta) \cos \theta} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} T(\theta) &= \frac{1}{2} \times \overline{CE} \times \overline{BC} \times \sin(\angle C) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1+\sin \theta - \cos \theta}{(1+\sin \theta) \cos \theta} \times \tan \theta \times \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{(1+\sin \theta - \cos \theta) \sin \theta}{2(1+\sin \theta) \cos \theta} \end{aligned}$$

따라서

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\{S(\theta)\}^2}{T(\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\left\{\frac{\theta}{2(1+\sin \theta)^2}\right\}^2}{\frac{(1+\sin \theta - \cos \theta) \sin \theta}{2(1+\sin \theta) \cos \theta}}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{1}{2} \times \frac{\cos \theta}{(1+\sin \theta)^3} \times \frac{\theta}{\sin \theta} \times \frac{\theta}{1+\sin \theta - \cos \theta} \right\}$$

$$\text{이때 } \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\theta}{1+\sin \theta - \cos \theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{\sin \theta}{\theta} + \frac{1-\cos \theta}{\theta}} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{\sin \theta}{\theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\theta(1+\cos \theta)}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

이므로

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\{S(\theta)\}^2}{T(\theta)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{(1+0)^3} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

답 ②

## 여러 가지 미분법

### 1. 함수의 몫의 미분법

두 함수  $f(x)$ ,  $g(x)$  ( $g(x) \neq 0$ )이 미분가능할 때

$$(1) y = \frac{1}{g(x)} \text{ 이면 } y' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

$$(2) y = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ 이면 } y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

**설명** (1) 함수  $y = \frac{1}{g(x)}$ 에 대하여

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{g(x+\Delta x)} - \frac{1}{g(x)}}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{g(x+\Delta x)g(x)}}{\Delta x} \\ &= -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \times \frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)} \right\} \\ &= -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \times \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)} \\ &= -g'(x) \times \frac{1}{\{g(x)\}^2} = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2} \end{aligned}$$

(2) 함수  $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ 에 대하여  $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \frac{1}{g(x)}$ 이므로

$$\begin{aligned} y' &= f'(x) \times \frac{1}{g(x)} + f(x) \times \left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}' \\ &= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2} \end{aligned}$$

**예** ① 함수  $y = \frac{1}{2x+1}$ 의 도함수를 구해 보자.

$$y' = -\frac{(2x+1)'}{(2x+1)^2} = -\frac{2}{(2x+1)^2}$$

② 함수  $y = \frac{x}{x+1}$ 의 도함수를 구해 보자.

$$y' = \frac{(x)' \times (x+1) - x \times (x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

### 2. 함수 $y = x^n$ ( $n$ 은 정수)의 도함수

$n$ 이 정수일 때,  $y = x^n$ 이면  $y' = nx^{n-1}$

**설명**  $n$ 이 0 또는 양의 정수일 때, 함수  $y = x^n$ 의 도함수는  $y' = nx^{n-1}$

$n$ 이 음의 정수일 때,  $n = -m$  ( $m$ 은 양의 정수)로 놓으면

$$y' = (x^n)' = (x^{-m})' = \left( \frac{1}{x^m} \right)' = -\frac{(x^m)'}{(x^m)^2} = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1} = nx^{n-1}$$

**예** 함수  $y = x^{-2}$ 의 도함수를 구해 보자.

$$y' = (x^{-2})' = -2x^{-2-1} = -2x^{-3}$$



## 예제 1

## 함수의 몫의 미분법

함수  $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$ 에 대하여  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\pi + 2h)f(\pi + h) + \pi}{h}$ 의 값은?

- ①  $-\pi - 2$       ②  $-\pi - 1$       ③  $-\pi$       ④  $\pi - 2$       ⑤  $\pi - 1$

**풀이 전략** (1)  $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

(2)  $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ 이면  $y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

**풀이**  $f(\pi) = -1$ 에서  $\pi = -\pi f(\pi)$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\pi + 2h)f(\pi + h) + \pi}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\pi + 2h)f(\pi + h) - \pi f(\pi)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{\pi \{f(\pi + h) - f(\pi)\}}{h} + 2f(\pi + h) \right] \\ &= \pi f'(\pi) + 2f(\pi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\sin x \times (1 + \sin x) - \cos x \times \cos x}{(1 + \sin x)^2} = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x) - \sin x}{(1 + \sin x)^2} \\ &= \frac{-1 - \sin x}{(1 + \sin x)^2} = -\frac{1}{1 + \sin x} \end{aligned}$$

$f'(\pi) = -1$ 이므로

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\pi + 2h)f(\pi + h) + \pi}{h} = \pi f'(\pi) + 2f(\pi) = \pi \times (-1) + 2 \times (-1) = -\pi - 2$$

답 ①

정답과 풀이 28쪽

[20010-0084]

**유제 1** 함수  $f(x) = \sum_{k=1}^{10} \frac{(-1)^{k+1}}{x^{2k-1}}$ 에 대하여  $f'(1)$ 의 값은?

- ① 10      ② 12      ③ 14      ④ 16      ⑤ 18

[20010-0085]

**유제 2** 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수  $f(x)$ 에 대하여 함수  $g(x) = \frac{1+f(x)}{x^2}$ 라 하자.

$f'(2) - f(2) = 16$ 일 때, 곡선  $y = g(x)$  위의 점  $(2, g(2))$ 에서의 접선의 기울기는?

- ①  $\frac{13}{4}$       ②  $\frac{7}{2}$       ③  $\frac{15}{4}$       ④ 4      ⑤  $\frac{17}{4}$

### 3. 삼각함수의 도함수

(1)  $y = \tan x$ 이면  $y' = \sec^2 x$

(2)  $y = \sec x$ 이면  $y' = \sec x \tan x$

(3)  $y = \cot x$ 이면  $y' = -\csc^2 x$

(4)  $y = \csc x$ 이면  $y' = -\csc x \cot x$

**설명** (1)  $y' = (\tan x)' = \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \times \cos x - \sin x \times (\cos x)'}{\cos^2 x}$   
 $= \frac{\cos x \times \cos x - \sin x \times (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

마찬가지 방법으로 몫의 미분법을 이용하여 (2), (3), (4)의 삼각함수의 도함수를 구할 수 있다.

**예** 함수  $y = \tan x \sec x$ 의 도함수를 구해 보자.

$$\begin{aligned} y' &= (\tan x)' \times \sec x + \tan x \times (\sec x)' \\ &= \sec^2 x \times \sec x + \tan x \times \sec x \tan x \\ &= \sec^3 x + \tan^2 x \sec x \end{aligned}$$

### 4. 합성함수의 미분법

두 함수  $y = f(u)$ ,  $u = g(x)$ 가 미분가능할 때, 합성함수  $y = f(g(x))$ 도 미분가능하며 그 도함수는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \quad \text{또는} \quad y' = f'(g(x))g'(x)$$

**설명** 함수  $u = g(x)$ 에서  $x$ 의 증분  $\Delta x$ 에 대한  $u$ 의 증분을  $\Delta u$ 라 하고, 함수  $y = f(u)$ 에서  $u$ 의 증분  $\Delta u$ 에 대한  $y$ 의 증분을  $\Delta y$ 라 하면

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad (\Delta u \neq 0)$$

이때 두 함수  $y = f(u)$ ,  $u = g(x)$ 가 미분가능하므로

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{dy}{du}, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}$$

한편 미분가능한 함수  $u = g(x)$ 는 연속이므로  $\Delta x \rightarrow 0$ 이면  $\Delta u \rightarrow 0$ 이다.

따라서 다음이 성립한다.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

또한  $\frac{dy}{du} = f'(u) = f'(g(x))$ 이고,  $\frac{du}{dx} = g'(x)$ 이므로

$$y' = \{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$$

**예** 함수  $y = (x^2 + 1)^3$ 의 도함수를 구해 보자.

$$u = x^2 + 1 \text{이라 하면 } y = u^3 \text{이고 } \frac{dy}{du} = 3u^2, \frac{du}{dx} = 2x \text{이므로}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = 3u^2 \times 2x = 6x(x^2 + 1)^2$$

**참고** 함수  $f(x)$ 가 미분가능할 때, 함수  $y = \{f(x)\}^n$  ( $n$ 은 정수)는 미분가능하고 그 도함수는

$$y' = n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$$





## 예제 2

### 합성함수의 미분법

함수  $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$  일 때,  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{f(x)} - 1}{x^3 - 1}$  의 값은?

①  $-\frac{\pi}{3}$

②  $-\frac{\pi}{6}$

③ 0

④  $\frac{\pi}{6}$

⑤  $\frac{\pi}{3}$

**풀이 전략** 두 함수  $y=g(u)$ ,  $u=f(x)$  가 미분가능할 때

$$(1) f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$(2) \text{ 합성함수 } y=g(f(x)) \text{ 의 도함수는 } y'=g'(f(x))f'(x)$$

**풀이**  $g(u)=e^u$  이라 하면  $e^{f(x)}=g(f(x))$

$$h(x)=g(f(x)) \text{ 라 하면 } f(1)=\cos \frac{\pi}{2}=0 \text{ 이므로}$$

$$h(1)=g(f(1))=g(0)=e^0=1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{f(x)} - 1}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(f(x)) - g(f(1))}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} \times \frac{1}{x^2 + x + 1} \right\} = h'(1) \times \frac{1}{3}$$

$$\text{한편 } f'(x) = \left[ \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right]' = -\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \times \left(\frac{\pi}{2}x\right)' = -\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \text{ 에서}$$

$$f'(1) = -\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

$$g'(u) = (e^u)' = e^u \text{ 에서 } g'(0) = e^0 = 1$$

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x) \text{ 에서 } h'(1) = g'(f(1))f'(1) = g'(0)f'(1) = 1 \times \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{따라서 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{f(x)} - 1}{x^3 - 1} = h'(1) \times \frac{1}{3} = -\frac{\pi}{2} \times \frac{1}{3} = -\frac{\pi}{6}$$

답 ②

정답과 풀이 28쪽

[20010-0086]

유제

**3** 함수  $f(x) = e^{4x} \tan 2x$  에 대하여  $f'\left(\frac{\pi}{8}\right)$  의 값은?

①  $6e^{\frac{\pi}{2}}$

②  $7e^{\frac{\pi}{2}}$

③  $8e^{\frac{\pi}{2}}$

④  $9e^{\frac{\pi}{2}}$

⑤  $10e^{\frac{\pi}{2}}$

[20010-0087]

유제

**4** 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수  $f(x)$ ,  $g(x)$  에 대하여 함수  $h(x) = f(g(x))$  라 하자.

$g(1)=1$ ,  $h'(1)=-4$  일 때, 곡선  $y=f\left(\frac{1}{g(x)}\right)$  ( $g(x) \neq 0$ ) 위의 점  $(1, f(1))$  에서의 접선의 기울기는?

①  $\frac{1}{4}$

②  $\frac{1}{2}$

③ 1

④ 2

⑤ 4

## 5. 로그함수의 도함수

(1)  $y = \ln |x|$  이면  $y' = \frac{1}{x}$

(2)  $y = \log_a |x|$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) 이면  $y' = \frac{1}{x \ln a}$

**설명** (1) 함수  $y = \ln |x|$ 의 정의역은  $\{x | x \neq 0 \text{인 실수}\}$ 이므로

(i)  $x > 0$ 일 때,  $y = \ln |x| = \ln x$ 이므로  $y' = \frac{1}{x}$

(ii)  $x < 0$ 일 때,  $y = \ln |x| = \ln (-x)$ 이므로 합성함수의 미분법에 의해서

$$y' = \frac{1}{-x} \times (-x)' = \frac{1}{-x} \times (-1) = \frac{1}{x}$$

(i), (ii)에서  $y' = \frac{1}{x}$

(2)  $y' = (\log_a |x|)' = \left( \frac{\ln |x|}{\ln a} \right)' = (\ln |x|)' \times \frac{1}{\ln a} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{\ln a} = \frac{1}{x \ln a}$

**참고** 함수  $f(x)$  ( $f(x) \neq 0$ )이 미분가능할 때, 함수  $y = \ln |f(x)|$ 의 도함수는  $y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ 이다.

**설명**  $u = f(x)$ 라 하면  $y = \ln |u|$ 이고  $\frac{dy}{du} = \frac{1}{u}, \frac{du}{dx} = f'(x)$ 이므로

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \times f'(x) = \frac{1}{f(x)} \times f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

## 6. 매개변수로 나타낸 함수의 미분법

(1) 두 변수  $x, y$  사이의 관계를 변수  $t$ 를 매개로 하여

$$x = f(t), y = g(t)$$

로 나타낼 때 변수  $t$ 를 매개변수라 하고, 이 함수를 매개변수로 나타낸 함수라 한다.

(2) 매개변수로 나타낸 함수  $x = f(t), y = g(t)$ 에서 두 함수  $f(t), g(t)$ 가 미분가능하고  $f'(t) \neq 0$ 일 때,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

**설명** 매개변수  $t$ 의 증분  $\Delta t$ 에 대한  $x$ 의 증분을  $\Delta x$ ,  $y$ 의 증분을  $\Delta y$ 라 하자. 이때  $x = f(t)$ 는  $t$ 에 대하여 미분가능하므로 연속이고  $f'(t) \neq 0$ 이므로  $\Delta x \rightarrow 0$ 이면  $\Delta t \rightarrow 0$ 이다. 따라서

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}}{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

**예** 매개변수  $t$ 로 나타낸 함수  $x = e^t + 1, y = e^{2t} + e^t + 1$ 의  $t = 0$ 에서의 미분계수를 구해 보자.

$$\frac{dx}{dt} = e^t, \frac{dy}{dt} = 2e^{2t} + e^t \text{이므로 } \frac{dy}{dx} = \frac{2e^{2t} + e^t}{e^t} = 2e^t + 1$$

따라서  $t = 0$ 에서 주어진 함수의 미분계수는

$$2 \times e^0 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$$



### 예제 3

### 매개변수로 나타낸 함수의 미분법

매개변수  $t$  ( $|t| > \sqrt{3}$ )로 나타낸 곡선  $x=t^3+t-9$ ,  $y=13 \ln(t^2-3)$  위의 점  $P(1, k)$ 에서의 접선의 기울기를  $m$ 이라 할 때,  $k+m$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

**풀이 전략** (1) 함수  $f(x)$  ( $f(x) \neq 0$ )이 미분가능할 때, 함수  $y=\ln|f(x)|$ 의 도함수는  $y'=\frac{f'(x)}{f(x)}$ 이다.

(2) 매개변수로 나타낸 함수  $x=f(t)$ ,  $y=g(t)$ 에서 두 함수  $f(t)$ ,  $g(t)$ 가 미분가능하고  $f'(t) \neq 0$ 일 때,  $\frac{dy}{dx}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$ 이다.

**풀이**  $x=1$ 에서  $t^3+t-9=1$ ,  $t^3+t-10=0$ ,  $(t-2)(t^2+2t+5)=0$

$t^2+2t+5=(t+1)^2+4>0$ 이므로  $t=2$

곡선 위의 점 중에서  $x$ 좌표가 1이 되도록 하는  $t$ 의 값은  $t=2$ 이므로

$$k=13 \ln(2^2-3)=0$$

즉, 점 P의 좌표는 (1, 0)이다.

한편  $\frac{dx}{dt}=3t^2+1$ ,  $\frac{dy}{dt}=13 \times \frac{(t^2-3)'}{t^2-3}=13 \times \frac{2t}{t^2-3}=\frac{26t}{t^2-3}$ 이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{26t}{t^2-3}}{3t^2+1}=\frac{26t}{(3t^2+1)(t^2-3)} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 P에서의 접선의 기울기는 ①에  $t=2$ 를 대입한 값과 같으므로

$$m=\frac{26 \times 2}{(3 \times 2^2+1)(2^2-3)}=4$$

따라서  $k+m=0+4=4$

**답** ④

정답과 풀이 28쪽

[20010-0088]

**유제**

**5** 매개변수  $\theta$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ )로 나타낸 곡선  $x=\ln|\cos \theta|$ ,  $y=\ln|\sin 2\theta|$ 에 대하여  $\theta=\frac{\pi}{3}$ 에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는?

①  $\frac{1}{6}$ ②  $\frac{1}{3}$ ③  $\frac{1}{2}$ ④  $\frac{2}{3}$ ⑤  $\frac{5}{6}$ 

[20010-0089]

**유제**

**6** 매개변수  $t$ 로 나타낸 곡선  $x=\ln t$ ,  $y=t^2-4t$  위의 임의의 점에서의 접선의 기울기를  $m(t)$ 라 하자.  $m(t)$ 가 최소가 되도록 하는 곡선 위의 점을 P(a, b)라 하고,  $m(t)$ 의 최솟값을 c라 할 때,  $a^2+b^2+c^2$ 의 값을 구하시오. (단,  $t>0$ )

## 7. 음함수의 미분법

### (1) 음함수

방정식  $f(x, y)=0$ 에서  $x$ 와  $y$ 의 값의 범위를 적당히 정하면  $y$ 는  $x$ 에 대한 함수가 된다. 이와 같은 의미에서  $x$ 에 대한 함수  $y$ 가

$$f(x, y)=0$$

의 꼴로 주어졌을 때, 이 방정식을  $y$ 의  $x$ 에 대한 음함수 표현 또는 간단히 음함수라 한다.

**설명** 원의 방정식  $x^2+y^2=1$ 에서  $y$ 는  $x$ 에 대한 함수가 아니다. 하지만

$$y \geq 0 \text{ 일 때, } y = \sqrt{1-x^2}$$

$$y \leq 0 \text{ 일 때, } y = -\sqrt{1-x^2}$$

은 각각 닫힌구간  $[-1, 1]$ 에서 정의되는 함수가 된다. 방정식  $x^2+y^2=1$ ,  $y^2=4x$ ,  $x^2+2y^2=2$ ,  $x^2-y^2=1$ ,  $xy=1$  등은 모두 음함수이다.

### (2) 음함수의 미분

$x$ 의 함수  $y$ 가 음함수  $f(x, y)=0$ 의 꼴로 주어질 때에는  $y$ 를  $x$ 의 함수로 보고, 각 항을  $x$ 에 대하여 미분하여  $\frac{dy}{dx}$ 를 구한다.

**예** 음함수  $y^2-x=0$ 에서  $\frac{dy}{dx}$ 를 구해 보자.

$$y \text{를 } x \text{의 함수로 보고 양변을 각각 미분하면 } \frac{d}{dx}(y^2)-1=0$$

$$\text{합성함수의 미분법에 의해서 } \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dy}(y^2) \times \frac{dy}{dx} = 2y \frac{dy}{dx} \text{ 이므로}$$

$$2y \frac{dy}{dx} - 1 = 0, \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y} \quad (y \neq 0)$$

**참고** ① 함수  $y=x^r$  ( $r$ 는 유리수,  $x>0$ )의 도함수는  $y'=rx^{r-1}$

② 함수  $y=x^a$  ( $a$ 는 실수,  $x>0$ )의 도함수는  $y'=ax^{a-1}$

**설명** ①  $r = \frac{n}{m}$  ( $m, n$ 은 서로소인 정수,  $m \neq 0$ )으로 놓고  $y=x^{\frac{n}{m}}$ 에서 양변을  $m$ 제곱하면

$$y^m = x^n$$

양변을  $x$ 에 대하여 각각 미분하면  $m, n$ 은 정수이므로

$$\frac{d}{dx}(y^m) = \frac{d}{dx}(x^n), \quad my^{m-1} \times \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{nx^{n-1}}{my^{m-1}} = \frac{n}{m} \times \frac{x^{n-1}}{(x^{\frac{n}{m}})^{m-1}} = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1} = rx^{r-1}$$

②  $y=x^a$ 의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln y = \ln x^a, \quad \ln y = a \ln x$$

양변을 각각  $x$ 에 대하여 미분하면  $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{a}{x}$  이므로

$$\frac{dy}{dx} = y \times \frac{a}{x} = x^a \times \frac{a}{x} = ax^{a-1}$$



## 예제 4

## 음함수의 미분법

곡선  $x^2 - y^2 = \ln |xy|$  위의 점  $(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기는?

- ①  $\frac{1}{5}$       ②  $\frac{1}{4}$       ③  $\frac{1}{3}$       ④  $\frac{1}{2}$       ⑤ 1

**풀이 전략**  $x$ 의 함수  $y$ 가 음함수  $f(x, y) = 0$ 의 꼴로 주어질 때에는  $y$ 를  $x$ 의 함수로 보고, 각 항을  $x$ 에 대하여 미분하여  $\frac{dy}{dx}$ 를 구한다.

**풀이** 합성함수의 미분법에 의해서

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dy}(y^2) \times \frac{dy}{dx} = 2y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\ln |xy|) = \frac{\frac{d}{dx}(xy)}{xy} = \frac{y + x \frac{dy}{dx}}{xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx}$$

$x^2 - y^2 = \ln |xy|$ 의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(\ln |xy|)$$

$$2x - 2y \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx}, \quad \left(2y + \frac{1}{y}\right) \frac{dy}{dx} = 2x - \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x^2 - 1)y}{x(2y^2 + 1)} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

따라서 곡선 위의 점  $(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 ①에  $x=1, y=1$ 을 대입한 값이므로  $\frac{1}{3}$ 이다.

답 ③

정답과 풀이 29쪽

[20010-0090]

유제

7

곡선  $2e^x \ln(y+1) + e^y \ln(x+1) = 0$  위의 점  $(0, 0)$ 에서의 접선의 기울기는?

- ①  $-\frac{5}{2}$       ②  $-\frac{3}{2}$       ③  $-\frac{1}{2}$       ④  $\frac{1}{2}$       ⑤  $\frac{3}{2}$

[20010-0091]

유제

8

곡선  $ax^2 - y^2 - 2xy + b = 0$  위의 점  $(2, 1)$ 에서의 접선의 기울기가  $\frac{1}{3}$ 일 때, 두 상수  $a, b$ 의 합  $a+b$ 의 값은?

- ① -2      ② -1      ③ 0      ④ 1      ⑤ 2

## 8. 역함수의 미분법

미분가능한 함수  $f(x)$ 의 역함수  $g(x)$ 가 존재하고 미분가능할 때,

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \quad (\text{단, } f'(g(x)) \neq 0)$$

**설명** 함수  $f(x)$ 의 역함수가  $g(x)$ 이므로

$$f(g(x)) = x$$

이 식의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$f'(g(x))g'(x) = 1, \quad g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \quad (\text{단, } f'(g(x)) \neq 0)$$

**참고** 미분가능한 함수  $f(x)$ 의 역함수  $f^{-1}(x)$ 가 존재하고 미분가능할 때,

$$y = f^{-1}(x) \text{에서 } x = f(y)$$

$$\text{이 식의 양변을 } y \text{에 대하여 미분하면 } \frac{dx}{dy} = f'(y)$$

한편  $x = f(y)$ 의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$1 = \frac{d}{dx} f(y) = \frac{d}{dy} f(y) \times \frac{dy}{dx} = f'(y) \times \frac{dy}{dx}$$

이므로  $f'(y) \neq 0$ 이면

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

**예** 함수  $f(x) = x^3 + x$ 의 역함수를  $g(x)$ 라 할 때,  $g'(2)$ 의 값을 구해 보자.

함수  $g(x)$ 가 함수  $f(x)$ 의 역함수이므로  $g(2) = a$ 로 놓으면  $f(a) = 2$

$$a^3 + a = 2 \text{에서 } (a-1)(a^2 + a + 2) = 0$$

$$a^2 + a + 2 = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0 \text{이므로 } a = 1, \text{ 즉 } g(2) = 1$$

$$f'(x) = 3x^2 + 1 \text{이므로 } f'(1) = 4$$

$$\text{따라서 } g'(2) = \frac{1}{f'(g(2))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}$$

## 9. 이계도함수

함수  $f(x)$ 의 도함수  $f'(x)$ 가 미분가능할 때, 함수  $f'(x)$ 의 도함수

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

를 함수  $y = f(x)$ 의 이계도함수라 하고, 기호로  $y''$ ,  $f''(x)$ ,  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ,  $\frac{d^2}{dx^2} f(x)$ 와 같이 나타낸다.

**예** ① 함수  $y = x^3 + 3x^2$ 의 이계도함수를 구해 보자.

$$y' = (x^3 + 3x^2)' = 3x^2 + 6x \text{에서 } y'' = (3x^2 + 6x)' = 6x + 6$$

② 함수  $y = x \ln x$ 의 이계도함수를 구해 보자.

$$y' = (x \ln x)' = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1 \text{에서 } y'' = (\ln x + 1)' = \frac{1}{x}$$



## 예제 5

### 역함수의 미분법

열린구간  $(0, \frac{\pi}{2})$ 에서 정의된 함수  $f(x) = \ln\left(\frac{\sec x}{\sqrt{2}}\right)$ 의 역함수  $g(x)$ 에 대하여  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4g(x) - \pi}{2x}$ 의 값은?

① 1

②  $\sqrt{3}$ 

③ 2

④  $2\sqrt{3}$ 

⑤ 4

**풀이 전략** 미분가능한 함수  $f(x)$ 의 역함수  $g(x)$ 가 존재하고 미분가능할 때,

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \quad (\text{단, } f'(g(x)) \neq 0)$$

**풀이** 함수  $g(x)$ 는 함수  $f(x)$ 의 역함수이므로  $g(0) = a$ 라 하면

$$f(a) = \ln\left(\frac{\sec a}{\sqrt{2}}\right) = 0, \quad \frac{\sec a}{\sqrt{2}} = 1, \quad \cos a = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$0 < a < \frac{\pi}{2} \text{이므로 } a = \frac{\pi}{4}, \quad \text{즉 } g(0) = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4g(x) - \pi}{2x} &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - \frac{\pi}{4}}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 2g'(0) \\ &= 2 \times \frac{1}{f'(g(0))} = \frac{2}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)} \end{aligned}$$

$$\text{한편 } f'(x) = \frac{\left(\frac{\sec x}{\sqrt{2}}\right)'}{\frac{\sec x}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{\sec x \tan x}{\sqrt{2}}}{\frac{\sec x}{\sqrt{2}}} = \tan x \text{이므로 } f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\text{따라서 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4g(x) - \pi}{2x} = \frac{2}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2}{1} = 2$$

**답** ③

정답과 풀이 29쪽

[20010-0092]

**유제**

**9** 함수  $f(x) = e^x \cos x$ 에 대하여 방정식  $f(x) = f''(x)$ 의 실근을  $\alpha$ 라 할 때,  $\tan \alpha$ 의 값은?

①  $-\frac{1}{2}$ ②  $-\frac{1}{4}$ 

③ 0

④  $\frac{1}{4}$ ⑤  $\frac{1}{2}$ 

[20010-0093]

**유제**

**10** 함수  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$ 과 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수  $g(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여  $(f \circ g)(2x) = x$ 를 만족시킬 때,  $g'(0)$ 의 값은?

①  $\frac{1}{4}$ ②  $\frac{1}{2}$ ③  $\frac{3}{4}$ 

④ 1

⑤  $\frac{5}{4}$

[20010-0094]

1 함수  $f(x) = \frac{x}{e^x + 1}$ 에 대하여  $f'(0)$ 의 값은?

①  $\frac{1}{4}$

②  $\frac{1}{2}$

③ 1

④ 2

⑤ 4

[20010-0095]

2 곡선  $y = x \ln \frac{1}{x^2 + 1}$  위의 점  $(1, \ln \frac{1}{2})$ 에서의 접선의 기울기는?

①  $\ln \frac{1}{2e^2}$

②  $\ln \frac{1}{2e}$

③  $\ln \frac{1}{2}$

④  $\ln \frac{e}{2}$

⑤  $\ln \frac{e^2}{2}$

[20010-0096]

3 매개변수  $\theta$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ )로 나타낸 곡선  $x = \tan \theta$ ,  $y = \sec \theta$  위의 점  $(a, b)$ 에서의 접선의 기울기가  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 일 때,  $ab$ 의 값은?

①  $\sqrt{3}$

②  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

③  $2\sqrt{3}$

④  $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

⑤  $3\sqrt{3}$

[20010-0097]

4 곡선  $x^2 + 4y^2 = 8$  위의 점  $(a, b)$ 에서의 접선의 기울기가  $\frac{1}{2}$ 일 때,  $a^2 + b^2$ 의 값은? (단,  $b \neq 0$ )

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

[20010-0098]

5 함수  $f(x) = \ln(e^x - 1)$  ( $x > 0$ )의 역함수를  $g(x)$ 라 할 때,  $g'(0)$ 의 값은?

①  $\frac{1}{2}$

②  $\ln 2$

③ 1

④  $\frac{1}{\ln 2}$

⑤ 2



[20010-0099]

1 함수  $f(x) = \frac{e^x}{1 + \csc x}$ 에 대하여 방정식  $f(x) = f'(x)$ 의 실근은? (단,  $0 < x < \pi$ )

- ①  $\frac{\pi}{6}$       ②  $\frac{\pi}{3}$       ③  $\frac{\pi}{2}$       ④  $\frac{2}{3}\pi$       ⑤  $\frac{5}{6}\pi$

[20010-0100]

2 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) f(0)=0, f'(0)=3 \qquad (나) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 4$$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(f(x))}{x-2}$ 의 값은?

- ① 12      ② 16      ③ 20      ④ 24      ⑤ 28

[20010-0101]

3 두 곡선  $y^2 = x$ 와  $3x^2 - 3xy + y^2 = 1$ 이 만나는 제1사분면 위의 점을 P라 하고, 점 P에서의 두 접선을 각각  $l_1$ ,  $l_2$ 라 하자. 두 직선  $l_1$ ,  $l_2$ 가 이루는 예각의 크기를  $\theta$ 라 할 때,  $\tan \theta$ 의 값은?

- ①  $\frac{3}{4}$       ② 1      ③  $\frac{5}{4}$       ④  $\frac{3}{2}$       ⑤  $\frac{7}{4}$

[20010-0102]

4 매개변수  $\theta$ 로 나타낸 곡선  $x = a \cos \theta - \frac{1}{4} \cos 3\theta$ ,  $y = \frac{3}{4} \sin \theta - b \sin 3\theta$ 에 대하여  $\theta = \frac{\pi}{6}$ 에 대응하는 점  $(\frac{3\sqrt{3}}{8}, \frac{1}{8})$ 에서의 접선의 기울기는? (단,  $a, b$ 는 상수이다.)

- ①  $\frac{\sqrt{3}}{4}$       ②  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       ③  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$       ④  $\sqrt{3}$       ⑤  $\frac{5\sqrt{3}}{4}$

[20010-0103]

5 함수  $f(x) = x - \frac{2}{x}$  ( $x > 0$ )의 역함수를  $g(x)$ 라 하자. 함수  $h(x) = \{g(x)\}^2$ 에 대하여  $h'(1)$ 의 값은?

- ①  $\frac{7}{3}$       ②  $\frac{8}{3}$       ③ 3      ④  $\frac{10}{3}$       ⑤  $\frac{11}{3}$

[20010-0104]

- 1 열린구간  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 미분가능한 두 함수  $f(x), g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때,  $\frac{g'(0)}{g(0)}$ 의 값은?

$$(가) f(x)\sqrt{g(x)}=e^x \cos x$$

$$(나) \frac{f'(0)}{f(0)}=\frac{1}{2}$$

- ① -2                      ② -1                      ③ 0                      ④ 1                      ⑤ 2

[20010-0105]

- 2 두 함수  $f(t)=3t^5-5t^4+t$ ,  $g(t)=t^4+t^2-2$ 에 대하여 매개변수  $t$ 로 나타낸 곡선  $x=f(t)$ ,  $y=g(t)$ 를  $l$ 이라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

$$\neg. \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g(1+2\Delta t)}{f(1+\Delta t)+1} = -3$$

ㄴ. 곡선  $l$ 은 점  $(-2, 0)$ 을 지난다.

ㄷ. 곡선  $l$  위의 임의의 점  $(x, y)$ 에 대하여  $\frac{dy}{dx}$ 가 존재한다.

- ①  $\neg$                       ②  $\neg$                       ③  $\neg$                       ④  $\neg, \neg$                       ⑤  $\neg, \neg$

[20010-0106]

- 3 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 역함수가 존재하는 두 함수  $f(x), g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) f(4)=2, g(2)=9$$

$$(나) f'(4)=\frac{1}{4}, g'(2)=12$$

함수  $F(x)=(g \circ f)(x)$ 의 역함수를  $G(x)$ 라 할 때,  $G'(9)$ 의 값은?

(단, 두 함수  $f(x), g(x)$ 의 역함수는 미분가능하다.)

- ①  $\frac{1}{6}$                       ②  $\frac{1}{3}$                       ③  $\frac{1}{2}$                       ④  $\frac{2}{3}$                       ⑤  $\frac{5}{6}$

[20010-0107]

- 4 함수  $y=2^x-2^{-x}$ 의 그래프와 직선  $y=t$ 가 만나는 점의 좌표를  $(f(t), t)$ 라 하자. 함수

$g(t)=f(t) \times \{4^{f(t)}+4^{-f(t)}\}$  일 때,  $\left\{g'\left(\frac{15}{4}\right)-15\right\} \times 68 \ln 2$ 의 값을 구하시오. (단,  $t$ 는 실수이다.)



## 대표 기출 문제

### 출제 경향

함수의 몫의 미분법, 합성함수의 미분법, 역함수의 미분법을 이용하여 다항함수, 삼각함수, 지수함수, 로그함수의 도함수를 구하거나 매개변수 또는 음함수로 나타낸 곡선 위의 점에서의 접선의 기울기를 구하는 문제가 출제된다.

$0 < t < 41$ 인 실수  $t$ 에 대하여 곡선  $y = x^3 + 2x^2 - 15x + 5$ 와 직선  $y = t$ 가 만나는 세 점 중에서  $x$ 좌표가 가장 큰 점의 좌표를  $(f(t), t)$ ,  $x$ 좌표가 가장 작은 점의 좌표를  $(g(t), t)$ 라 하자.  $h(t) = t \times \{f(t) - g(t)\}$ 라 할 때,  $h'(5)$ 의 값은? [4점]

- ①  $\frac{79}{12}$       ②  $\frac{85}{12}$       ③  $\frac{91}{12}$       ④  $\frac{97}{12}$       ⑤  $\frac{103}{12}$

2016학년도 대수능

**출제 의도** ▶ 역함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

**풀이**  $h(t) = t \times \{f(t) - g(t)\}$ 의 양변을  $t$ 에 대하여 미분하면

$$h'(t) = 1 \times \{f(t) - g(t)\} + t \times \{f'(t) - g'(t)\}$$

$$h'(5) = \{f(5) - g(5)\} + 5\{f'(5) - g'(5)\}$$

곡선  $y = x^3 + 2x^2 - 15x + 5$ 와 직선  $y = 5$ 가 만나는 점의  $x$ 좌표는

$$x^3 + 2x^2 - 15x + 5 = 5$$

$$x(x+5)(x-3) = 0$$

$$x = -5 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 3$$

따라서  $f(5) = 3$ ,  $g(5) = -5$

한편  $F(x) = x^3 + 2x^2 - 15x + 5$ 라 하면

$$F'(x) = 3x^2 + 4x - 15 = (x+3)(3x-5)$$

$$F'(x) = 0 \text{에서 } x = -3 \text{ 또는 } x = \frac{5}{3}$$

$$F(-3) = 41, F\left(\frac{5}{3}\right) < 0$$

$x > \frac{5}{3}$ 일 때 함수  $y = F(x)$ 의 그래프는 직선  $y = t$ 와 한 점  $(f(t), t)$ 에서 만나고  $F(f(t)) = t$ 이므로 양변을  $t$ 에 대하여 미분하면

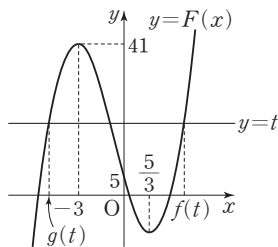
$$F'(f(t))f'(t) = 1, f'(t) = \frac{1}{F'(f(t))}, f'(5) = \frac{1}{F'(f(5))} = \frac{1}{F'(3)} = \frac{1}{24}$$

$x < -3$ 일 때 함수  $y = F(x)$ 의 그래프는 직선  $y = t$ 와 한 점  $(g(t), t)$ 에서 만나고  $F(g(t)) = t$ 이므로 양변을  $t$ 에 대하여 미분하면

$$F'(g(t))g'(t) = 1, g'(t) = \frac{1}{F'(g(t))}, g'(5) = \frac{1}{F'(g(5))} = \frac{1}{F'(-5)} = \frac{1}{40}$$

$$\text{따라서 } h'(5) = \{f(5) - g(5)\} + 5\{f'(5) - g'(5)\} = \{3 - (-5)\} + 5 \times \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{40}\right) = \frac{97}{12}$$

답 ④



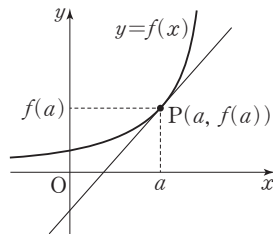
## 1. 접선의 방정식

### (1) 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

함수  $y=f(x)$ 가  $x=a$ 에서 미분가능할 때,  $x=a$ 에서의 미분계수  $f'(a)$ 는 곡선  $y=f(x)$  위의 점  $P(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기와 같다.

따라서 곡선  $y=f(x)$  위의 점  $P(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$



**예** 곡선  $y=\frac{1}{x-2}$  위의 점 (3, 1)에서의 접선의 방정식을 구해 보자.

$$f(x)=\frac{1}{x-2} \text{로 놓으면 } f'(x)=-\frac{(x-2)'}{(x-2)^2}=-\frac{1}{(x-2)^2}$$

곡선  $y=f(x)$  위의 점 (3, 1)에서의 접선의 기울기는  $f'(3)=-1$

따라서 접선의 방정식은

$$y-1=-1 \times (x-3), \text{ 즉 } y=-x+4$$

### (2) 기울기가 주어진 접선의 방정식

함수  $y=f(x)$ 가 미분가능할 때, 곡선  $y=f(x)$ 에 접하고 기울기가  $m$ 인 접선의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.

① 접점의 좌표를  $(t, f(t))$ 로 놓는다.

②  $t$ 에 대한 방정식  $f'(t)=m$ 을 만족시키는 실수  $t$ 의 값을 구한다.

③ ②에서 구한  $t$ 의 값을 이용하여 접선의 방정식  $y-f(t)=m(x-t)$ 를 구한다.

**예** 곡선  $y=\ln(x+1)$ 에 접하고 기울기가  $\frac{1}{3}$ 인 접선의 방정식을 구해 보자.

$$f(x)=\ln(x+1) \text{로 놓으면 } f'(x)=\frac{1}{x+1}$$

곡선  $y=f(x)$ 의 접점의 좌표를  $(t, \ln(t+1))$ 로 놓으면 접선의 기울기가  $\frac{1}{3}$ 이므로

$$f'(t)=\frac{1}{t+1}=\frac{1}{3} \text{에서 } t=2$$

따라서 접점의 좌표는  $(2, \ln 3)$ 이고 구하는 접선의 방정식은

$$y-\ln 3=\frac{1}{3}(x-2), \text{ 즉 } y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}+\ln 3$$

### (3) 곡선 위에 있지 않은 점에서 곡선에 그은 접선의 방정식

함수  $y=f(x)$ 가 미분가능할 때, 곡선  $y=f(x)$  위에 있지 않은 점  $(x_1, y_1)$ 에서 곡선  $y=f(x)$ 에 그은 접선의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.

① 접점의 좌표를  $(t, f(t))$ 로 놓는다.

② 곡선  $y=f(x)$  위의 점  $(t, f(t))$ 에서의 접선의 방정식  $y-f(t)=f'(t)(x-t)$ 를 구한다.

③ 점  $(x_1, y_1)$ 은 접선 위의 점이므로 ②에서 구한 접선의 방정식에  $x=x_1, y=y_1$ 을 대입한다.

④  $t$ 에 대한 방정식  $y_1-f(t)=f'(t)(x_1-t)$ 를 만족시키는 실수  $t$ 의 값을 구한다.

⑤ ④에서 구한  $t$ 의 값을 이용하여 접선의 방정식  $y-f(t)=f'(t)(x-t)$ 를 구한다.



## 예제 1

## 접선의 방정식

점 (4, 2)에서 곡선  $y=e^{x-k}$ 에 그은 접선이 원점을 지날 때, 상수  $k$ 의 값은?

- ①  $\ln 2 + 1$       ②  $\ln 2 + \frac{3}{4}$       ③  $\ln 2 + \frac{1}{2}$       ④  $\ln 2 + \frac{1}{4}$       ⑤  $\ln 2$

**풀이 전략** 곡선  $y=f(x)$  위의 점  $P(t, f(t))$ 에서의 접선의 방정식은  
 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$

**풀이** 점 (4, 2)와 원점을 지나는 직선의 방정식은  $y=\frac{1}{2}x$

$$y=e^{x-k} \text{에서 } y'=e^{x-k}$$

곡선  $y=e^{x-k}$ 과 직선  $y=\frac{1}{2}x$ 가 접하므로 접점의 좌표를  $(t, e^{t-k})$ 이라 하면

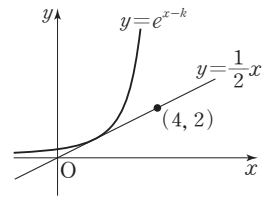
$$\text{점 } (t, e^{t-k}) \text{이 직선 } y=\frac{1}{2}x \text{ 위의 점이므로 } e^{t-k}=\frac{1}{2}t \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{점 } (t, e^{t-k}) \text{에서의 접선의 기울기가 } \frac{1}{2} \text{이므로 } e^{t-k}=\frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②에서  $t=1$ 이고, 이것을 ②에 대입하면

$$e^{1-k}=\frac{1}{2}, 1-k=\ln \frac{1}{2}=-\ln 2$$

따라서  $k=\ln 2 + 1$



**답** ①

정답과 풀이 34쪽

[20010-0108]

**유제 1** 원점에서 곡선  $y=\frac{1}{2}(\ln x)^2-4$ 에 그은 두 접선의 기울기를  $m_1, m_2$ 라 할 때,  $m_1 m_2$ 의 값은?

- ①  $-\frac{8}{e^2}$       ②  $-\frac{7}{e^2}$       ③  $-\frac{6}{e^2}$       ④  $-\frac{5}{e^2}$       ⑤  $-\frac{4}{e^2}$

[20010-0109]

**유제 2** 두 곡선  $y=\frac{3}{x^2+3}, y=x^2+k$ 의 제1사분면의 교점에서의 접선이 서로 수직일 때, 상수  $k$ 의 값은?

(단,  $k < 1$ )

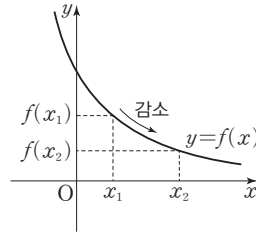
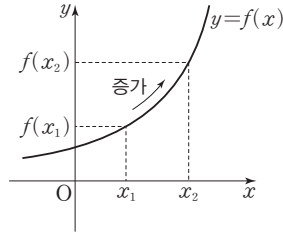
- ①  $-3$       ②  $-\frac{5}{2}$       ③  $-2$       ④  $-\frac{3}{2}$       ⑤  $-1$

## 2. 함수의 증가와 감소

### (1) 함수의 증가와 감소

함수  $f(x)$ 가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 실수  $x_1, x_2$ 에 대하여

- ①  $x_1 < x_2$ 일 때,  $f(x_1) < f(x_2)$ 이면 함수  $f(x)$ 는 이 구간에서 증가한다고 한다.
- ②  $x_1 < x_2$ 일 때,  $f(x_1) > f(x_2)$ 이면 함수  $f(x)$ 는 이 구간에서 감소한다고 한다.



### (2) 미분가능한 함수의 증가와 감소의 판정

함수  $f(x)$ 가 어떤 열린구간에서 미분가능하고, 이 구간의 모든 실수  $x$ 에 대하여

- ①  $f'(x) > 0$ 이면 함수  $f(x)$ 는 이 구간에서 증가한다.
- ②  $f'(x) < 0$ 이면 함수  $f(x)$ 는 이 구간에서 감소한다.

## 3. 함수의 극대와 극소

### (1) 함수의 극대와 극소

함수  $f(x)$ 가  $x=a$ 를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 실수  $x$ 에 대하여

- ①  $f(x) \leq f(a)$ 이면 함수  $f(x)$ 는  $x=a$ 에서 극대라 하고,  $f(a)$ 를 극댓값이라 한다.
- ②  $f(x) \geq f(a)$ 이면 함수  $f(x)$ 는  $x=a$ 에서 극소라 하고,  $f(a)$ 를 극솟값이라 한다.
- ③ 극댓값과 극솟값을 통틀어 극값이라 한다.

### (2) 미분가능한 함수의 극대와 극소의 판정

#### ① 도함수를 이용한 함수의 극대와 극소의 판정

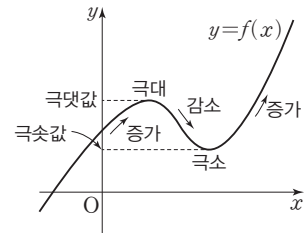
미분가능한 함수  $f(x)$ 에 대하여  $f'(a)=0$ 이고  $x=a$ 의 좌우에서

- ㉠  $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 함수  $f(x)$ 는  $x=a$ 에서 극대이고, 극댓값은  $f(a)$ 이다.
- ㉡  $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 함수  $f(x)$ 는  $x=a$ 에서 극소이고, 극솟값은  $f(a)$ 이다.

#### ② 이계도함수를 이용한 함수의 극대와 극소의 판정

이계도함수를 갖는 함수  $f(x)$ 에 대하여  $f'(a)=0$ 이고

- ㉠  $f''(a) < 0$ 이면 함수  $f(x)$ 는  $x=a$ 에서 극대이고, 극댓값은  $f(a)$ 이다.
- ㉡  $f''(a) > 0$ 이면 함수  $f(x)$ 는  $x=a$ 에서 극소이고, 극솟값은  $f(a)$ 이다.





## 예제 2

### 함수의 극대와 극소

함수  $f(x) = a \ln \frac{2}{x} - x^2 + 5x$ 가  $x = \frac{1}{2}$ 에서 극값을 가질 때, 함수  $f(x)$ 의 극댓값은? (단,  $a$ 는 상수이다.)

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

**풀이 전략** 미분가능한 함수  $f(x)$ 에 대하여  $f'(k) = 0$ 이고  $x = k$ 의 좌우에서

(1)  $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 함수  $f(x)$ 는  $x = k$ 에서 극대이고, 극댓값은  $f(k)$ 이다.

(2)  $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 함수  $f(x)$ 는  $x = k$ 에서 극소이고, 극솟값은  $f(k)$ 이다.

**풀이**  $f(x) = a \ln \frac{2}{x} - x^2 + 5x = a(\ln 2 - \ln x) - x^2 + 5x$ 에서

$$f'(x) = -\frac{a}{x} - 2x + 5$$

함수  $f(x)$ 가  $x = \frac{1}{2}$ 에서 극값을 가지므로

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -2a - 1 + 5 = -2a + 4 = 0 \text{에서 } a = 2$$

따라서  $f(x) = 2 \ln \frac{2}{x} - x^2 + 5x$ 이고

$$f'(x) = -\frac{2}{x} - 2x + 5 = -\frac{2x^2 - 5x + 2}{x} = -\frac{(2x-1)(x-2)}{x}$$

$f'(x) = 0$ 에서  $x = \frac{1}{2}$  또는  $x = 2$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x = 2$ 에서 극대이고 극댓값은

$$f(2) = 2 \ln 1 - 4 + 10 = 6$$

| $x$     | (0) | ... | $\frac{1}{2}$ | ... | 2  | ... |
|---------|-----|-----|---------------|-----|----|-----|
| $f'(x)$ |     | -   | 0             | +   | 0  | -   |
| $f(x)$  |     | \   | 극소            | /   | 극대 | \   |

답 ③

정답과 풀이 35쪽

[20010-0110]

유제

**3** 함수  $f(x) = axe^{-x}$ 이  $x = b$ 에서 극댓값  $\frac{3}{e}$ 을 가질 때,  $a + b$ 의 값은? (단,  $a, b$ 는 상수이다.)

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

[20010-0111]

유제

**4** 함수  $f(x) = \ln(1 + 4x^2) - ax$ 가 극값을 갖지 않을 때, 양수  $a$ 의 최솟값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

#### 4. 곡선의 오목과 볼록

##### (1) 곡선의 오목과 볼록

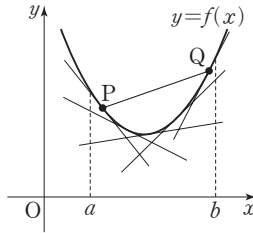
닫힌구간  $[a, b]$ 에서 곡선  $y=f(x)$  위의 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여 두 점 P, Q를 잇는 곡선 부분이

① 선분 PQ보다 항상 아래쪽에 있으면 곡선

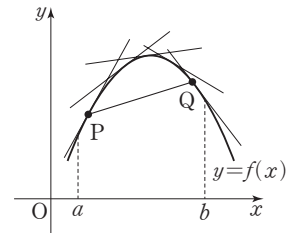
$y=f(x)$ 는 그 구간에서 아래로 볼록 또는 위로 오목하다고 한다.

② 선분 PQ보다 항상 위쪽에 있으면 곡선  $y=f(x)$

는 그 구간에서 위로 볼록 또는 아래로 오목하다고 한다.



① 아래로 볼록



② 위로 볼록

##### (2) 이계도함수를 이용한 곡선의 오목과 볼록의 판정

이계도함수가 존재하는 함수  $f(x)$ 가 어떤 구간의 모든  $x$ 에 대하여

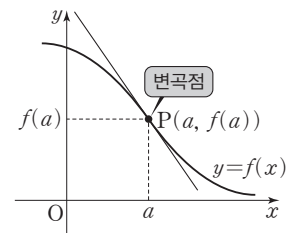
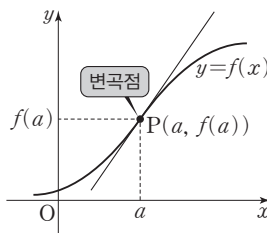
①  $f''(x) > 0$ 이면 곡선  $y=f(x)$ 는 그 구간에서 아래로 볼록하다.

②  $f''(x) < 0$ 이면 곡선  $y=f(x)$ 는 그 구간에서 위로 볼록하다.

#### 5. 곡선의 변곡점

##### (1) 곡선의 변곡점

곡선  $y=f(x)$  위의 점  $P(a, f(a))$ 에 대하여  $x=a$ 의 좌우에서 곡선의 모양이 아래로 볼록에서 위로 볼록으로 변하거나 위로 볼록에서 아래로 볼록으로 변할 때, 점 P를 곡선  $y=f(x)$ 의 변곡점이라 한다.



##### (2) 이계도함수를 이용한 곡선의 변곡점의 판정

이계도함수가 존재하는 함수  $f(x)$ 에 대하여

$f''(a)=0$ 이고,  $x=a$ 의 좌우에서  $f''(x)$ 의 부호가 바뀌면 점  $(a, f(a))$ 는 곡선  $y=f(x)$ 의 변곡점이다.

#### 6. 함수의 그래프

함수  $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같은 사항을 고려하여 그린다.

(1) 함수  $f(x)$ 의 정의역과 치역

(2) 곡선  $y=f(x)$ 의 대칭성 ( $y$ 축 대칭, 원점 대칭)과 주기

(3) 곡선  $y=f(x)$ 와 좌표축이 만나는 점

(4) 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소, 극대와 극소

(5) 곡선  $y=f(x)$ 의 오목과 볼록, 변곡점

(6)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ , 곡선  $y=f(x)$ 의 점근선





### 예제 3

### 곡선의 변곡점

곡선  $y=e^{1-x^2}$ 의 두 변곡점에서의 접선과  $x$ 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를  $S$ 라 할 때,  $S^2$ 의 값은?

- ①  $5e$                       ②  $6e$                       ③  $7e$                       ④  $8e$                       ⑤  $9e$

**풀이 전략** 이계도함수가 존재하는 함수  $f(x)$ 에 대하여  $f''(a)=0$ 이고,  $x=a$ 의 좌우에서  $f''(x)$ 의 부호가 바뀌면 점  $(a, f(a))$ 는 곡선  $y=f(x)$ 의 변곡점이다.

**풀이**  $f(x)=e^{1-x^2}$ 으로 놓으면  $f'(x)=-2xe^{1-x^2}$ 이고

$$f''(x)=-2e^{1-x^2}-2x \times (-2xe^{1-x^2})=4\left(x^2-\frac{1}{2}\right)e^{1-x^2}$$

$$f''(x)=0 \text{에서 } x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 또는 } x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x=-\frac{\sqrt{2}}{2}, x=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{의 좌우에서 } f''(x) \text{의 부호가 바뀌므로 두 변곡점의 좌표는 } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{e}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{e}\right)$$

$$f'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2e} \text{이므로 곡선 } y=f(x) \text{ 위의 점 } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{e}\right) \text{에서의 접선의 방정식은}$$

$$y-\sqrt{e}=\sqrt{2e}\left\{x-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}, \text{ 즉 } y=\sqrt{2e}x+2\sqrt{e} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{2e} \text{이므로 곡선 } y=f(x) \text{ 위의 점 } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{e}\right) \text{에서의 접선의 방정식은}$$

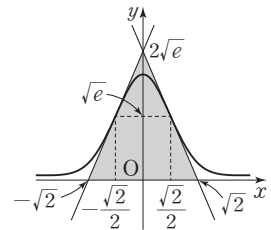
$$y-\sqrt{e}=-\sqrt{2e}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \text{ 즉 } y=-\sqrt{2e}x+2\sqrt{e} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

두 접선 ①, ②이  $x$ 축과 만나는 점의 좌표는 각각  $(-\sqrt{2}, 0), (\sqrt{2}, 0)$ 이고

두 접선 ①, ②의 교점의 좌표는  $(0, 2\sqrt{e})$ 이므로 두 접선 ①, ②과  $x$ 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이  $S$ 는

$$S=\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{e}=2\sqrt{2e}$$

이고  $S^2=8e$



답 ④

정답과 풀이 35쪽

[20010-0112]

유제

5

함수  $f(x)=ax^2+bx^2 \ln x$ 에 대하여 점  $(e, 3e^2)$ 이 곡선  $y=f(x)$ 의 변곡점일 때,  $a^2+b^2$ 의 값은?

(단,  $a, b$ 는 상수이고,  $ab \neq 0$ 이다.)

- ① 25                      ② 27                      ③ 29                      ④ 31                      ⑤ 33

[20010-0113]

유제

6

열린구간  $(0, 2\pi)$ 에서 곡선  $y=ax^2-2x+4 \cos x$ 가 변곡점을 갖도록 하는 정수  $a$ 의 개수는?

- ① 1                      ② 2                      ③ 3                      ④ 4                      ⑤ 5

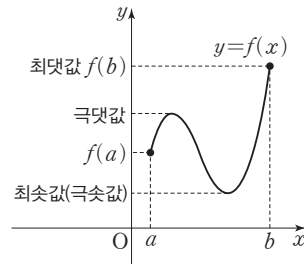
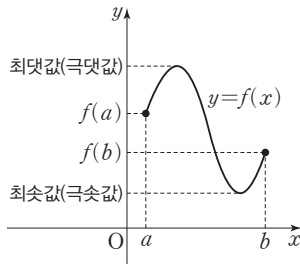
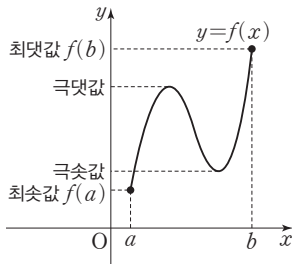
## 7. 함수의 최댓값과 최솟값

### (1) 함수의 최댓값과 최솟값

함수  $f(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속이면 최대·최소 정리에 의하여 함수  $f(x)$ 는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

### (2) 함수의 최댓값과 최솟값 구하기

닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속인 함수  $f(x)$ 가 열린구간  $(a, b)$ 에서 극값을 가질 때, 극값,  $f(a)$ ,  $f(b)$  중에서 가장 큰 값이 함수  $f(x)$ 의 최댓값, 가장 작은 값이 함수  $f(x)$ 의 최솟값이다.



따라서 함수  $f(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속이면 함수  $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값은 다음과 같은 방법으로 구할 수 있다.

- ① 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 함수  $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값을 모두 구한다.
- ② 함수값  $f(a)$ 와  $f(b)$ 를 구한다.
- ③ ①, ②에서 구한 값 중에서 가장 큰 값이 함수  $f(x)$ 의 최댓값이고, 가장 작은 값이 함수  $f(x)$ 의 최솟값이다.

**예** 닫힌구간  $[1, e^2]$ 에서 함수  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 의 최댓값과 최솟값을 구해 보자.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$f'(x)=0$ 에서  $x=e$ 이고  $x=e$ 의 좌우에서  $f'(x)$ 의 부호가 양(+)에서 음(-)으로 바뀌므로 함수  $f(x)$ 는  $x=e$ 에서 극댓값을 갖는다.

$f(1)=0$ ,  $f(e)=\frac{1}{e}$ ,  $f(e^2)=\frac{2}{e^2}$ 이고  $0 < \frac{2}{e^2} < \frac{1}{e}$ 이므로 닫힌구간  $[1, e^2]$ 에서 함수  $f(x)$ 의 최댓값은  $\frac{1}{e}$ , 최솟값은 0이다.

### (3) 최대·최소의 활용

도형의 길이, 넓이, 부피의 최댓값 또는 최솟값을 구하는 문제는 미분을 이용하여 다음과 같은 순서로 구할 수 있다.

- ① 적당한 변수를 사용하여 도형의 길이, 넓이, 부피를 한 변수에 대한 함수로 나타낸다.
- ② 주어진 조건에 따라 변수의 범위를 구한다.
- ③ 미분을 이용하여 함수의 증가와 감소를 표로 나타내고, 이를 이용하여 최댓값과 최솟값을 구한다.



## 예제 4

### 함수의 최댓값과 최솟값

실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수  $f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}$ ,  $g(x) = 4\sin^2 x - 4\sin x$ 에 대하여 함수  $(f \circ g)(x)$ 의 최댓값을  $M$ , 최솟값을  $m$ 이라 하자.  $M+m$ 의 값은?

①  $-\frac{2}{3}$

②  $-\frac{1}{3}$

③ 0

④  $\frac{1}{3}$

⑤  $\frac{2}{3}$

**풀이 전략**

함수  $f(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속일 때, 열린구간  $(a, b)$ 에서의 함수  $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값, 함수값  $f(a)$ ,  $f(b)$  중에서 가장 큰 값이 최댓값이고, 가장 작은 값이 최솟값이다.

**풀이**

$g(x) = 4\sin^2 x - 4\sin x$ 에서  $\sin x = u$ 로 놓으면  $-1 \leq u \leq 1$ 이고

$$g(x) = 4\sin^2 x - 4\sin x = 4u^2 - 4u = 4\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 - 1$$

$u = \frac{1}{2}$ 일 때 최솟값  $-1$ ,  $u = -1$ 일 때 최댓값 8을 가지므로  $-1 \leq g(x) \leq 8$

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ 에서  $g(x) = t$ 로 놓으면  $-1 \leq t \leq 8$ 이고  $f(t) = \frac{t-1}{t^2+3}$ 이다.

$$f'(t) = \frac{1 \times (t^2+3) - (t-1) \times 2t}{(t^2+3)^2} = \frac{-t^2+2t+3}{(t^2+3)^2} = \frac{-(t+1)(t-3)}{(t^2+3)^2}$$

$f'(t) = 0$ 에서  $t = -1$  또는  $t = 3$

$-1 \leq t \leq 8$ 일 때 함수  $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면  
오른쪽과 같다. 따라서 함수  $f(t)$ 의

최댓값은  $t = 3$ 일 때  $M = f(3) = \frac{1}{6}$ 이고

최솟값은  $t = -1$ 일 때  $m = f(-1) = -\frac{1}{2}$

그러므로  $M+m = \frac{1}{6} + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{3}$

|         |                |            |               |            |                |
|---------|----------------|------------|---------------|------------|----------------|
| $t$     | -1             | ...        | 3             | ...        | 8              |
| $f'(t)$ |                | +          | 0             | -          |                |
| $f(t)$  | $-\frac{1}{2}$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{6}$ | $\searrow$ | $\frac{7}{67}$ |

답 ②

정답과 풀이 35쪽

[20010-0114]

유제

7

그림과 같이 두 점  $O(0, 0)$ ,  $A(2, 0)$ 을 지름의 양 끝 점으로 하는 원 위의 점 중 제1사분면의 점을  $P$ 라 하자. 반직선  $OP$  위의 점  $Q$ 가  $\overline{PQ} = 2$ 를 만족시킨다.  $\angle POA = \theta$ 일 때, 점  $Q$ 의  $y$ 좌표를  $f(\theta)$ 라 하자.  $f(\theta)$ 의 최댓값은?

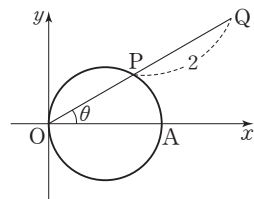
①  $\sqrt{3}$

②  $\frac{5\sqrt{3}}{4}$

③  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

④  $\frac{7\sqrt{3}}{4}$

⑤  $2\sqrt{3}$



## 8. 방정식에의 활용

- (1) 방정식  $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수

방정식  $f(x)=0$ 의 실근은 함수  $y=f(x)$ 의 그래프와  $x$ 축의 교점의  $x$ 좌표와 같다.

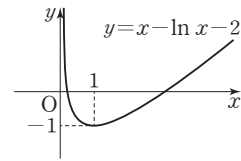
따라서 방정식  $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 함수  $y=f(x)$ 의 그래프가  $x$ 축과 만나는 점의 개수와 같다.

**예** 방정식  $x-\ln x-2=0$ 의 서로 다른 실근의 개수를 구해 보자.

$f(x)=x-\ln x-2$ 로 놓으면  $f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$ 이므로  $f'(x)=0$ 에서  $x=1$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$     | (0) | ... | 1  | ... |
|---------|-----|-----|----|-----|
| $f'(x)$ |     | -   | 0  | +   |
| $f(x)$  |     | \   | 극소 | /   |



함수  $f(x)$ 는  $x=1$ 에서 극솟값  $f(1)=-1$ 을 갖는다.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

이므로 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같고, 방정식  $x-\ln x-2=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

- (2) 방정식  $f(x)=g(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수

방정식  $f(x)=g(x)$ 의 실근은 두 함수  $y=f(x)$ ,  $y=g(x)$ 의 그래프의 교점의  $x$ 좌표와 같다.

따라서 방정식  $f(x)=g(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수  $y=f(x)$ ,  $y=g(x)$ 의 그래프의 교점의 개수와 같다.

## 9. 부등식에의 활용

- (1) 부등식  $f(x) \geq 0$  또는  $f(x) > 0$ 의 증명

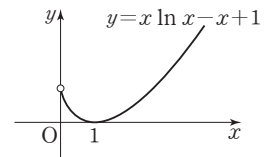
주어진 구간에서  $(f(x))$ 의 최솟값  $\geq 0$  또는  $(f(x))$ 의 최솟값  $> 0$ 임을 증명한다.

**예**  $x > 0$ 인 모든 실수  $x$ 에 대하여 부등식  $x \ln x - x + 1 \geq 0$ 이 성립함을 증명해 보자.

$f(x)=x \ln x - x + 1$ 로 놓으면  $f'(x)=\ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x$

$f'(x)=0$ 에서  $x=1$ 이므로  $x > 0$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$     | (0) | ... | 1  | ... |
|---------|-----|-----|----|-----|
| $f'(x)$ |     | -   | 0  | +   |
| $f(x)$  |     | \   | 극소 | /   |



함수  $f(x)$ 가  $x=1$ 에서 극소이면서 최소이고,  $f(1)=0$ 이므로  $x > 0$ 인 모든 실수  $x$ 에 대하여 부등식  $x \ln x - x + 1 \geq 0$ 이 성립한다.

- (2) 부등식  $f(x) \geq g(x)$  또는  $f(x) > g(x)$ 의 증명

함수  $h(x)=f(x)-g(x)$ 로 놓고 주어진 구간에서 부등식  $h(x) \geq 0$  또는  $h(x) > 0$ 이 성립함을 증명한다.



## 예제 5

### 방정식과 부등식에의 활용

$x < 1$ 인 모든 실수  $x$ 에 대하여 부등식  $4 \ln(1-x) \leq x^2 + k$ 를 만족시키는 실수  $k$ 의 최솟값은?

- ①  $\ln 2 - 1$       ②  $2 \ln 2 - 1$       ③  $3 \ln 2 - 1$       ④  $4 \ln 2 - 1$       ⑤  $5 \ln 2 - 1$

**풀이 전략** 부등식  $f(x) \geq 0$ 이 성립함을 증명하려면 주어진 구간에서  $(f(x)$ 의 최솟값)  $\geq 0$ 임을 보이면 된다.

**풀이**  $f(x) = x^2 - 4 \ln(1-x) + k$ 라 하고,  $x < 1$ 인 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(x) \geq 0$ 을 만족시키는 실수  $k$ 의 최솟값을 구하면 된다.

$$f'(x) = 2x - 4 \times \frac{-1}{1-x} = \frac{-2(x+1)(x-2)}{1-x}$$

$x < 1$ 일 때  $f'(x) = 0$ 에서  $x = -1$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$     | ...        | -1 | ...        | (1) |
|---------|------------|----|------------|-----|
| $f'(x)$ | -          | 0  | +          |     |
| $f(x)$  | $\searrow$ | 극소 | $\nearrow$ |     |

함수  $f(x)$ 는  $x = -1$ 에서 극소이면서 최소이므로 함수  $f(x)$ 의 최솟값은

$$f(-1) = 1 - 4 \ln 2 + k$$

$x < 1$ 인 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(x) \geq 0$ 이 성립하기 위해서는 함수  $f(x)$ 의 최솟값이 0보다 크거나 같아야 한다.

따라서  $1 - 4 \ln 2 + k \geq 0$ 에서  $k \geq 4 \ln 2 - 1$

즉, 실수  $k$ 의 최솟값은  $4 \ln 2 - 1$ 이다.

답 ④

정답과 풀이 36쪽

[20010-0115]

유제

8

$x > 0$ 에서 정의된 두 함수  $f(x) = x^2 \ln x$ ,  $g(x) = 2x^2 - k$ 에 대하여 방정식  $f(x) = g(x)$ 가 실근을 갖도록 하는 실수  $k$ 의 최댓값은?

- ①  $\frac{1}{2}e^3$       ②  $\frac{3}{4}e^3$       ③  $e^3$       ④  $\frac{5}{4}e^3$       ⑤  $\frac{3}{2}e^3$

[20010-0116]

유제

9

$x > 1$ 인 모든 실수  $x$ 에 대하여 부등식  $\ln(x-1) \leq 3x - k$ 를 만족시키는 실수  $k$ 의 최댓값은?

- ①  $2 + \ln 3$       ②  $2 + 2 \ln 3$       ③  $4 + \ln 3$       ④  $4 + 2 \ln 3$       ⑤  $6 + \ln 3$

## 10. 속도와 가속도

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각  $t$ 에서의 위치  $(x, y)$ 가  $x=f(t)$ ,  $y=g(t)$ 일 때 점 P의 속도와 속력, 가속도와 가속도의 크기는 다음과 같다.

(1) 시각  $t$ 에서의 점 P의 속도와 속력

① 속도:  $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$  또는  $(f'(t), g'(t))$

② 속력:  $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}$

(2) 시각  $t$ 에서의 점 P의 가속도와 가속도의 크기

① 가속도:  $\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right)$  또는  $(f''(t), g''(t))$

② 가속도의 크기:  $\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2} = \sqrt{\{f''(t)\}^2 + \{g''(t)\}^2}$

**설명** 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각  $t$ 에서의 위치를  $(x, y)$ 라 하면  $x, y$ 는 모두  $t$ 에 대한 함수이므로

$$x=f(t), y=g(t)$$

와 같이 나타낼 수 있다.

이때 점 P에서  $x$ 축과  $y$ 축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 하면 점 P가 움직일 때 점 Q는  $x$ 축에서 시각  $t$ 에서의 위치가  $x=f(t)$ 로 나타나는 직선 운동을 하고, 점 R는  $y$ 축에서 시각  $t$ 에서의 위치가  $y=g(t)$ 로 나타나는 직선 운동을 한다.

(1) 시각  $t$ 에서의 점 Q의 속도를  $v_x$ , 점 R의 속도를  $v_y$ 라 하면

$$v_x = \frac{dx}{dt} = f'(t), v_y = \frac{dy}{dt} = g'(t)$$

가 된다. 이때  $(v_x, v_y)$ 를 시각  $t$ 에서의 점 P의 속도라 하고

$$\sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}$$

을 시각  $t$ 에서의 점 P의 속력이라 한다.

(2) 시각  $t$ 에서의 점 Q의 가속도를  $a_x$ , 점 R의 가속도를  $a_y$ 라 하면

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = f''(t), a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = g''(t)$$

가 된다. 이때  $(a_x, a_y)$ 를 시각  $t$ 에서의 점 P의 가속도라 하고

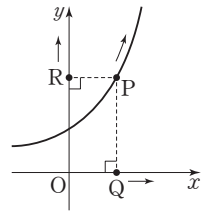
$$\sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2} = \sqrt{\{f''(t)\}^2 + \{g''(t)\}^2}$$

을 시각  $t$ 에서의 점 P의 가속도의 크기라 한다.

**예** 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각  $t$ 에서의 위치  $(x, y)$ 가  $x=4t+1$ ,  $y=2t^2$ 일 때 시각  $t$ 에서의 점 P의 속력과 가속도의 크기를 구해 보자.

$$\frac{dx}{dt} = 4, \frac{dy}{dt} = 4t \text{ 이므로 속력은 } \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{4^2 + (4t)^2} = 4\sqrt{1+t^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \frac{d^2y}{dt^2} = 4 \text{ 이므로 가속도의 크기는 } \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2} = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4$$





## 예제 6

### 속도와 가속도

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각  $t$  ( $t > 0$ )에서의 위치  $(x, y)$ 가  $x = 3 \cos t - \sin t$ ,  $y = 3 \cos t + \sin t$ 이다. 점 P의 속력이 최대인 시각에서 점 P의 가속도의 크기는?

- ① 1                      ②  $\sqrt{2}$                       ③ 2                      ④  $2\sqrt{2}$                       ⑤ 4

**풀이 전략** 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각  $t$ 에서의 위치  $(x, y)$ 가  $x=f(t)$ ,  $y=g(t)$ 일 때 점 P의 속력, 가속도의 크기는 다음과 같다.

$$\textcircled{1} \text{ 속력: } \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}$$

$$\textcircled{2} \text{ 가속도의 크기: } \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2} = \sqrt{\{f''(t)\}^2 + \{g''(t)\}^2}$$

**풀이**  $\frac{dx}{dt} = -3 \sin t - \cos t$ ,  $\frac{dy}{dt} = -3 \sin t + \cos t$ 이므로 시각  $t$ 에서의 점 P의 속력은

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} &= \sqrt{(-3 \sin t - \cos t)^2 + (-3 \sin t + \cos t)^2} = \sqrt{18 \sin^2 t + 2 \cos^2 t} \\ &= \sqrt{18 \sin^2 t + 2(1 - \sin^2 t)} = \sqrt{16 \sin^2 t + 2} \end{aligned}$$

따라서 점 P의 속력은  $\sin^2 t = 1$ 일 때 최대이다.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -3 \cos t + \sin t, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -3 \cos t - \sin t$$

이므로 시각  $t$ 에서의 점 P의 가속도의 크기는

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2} &= \sqrt{(-3 \cos t + \sin t)^2 + (-3 \cos t - \sin t)^2} = \sqrt{18 \cos^2 t + 2 \sin^2 t} \\ &= \sqrt{18(1 - \sin^2 t) + 2 \sin^2 t} = \sqrt{18 - 16 \sin^2 t} \end{aligned}$$

따라서  $\sin^2 t = 1$ 인 시각  $t$ 에서의 점 P의 가속도의 크기는  $\sqrt{18 - 16} = \sqrt{2}$

답 ②

정답과 풀이 36쪽

[20010-0117]

유제

**10** 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각  $t$  ( $t > 0$ )에서의 위치  $(x, y)$ 가  $x = 4t - \sin t$ ,  $y = 4 - \cos t$ 이다.  $0 < t < 2\pi$ 일 때 점 P의 속력은  $t = k\pi$ 에서 최대이고 최댓값은  $M$ 이다.  $k + M$ 의 값은? (단,  $k$ 는 상수이다.)

- ① 4                      ② 6                      ③ 8                      ④ 10                      ⑤ 12

[20010-0118]

유제

**11** 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각  $t$  ( $t > 0$ )에서의 위치  $(x, y)$ 가  $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ ,  $y = \frac{2t}{1+t^2}$ 이다. 점 P가 직선  $y = x$  위에 있을 때 점 P의 속력은  $a + b\sqrt{2}$ 이다.  $a + b$ 의 값은? (단,  $a, b$ 는 유리수이다.)

- ①  $\frac{1}{2}$                       ② 1                      ③  $\frac{3}{2}$                       ④ 2                      ⑤  $\frac{5}{2}$

[20010-0119]

1 곡선  $y = \frac{\ln x}{x}$  위의 점  $(a, b)$ 에서의 접선이 원점을 지날 때,  $ab$ 의 값은?

- ①  $\frac{1}{4}$       ②  $\frac{1}{e}$       ③  $\frac{1}{2}$       ④  $\frac{1}{\sqrt{e}}$       ⑤ 1

[20010-0120]

2 함수  $f(x) = \frac{3x-4}{x^2+1}$ 의 극댓값을  $M$ , 극솟값을  $m$ 이라 할 때,  $M-m$ 의 값은?

- ① 1      ② 2      ③ 3      ④ 4      ⑤ 5

[20010-0121]

3 닫힌구간  $[0, \pi]$ 에서 함수  $f(x) = e^{x \sin x + \cos x}$ 의 최댓값을  $M$ , 최솟값을  $m$ 이라 할 때,  $Mm$ 의 값은?

- ①  $e^{\frac{\pi}{2}-1}$       ②  $e^{\frac{\pi}{2}}$       ③  $e^{\frac{\pi}{2}+1}$       ④  $e^{\pi}$       ⑤  $e^{\pi+1}$

[20010-0122]

4 방정식  $x \ln x = 2x + 5 - n$ 이 실근을 갖도록 하는 자연수  $n$ 의 개수는? (단,  $2 < e < 3$ )

- ① 5      ② 6      ③ 7      ④ 8      ⑤ 9

[20010-0123]

5 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각  $t$  ( $t > 0$ )에서의 위치  $(x, y)$ 가  $x = -t^2 + 4t$ ,  $y = 3t - 2$ 이다. 시각  $t = a$ 에서 점 P의 속력이 최소이고, 점 P의 속력의 최솟값이  $m$ 일 때,  $a+m$ 의 값은? (단,  $a$ 는 상수이다.)

- ① 5      ② 6      ③ 7      ④ 8      ⑤ 9



[20010-0124]

- 1  $x > 0$ 에서 정의된 함수  $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x^2}$ 에 대하여 곡선  $y=f(x)$  위의 점  $P(t, f(t))$ 에서의 접선이 곡선  $y=f(x)$ 와 점 P 이외의 점에서는 만나지 않을 때, 실수  $t$ 의 최댓값은?

- ① 1                      ②  $\frac{4}{3}$                       ③  $\frac{5}{3}$                       ④ 2                      ⑤  $\frac{7}{3}$

[20010-0125]

- 2 양수  $a$ 에 대하여 곡선  $y=x^3$  위의 점  $P(a, a^3)$ 에서의 접선을  $l_1$ , 직선  $l_1$ 이 곡선  $y=x^3$ 과 만나는 점 중에서 점 P가 아닌 점을 Q, 곡선  $y=x^3$  위의 점 Q에서의 접선을  $l_2$ 라 하자. 두 직선  $l_1, l_2$ 가 이루는 예각의 크기가 최대일 때,  $a$ 의 값은?

- ①  $\frac{\sqrt{6}}{6}$                       ②  $\frac{\sqrt{3}}{3}$                       ③  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                       ④  $\frac{\sqrt{6}}{3}$                       ⑤  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

[20010-0126]

- 3 양의 실수  $k$ 에 대하여 두 곡선  $y=2(\ln x)^2-6\ln x$ ,  $y=kx^2-3$ 의 서로 다른 교점의 개수가 2일 때,  $k$ 의 값은? (단,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ )

- ①  $\frac{3}{e^6}$                       ②  $\frac{6}{e^6}$                       ③  $\frac{3}{e^4}$                       ④  $\frac{6}{e^4}$                       ⑤  $\frac{3}{e^2}$

[20010-0127]

- 4 자연수  $n$ 에 대하여 곡선  $y=n(1-x)^n$  ( $0 < x < 1$ ) 위의 점 P에서  $x$ 축,  $y$ 축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 라 하자. 삼각형 PQR의 넓이의 최댓값을  $S_n$ 이라 할 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은?

- ①  $\frac{1}{4e}$                       ②  $\frac{1}{2e}$                       ③  $\frac{1}{e}$                       ④ 1                      ⑤  $e$

[20010-0128]

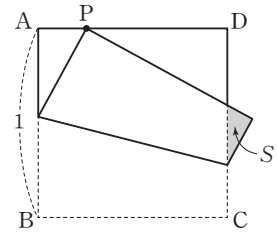
- 1  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 정의된 함수  $f(x) = a \sin^2 x - \sqrt{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x$ 가 극값을 갖지 않을 때, 실수  $a$ 의 최댓값은?

- ①  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       ②  $\frac{5\sqrt{3}}{8}$       ③  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$       ④  $\frac{7\sqrt{3}}{8}$       ⑤  $\sqrt{3}$

[20010-0129]

- 2 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 모양의 색종이가 있다. 선분 AD 위의 점 P에 대하여 점 B와 점 P가 일치하도록 색종이를 접었을 때, 정사각형 ABCD의 외부에 생기는 색칠한 도형의 넓이를 S라 하자. S의 값이 최대일 때, 선분 AP의 길이는?

- ①  $\frac{-2+\sqrt{7}}{6}$       ②  $\frac{-2+\sqrt{7}}{3}$       ③  $\frac{-1+\sqrt{7}}{6}$   
 ④  $\frac{-1+\sqrt{7}}{3}$       ⑤  $\frac{-1+2\sqrt{7}}{6}$



[20010-0130]

- 3 함수  $f(x) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}-|x|} \sin x$ 와 양의 실수  $k$ 에 대하여 곡선  $y=f(x)$ 와 직선  $y=k$ 의 교점의 개수를  $g(k)$ 라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ.  $f'(0) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$

ㄴ.  $g(e^{-\pi}) = 2$

ㄷ.  $e^{-\frac{5}{2}\pi} \leq k \leq 2$ 에서 함수  $g(k)$ 가 불연속인  $k$ 의 개수는 3이다.

- ① ㄱ      ② ㄱ, ㄴ      ③ ㄱ, ㄷ      ④ ㄴ, ㄷ      ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

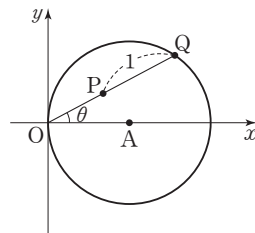


## 대표 기출 문제

### 출제 경향

삼각함수, 지수함수, 로그함수에 대하여 접선의 방정식을 구하거나 함수의 극댓값과 극솟값, 최댓값과 최솟값을 구하는 문제가 출제된다. 또한 도함수를 방정식과 부등식에 활용하여 문제를 해결하거나 속도, 가속도의 크기를 구하는 문제가 출제된다.

그림과 같이 좌표평면에 점  $A(1, 0)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원이 있다. 원 위의 점  $Q$ 에 대하여  $\angle AOQ = \theta$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ )라 할 때, 선분  $OQ$  위에  $\overline{PQ} = 1$ 인 점  $P$ 를 정한다. 점  $P$ 의  $y$ 좌표가 최대가 될 때  $\cos \theta = \frac{a + \sqrt{b}}{8}$ 이다.  $a + b$ 의 값을 구하시오. (단,  $O$ 는 원점이고,  $a$ 와  $b$ 는 자연수이다.) [4점]



2018학년도 대수능 6월 모의평가

**출제 의도** ▶ 도형의 길이를 삼각함수를 이용하여 나타내고, 도함수를 이용하여 길이가 최대일 때  $\cos \theta$ 의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

**풀이** 주어진 원이  $x$ 축과 만나는 점 중 원점이 아닌 점을  $B$ 라 하면 삼각형  $OQB$ 는

$\angle OQB = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형이다.

$\overline{OB} = 2$ 이므로  $\overline{OQ} = 2 \cos \theta$ 이고  $\overline{OP} = 2 \cos \theta - 1$

점  $P$ 에서  $x$ 축에 내린 수선의 발을  $H$ 라 하면 점  $P$ 의  $y$ 좌표는 선분  $PH$ 의 길이와 같으므로

$$\overline{PH} = \overline{OP} \sin \theta = (2 \cos \theta - 1) \sin \theta$$

$f(\theta) = (2 \cos \theta - 1) \sin \theta$ 라 하면

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= -2 \sin^2 \theta + (2 \cos \theta - 1) \cos \theta \\ &= -2 \sin^2 \theta + 2 \cos^2 \theta - \cos \theta \\ &= -2(1 - \cos^2 \theta) + 2 \cos^2 \theta - \cos \theta \\ &= 4 \cos^2 \theta - \cos \theta - 2 \end{aligned}$$

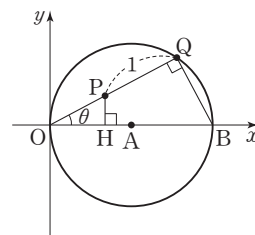
$$f'(\theta) = 0 \text{에서 } \cos \theta = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ 이므로  $\cos \theta = \frac{1 + \sqrt{33}}{8}$ 이고  $\cos \alpha = \frac{1 + \sqrt{33}}{8}$ 이라 하면

$0 < \theta < \alpha$ 일 때  $f'(\theta) > 0$ ,  $\alpha < \theta < \frac{\pi}{3}$ 일 때  $f'(\theta) < 0$ 이므로  $f(\theta)$ 는  $\theta = \alpha$ 에서 극대이면서 최대이다.

따라서  $a = 1$ ,  $b = 33$ 이므로

$$a + b = 1 + 33 = 34$$



답 34

## 여러 가지 적분법

### 1. 함수 $y=x^n$ ( $n$ 은 실수)의 적분

(1)  $n \neq -1$ 일 때,  $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$  (단,  $C$ 는 적분상수)

(2)  $n = -1$ 일 때,  $\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$  (단,  $C$ 는 적분상수)

**[설명]** (1)  $n \neq -1$ 일 때, 함수  $y=x^n$ 의 미분법에서  $\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)' = x^n$ 이므로

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \text{ (단, } C \text{는 적분상수)}$$

(2)  $n = -1$ 일 때, 로그함수의 미분법에서  $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$ 이므로

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C \text{ (단, } C \text{는 적분상수)}$$

**[예]** ①  $\int_0^1 x^{\frac{1}{2}} dx = \left[ \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$

②  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \left[ \ln |x| \right]_1^2 = \ln 2$

### 2. 지수함수의 적분

(1)  $\int e^x dx = e^x + C$  (단,  $C$ 는 적분상수)

(2)  $a > 0, a \neq 1$ 일 때,  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$  (단,  $C$ 는 적분상수)

**[예]** ①  $\int_0^1 e^x dx = \left[ e^x \right]_0^1 = e - 1$

②  $\int_0^1 2^x dx = \left[ \frac{2^x}{\ln 2} \right]_0^1 = \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}$

### 3. 삼각함수의 적분

(1)  $\int \sin x dx = -\cos x + C$  (단,  $C$ 는 적분상수)      (2)  $\int \cos x dx = \sin x + C$  (단,  $C$ 는 적분상수)

(3)  $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$  (단,  $C$ 는 적분상수)      (4)  $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$  (단,  $C$ 는 적분상수)

**[예]** ①  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \left[ -\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1$

②  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \left[ \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$

③  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x dx = \left[ \tan x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \tan \frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1$

④  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \csc^2 x dx = \left[ -\cot x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -\cot \frac{\pi}{3} + \cot \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{3} + 1$



## 예제 1

### 여러 가지 함수의 적분법

$\int_4^9 \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$ 의 값은?

①  $\frac{41}{3}$

② 14

③  $\frac{43}{3}$

④  $\frac{44}{3}$

⑤ 15

**풀이 전략** 지수법칙을 이용하여 식을 변형한 후 함수  $y=x^n$  ( $n$ 은 실수)의 적분법을 이용한다.

$$\begin{aligned}
 \text{풀이} \quad \int_4^9 \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx &= \int_4^9 (x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}) dx \\
 &= \left[ \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} \right]_4^9 \\
 &= \left( \frac{2}{3} \times 9^{\frac{3}{2}} + 2 \times 9^{\frac{1}{2}} \right) - \left( \frac{2}{3} \times 4^{\frac{3}{2}} + 2 \times 4^{\frac{1}{2}} \right) \\
 &= \left( \frac{2}{3} \times 27 + 2 \times 3 \right) - \left( \frac{2}{3} \times 8 + 2 \times 2 \right) \\
 &= 24 - \frac{28}{3} = \frac{44}{3}
 \end{aligned}$$

답 ④

정답과 풀이 42쪽

[20010-0131]

유제

1 함수  $f(x)$ 에 대하여  $f'(x) = 2^x \ln 4 + 1$ 이고  $f(0) = 1$ 일 때,  $f(-1)$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

[20010-0132]

유제

2 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수  $f(x)$ 에 대하여 곡선  $y=f(x)$  위의 임의의 점  $(x, y)$ 에서의 접선의 기울기가  $\sin(x+\pi)$ 이고  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 2$ 일 때,  $f\left(\frac{3}{2}\pi\right)$ 의 값은?

①  $\frac{1}{\pi}$

②  $\frac{2}{\pi}$

③  $\frac{3}{\pi}$

④  $\frac{4}{\pi}$

⑤  $\frac{5}{\pi}$

#### 4. 치환적분법

##### (1) 부정적분의 치환적분법

함수  $g(x)$ 가 미분가능할 때  $g(x)=t$ 로 놓으면

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt$$

##### (2) 정적분의 치환적분법

함수  $g(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속이고 미분가능한 함수  $t=g(x)$ 의 도함수  $g'(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속이고,  $g(a)=\alpha$ ,  $g(b)=\beta$ 에 대하여 함수  $f(t)$ 가 닫힌구간  $[\alpha, \beta]$ 에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt$$

**설명** (1) 함수  $f(t)$ 의 한 부정적분을  $F(t)$ 라 하고 미분가능한 함수  $g(x)$ 에 대하여  $t=g(x)$ 로 놓으면  $F(g(x))=F(t)$  합성함수의 미분법에 의하여

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

이므로

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C = F(t) + C = \int f(t)dt \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

(2) 닫힌구간  $[\alpha, \beta]$ 에서 연속인 함수  $f(t)$ 의 한 부정적분을  $F(t)$ 라 하면

$$\int_a^\beta f(t)dt = \left[ F(t) \right]_a^\beta = F(\beta) - F(\alpha)$$

이때 미분가능한 함수  $t=g(x)$ 의 도함수  $g'(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속이고  $g(a)=\alpha$ ,  $g(b)=\beta$ 일 때

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

이므로

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \left[ F(g(x)) \right]_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = F(\beta) - F(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(t)dt$$

**예**  $\int_0^1 (x+1)^3 dx$ 의 값을 치환적분법을 이용하여 구해 보자.

$x+1=t$ 로 놓으면  $x=0$ 일 때  $t=1$ ,  $x=1$ 일 때  $t=2$ 이고  $\frac{dt}{dx}=1$ 이므로

$$\int_0^1 (x+1)^3 dx = \int_1^2 t^3 dt = \left[ \frac{1}{4}t^4 \right]_1^2 = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

**참고**  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ 에서  $f(x)=t$ 로 놓으면  $f'(x)=\frac{dt}{dx}$ 이므로

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + C = \ln |f(x)| + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

**예**  $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$ 에서  $\cos x=t$ 로 놓으면  $-\sin x = \frac{dt}{dx}$ 이므로

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \left( -\frac{1}{t} \right) dt = -\ln |t| + C = -\ln |\cos x| + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$



## 예제 2

### 치환적분법

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \sin^2 2x \cos 2x dx$ 의 값은?

①  $\frac{1}{2}$

②  $\frac{1}{3}$

③  $\frac{1}{4}$

④  $\frac{1}{5}$

⑤  $\frac{1}{6}$

**풀이 전략**  $(\sin 2x)' = 2 \cos 2x$ 이므로  $\sin 2x = t$ 로 놓고 치환적분법을 이용하여 정적분의 값을 구한다.

**풀이**  $\sin 2x = t$ 로 놓으면  $x=0$ 일 때  $t=0$ ,  $x=\frac{\pi}{4}$ 일 때  $t=1$ 이고  $\frac{dt}{dx} = 2 \cos 2x$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \sin^2 2x \cos 2x dx &= \int_0^1 t^2 dt \\ &= \left[ \frac{1}{3} t^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

답 ②

정답과 풀이 42쪽

[20010-0133]

유제

**3**  $\int_1^{\sqrt{2}} x e^{x^2} dx$ 의 값은?

①  $\frac{e(e-1)}{2}$

②  $\frac{e(e+1)}{2}$

③  $\frac{(e+1)(e+2)}{2}$

④  $\frac{(e+2)(e+3)}{2}$

⑤  $\frac{(e+3)(e+4)}{2}$

[20010-0134]

유제

**4** 양수  $a$ 에 대하여  $\int_0^a 2x\sqrt{x^2+1} dx = \frac{4}{3}$ 일 때,  $(a^2+1)^3$ 의 값은?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

## 5. 부분적분법

### (1) 부정적분의 부분적분법

두 함수  $f(x)$ ,  $g(x)$ 가 미분가능할 때,

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

### (2) 정적분의 부분적분법

두 함수  $f(x)$ ,  $g(x)$ 가 미분가능하고  $f'(x)$ ,  $g'(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \left[ f(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

**설명** (1) 두 함수  $f(x)$ ,  $g(x)$ 가 미분가능할 때, 곱의 미분법에 의하여

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

즉,  $f(x)g(x) = \int \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\}dx$ 이므로

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

(2) 두 함수  $f(x)$ ,  $g(x)$ 가 미분가능하고  $f'(x)$ ,  $g'(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속일 때 위의 부정적분의 부분적분법에 의하여

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \left[ f(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

**참고** 두 함수의 곱으로 이루어진 함수를 부분적분법을 이용하여 적분할 때, 미분하면 간단해지는 함수를  $f(x)$ 로 놓고 적분하기 쉬운 함수를  $g'(x)$ 로 놓는다.



**예** ①  $\int_0^1 xe^x dx$ 의 값을 부분적분법을 이용하여 구해 보자.

$f(x) = x$ ,  $g'(x) = e^x$ 으로 놓으면  $f'(x) = 1$ ,  $g(x) = e^x$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^1 xe^x dx &= \left[ xe^x \right]_0^1 - \int_0^1 (1 \times e^x) dx \\ &= (e - 0) - \left[ e^x \right]_0^1 \\ &= e - (e - 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

②  $\int_1^e \ln x dx$ 의 값을 부분적분법을 이용하여 구해 보자.

$f(x) = \ln x$ ,  $g'(x) = 1$ 로 놓으면  $f'(x) = \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = x$ 이므로

$$\int_1^e \ln x dx = \left[ x \ln x \right]_1^e - \int_1^e \left( \frac{1}{x} \times x \right) dx = e - \int_1^e 1 dx = e - \left[ x \right]_1^e = e - (e - 1) = 1$$





### 예제 3

### 부분적분법

$\int_0^1 (x-1)e^x dx$ 의 값은?

- ①  $2-e$       ②  $1-e$       ③  $-e$       ④  $-1-e$       ⑤  $-2-e$

**풀이 전략**  $f(x)=x-1, g'(x)=e^x$ 으로 놓고 부분적분법을 이용하여 정적분의 값을 구한다.

**풀이**  $f(x)=x-1, g'(x)=e^x$ 으로 놓으면  $f'(x)=1, g(x)=e^x$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x-1)e^x dx &= \left[ (x-1)e^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \\ &= -(-1) - \left[ e^x \right]_0^1 \\ &= 1 - (e-1) \\ &= 2-e\end{aligned}$$

답 ①

정답과 풀이 43쪽

[20010-0135]

**유제 5**  $\int_0^\pi x \cos 2x dx$ 의 값은?

- ①  $-2$       ②  $-1$       ③  $0$       ④  $1$       ⑤  $2$

[20010-0136]

**유제 6**  $\int_1^{e^e} |\ln x - 1| dx$ 의 값은?

- ①  $e-1$       ②  $2e-2$       ③  $3e-3$       ④  $4e-4$       ⑤  $5e-5$

## 6. 정적분으로 표시된 함수의 미분과 극한

(1) 정적분으로 표시된 함수의 미분

연속함수  $f(x)$ 에 대하여

$$① \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) \quad (\text{단, } a \text{는 상수})$$

② 두 함수  $g(x), h(x)$ 가 미분가능할 때,

$$\frac{d}{dx} \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x)$$

**설명**  $F'(t) = f(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned} ① \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt &= \frac{d}{dx} [F(t)]_a^x \\ &= \frac{d}{dx} \{F(x) - F(a)\} = f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ② \frac{d}{dx} \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt &= \frac{d}{dx} [F(t)]_{g(x)}^{h(x)} \\ &= \frac{d}{dx} \{F(h(x)) - F(g(x))\} \\ &= F'(h(x))h'(x) - F'(g(x))g'(x) \\ &= f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x) \end{aligned}$$

(2) 정적분으로 표시된 함수의 극한

연속함수  $f(x)$ 에 대하여

$$① \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(t) dt = f(a) \quad (\text{단, } a \text{는 상수})$$

$$② \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt = f(a) \quad (\text{단, } a \text{는 상수})$$

**설명**  $F'(t) = f(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned} ① \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(t) dt &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [F(t)]_a^{a+h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(a+h) - F(a)}{h} \\ &= F'(a) = f(a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ② \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x-a} [F(t)]_a^x \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) - F(a)}{x-a} \\ &= F'(a) = f(a) \end{aligned}$$



## 예제 4

## 정적분으로 표시된 함수의 미분

정의역이  $\{x|x>-1\}$ 인 함수  $f(x)$ 가  $f(x)=\int_x^{2x+1} t \ln(t+1)dt$ 일 때,  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1)}{h}$ 의 값은?

- ①  $20 \ln 2$       ②  $22 \ln 2$       ③  $24 \ln 2$       ④  $26 \ln 2$       ⑤  $28 \ln 2$

**풀이 전략** 함수  $f(x)$ 가 연속이고 두 함수  $g(x)$ ,  $h(x)$ 가 미분가능할 때,  $\frac{d}{dx} \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x)$ 임을 이용한다.

**풀이**  $f(x)=\int_x^{2x+1} t \ln(t+1)dt$ 의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x+1) \ln(2x+2) \times 2 - x \ln(x+1) \times 1 \\ &= 2(2x+1) \ln(2x+2) - x \ln(x+1) \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1)}{2h} \times 2 \\ &= 2f'(1) \\ &= 2(6 \ln 4 - \ln 2) \\ &= 2(12 \ln 2 - \ln 2) \\ &= 22 \ln 2 \end{aligned}$$

답 ②

정답과 풀이 43쪽

[20010-0137]

유제

7

양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수  $f(x)$ 가 모든 양수  $x$ 에 대하여  $xf(x)=3x+\int_a^x f(t)dt$ 가 성립하고  $f(1)=0$ 일 때, 양수  $a$ 의 값은?

- ① 1      ② 2      ③  $e$       ④  $2e$       ⑤  $e^2$

[20010-0138]

유제

8

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2-1} \int_1^x \sin \frac{\pi}{2} t dt$ 의 값은?

- ① 1      ②  $\frac{1}{2}$       ③  $\frac{1}{3}$       ④  $\frac{1}{4}$       ⑤  $\frac{1}{5}$

[20010-0139]

**1**  $\int_0^1 \frac{x-1}{\sqrt{x+1}} dx$ 의 값은?

- ①  $-\frac{1}{2}$       ②  $-\frac{1}{3}$       ③  $-\frac{1}{4}$       ④  $-\frac{1}{5}$       ⑤  $-\frac{1}{6}$

[20010-0140]

**2**  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x + \cos 3x) dx$ 의 값은?

- ①  $\frac{1}{4}$       ②  $\frac{1}{2}$       ③  $\frac{3}{4}$       ④ 1      ⑤  $\frac{5}{4}$

[20010-0141]

**3**  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(\tan x)}{\cos^2 x} dx$ 의 값은?

- ①  $\sin \frac{1}{2}$       ②  $\sin 1$       ③  $\cos \frac{1}{2}$       ④  $\cos 1$       ⑤  $\tan \frac{1}{2}$

[20010-0142]

**4**  $\int_{\frac{e}{2}}^e \ln 2x dx$ 의 값은?

- ①  $e \ln 2$       ②  $e \ln 3$       ③  $2e \ln 2$       ④  $e \ln 5$       ⑤  $e \ln 6$

[20010-0143]

**5** 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수  $f(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(x) = -x + e + 2 + \int_1^x f(t) dt$ 를 만족시킬 때,  $f'(1)$ 의 값은?

- ①  $e$       ②  $2e$       ③  $3e$       ④  $4e$       ⑤  $5e$

[20010-0144]

- 1 함수  $f(x) = \sin x + |\sin x|$ 에 대하여 방정식  $f(x) = 1$ 을 만족시키는 양수  $x$ 의 값을 작은 값부터 차례대로 나열한 것을  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ 이라 할 때,  $\int_{\alpha_3}^{\alpha_5} f(x) dx$ 의 값은?

- ①  $4 - 2\sqrt{3}$       ②  $4 - \sqrt{3}$       ③ 4      ④  $4 + \sqrt{3}$       ⑤  $4 + 2\sqrt{3}$

[20010-0145]

- 2 함수  $f(x) = \frac{1}{e^{3(x-a)} + 2}$ 에 대하여  $\int_a^{a+1} f(x) dx$ 의 값은? (단,  $a$ 는 상수이다.)

- ①  $\frac{1}{6} \left( 1 + \ln \frac{1}{e^3 + 2} \right)$       ②  $\frac{1}{6} \left( 2 + \ln \frac{2}{e^3 + 2} \right)$       ③  $\frac{1}{6} \left( 3 + \ln \frac{3}{e^3 + 2} \right)$   
 ④  $\frac{1}{6} \left( 4 + \ln \frac{4}{e^3 + 2} \right)$       ⑤  $\frac{1}{6} \left( 5 + \ln \frac{5}{e^3 + 2} \right)$

[20010-0146]

- 3 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수  $f(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여

$$f(x) = xe^{-x} - 2x \int_0^1 f(t) dt + 4x \int_0^1 tf(1-t^2) dt$$

를 만족시킬 때,  $\int_0^1 f(x) dx$ 의 값은?

- ①  $1 - \frac{1}{e}$       ②  $1 - \frac{2}{e}$       ③  $1 - \frac{3}{e}$       ④  $1 - \frac{4}{e}$       ⑤  $1 - \frac{5}{e}$

[20010-0147]

- 4 곡선  $f(x) = \int_1^x (x-1) \ln t dt$  위의 점  $(e, f(e))$ 에서의 접선의  $y$ 절편은?

- ①  $-2e^2 + e - 1$       ②  $-e^2 + e - 1$       ③  $-e^2 + e + 1$   
 ④  $-e^2 + 2e - 1$       ⑤  $-e^2 + 2e + 2$

[20010-0148]

1  $x > 0$ 일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단,  $n$ 은 자연수이다.)

| 보기 |

$$\neg. \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{x} dx = \ln 2$$

$$\neg. x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1) < x$$

$$\neg. \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{x + \ln(x+1)} dx > \frac{1}{2} \ln 2$$

①  $\neg$ ②  $\neg$ ③  $\neg, \neg$ ④  $\neg, \neg$ ⑤  $\neg, \neg, \neg$ 

[20010-0149]

2 양수  $a$ 에 대하여 함수  $f(x) = (ax-2)e^{a(-x+2)}$ 은  $x=b$ 에서 최댓값을 갖는다. 함수  $g(a) = \int_0^b |f(x)| dx$ 가  $a=k$ 에서 최솟값을 가질 때,  $k$ 의 값은?

①  $\frac{1}{2}$ ②  $\frac{1}{3}$ ③  $\frac{1}{4}$ ④  $\frac{1}{5}$ ⑤  $\frac{1}{6}$ 

[20010-0150]

3  $0 \leq x \leq \pi$ 일 때, 함수  $f(x) = \int_0^\pi |\sin(t-x) - \sin 2t| dt$ 의 최댓값을  $M$ , 최솟값을  $m$ 이라 하자.  $M+m$ 의 값은?

①  $\frac{11}{2}$ 

② 6

③  $\frac{13}{2}$ 

④ 7

⑤  $\frac{15}{2}$ 

[20010-0151]

4  $0 < x < 1$ 일 때, 함수  $f(x) = \int_x^{x+1} \{\pi |\sin(\pi t)| - |1-t|e^{1-t}\} dt$ 는  $x=a$ 에서 극댓값  $b$ 를 갖는다.  $ab$ 의 값은?

①  $e^{\frac{1}{e+1}}$ ②  $e^{\frac{2}{e+1}}$ ③  $e^{\frac{3}{e+1}}$ ④  $e^{\frac{4}{e+1}}$ ⑤  $e^{\frac{5}{e+1}}$



## 대표 기출 문제

### 출제 경향

여러 가지 함수의 적분, 치환적분, 부분적분 등을 이용하여 정적분의 값을 구하는 문제가 출제된다.

$x > 0$ 에서 정의된 연속함수  $f(x)$ 가 모든 양수  $x$ 에 대하여

$$2f(x) + \frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

을 만족시킬 때,  $\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x) dx$ 의 값은? [4점]

- ①  $\frac{\ln 2}{3} + \frac{1}{2}$       ②  $\frac{2 \ln 2}{3} + \frac{1}{2}$       ③  $\frac{\ln 2}{3} + 1$       ④  $\frac{2 \ln 2}{3} + 1$       ⑤  $\frac{2 \ln 2}{3} + \frac{3}{2}$

2019학년도 대수능

**출제 의도** ▶ 조건을 만족시키는 함수  $f(x)$ 를 구하여 정적분의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

**풀이**  $2f(x) + \frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$  ..... ㉠

㉠에  $x$  대신  $\frac{1}{x}$ 을 대입하면

$$2f\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 f(x) = x + x^2$$

양변을  $2x^2$ 으로 나누면

$$\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}f(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2}$$
 ..... ㉡

㉠ - ㉡을 하면

$$\frac{3}{2}f(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{3x} + \frac{2}{3x^2} - \frac{1}{3}$$

따라서

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^2 f(x) dx &= \int_{\frac{1}{2}}^2 \left( \frac{1}{3x} + \frac{2}{3x^2} - \frac{1}{3} \right) dx \\ &= \left[ \frac{1}{3} \ln |x| - \frac{2}{3x} - \frac{1}{3}x \right]_{\frac{1}{2}}^2 \\ &= \left( \frac{1}{3} \ln 2 - 1 \right) - \left( \frac{1}{3} \ln \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \right) \\ &= \frac{2 \ln 2}{3} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 ②

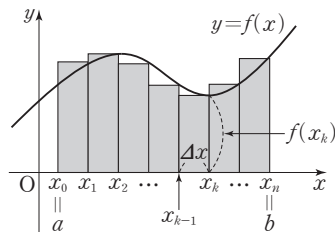
## 1. 정적분과 급수

함수  $f(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right) \frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x) dx$$

**설명** 함수  $f(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속이고  $f(x) \geq 0$ 일 때, 닫힌구간  $[a, b]$ 를  $n$ 등분하여 양 끝 점과 각 분점의  $x$ 좌표를 차례대로  $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ 라 하고, 닫힌구간  $[x_{k-1}, x_k]$  ( $k=1, 2, \dots, n$ )의 길이를  $\Delta x$ 라 하면

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$ 이다. 이때 오른쪽 그림과 같이  $n$ 개의 직사각형을 만들고, 이 직사각형의 넓이의 합을  $S_n$ 이라 하면



$$S_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x = \sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x$$

이다. 여기서  $n \rightarrow \infty$ 이면  $S_n$ 은 곡선  $y=f(x)$ 와  $x$ 축 및 두 직선  $x=a, x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이  $S$ 에 한없이 가까워지므로

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x$$

이다. 한편 닫힌구간  $[a, b]$ 에서  $f(x) \geq 0$ 인 곡선  $y=f(x)$ 와  $x$ 축 및 두 직선  $x=a, x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_a^b f(x) dx$$

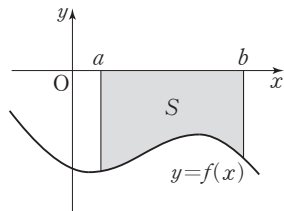
이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x = \int_a^b f(x) dx$$

가 성립한다.

한편 함수  $f(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속이고,  $f(x) \leq 0$ 이면  $f(x_k) \leq 0, \Delta x > 0$

이므로 곡선  $y=f(x)$ 와  $x$ 축 및 두 직선  $x=a, x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를  $S$ 라 하면



$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x &= -S \\ &= -\int_a^b |f(x)| dx \\ &= -\int_a^b \{-f(x)\} dx \\ &= \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

**참고** (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} = \int_0^1 f(x) dx$

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{pk}{n}\right) \frac{p}{n} = \int_0^p f(x) dx = p \int_0^1 f(px) dx$  (단,  $p$ 는 상수)

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{pk}{n}\right) \frac{p}{n} = \int_a^{a+p} f(x) dx = \int_0^p f(a+x) dx = p \int_0^1 f(a+px) dx$  (단,  $a, p$ 는 상수)





# 예제 1

## 정적분과 급수

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \cos \frac{\pi k}{4n}$ 의 값은?

- ① 1                      ②  $\sqrt{2}$                       ③ 2                      ④  $2\sqrt{2}$                       ⑤ 4

**풀이 전략** 주어진 급수를 정적분의 정의를 이용하여 정적분으로 변형한다.

$$\begin{aligned}
 \text{풀이} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \cos \frac{\pi k}{4n} &= 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \cos \frac{\pi k}{4n} \times \frac{\pi}{4n} \\
 &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \, dx \\
 &= 4 \left[ \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= 4 \left( \sin \frac{\pi}{4} - \sin 0 \right) \\
 &= 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

답 ④

정답과 풀이 48쪽

유제

[20010-0152]

1  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{\frac{n+2k}{n}}$ 의 값은?

- ①  $\frac{1}{3}(\sqrt{3}-1)$                       ②  $\frac{1}{3}(2\sqrt{3}-1)$                       ③  $\frac{1}{3}(3\sqrt{3}-1)$   
 ④  $\frac{1}{3}(4\sqrt{3}-1)$                       ⑤  $\frac{1}{3}(5\sqrt{3}-1)$

유제

[20010-0153]

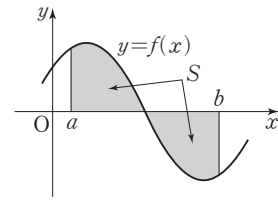
2  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \times \cdots \times \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right\}^{\frac{1}{n}}$ 의 값은?

- ①  $2 \ln 2 - 2$                       ②  $2 \ln 2 - 1$                       ③  $2 \ln 2$   
 ④  $2 \ln 2 + 1$                       ⑤  $2 \ln 2 + 2$

## 2. 곡선과 $x$ 축 사이의 넓이

함수  $f(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속일 때, 곡선  $y=f(x)$ 와  $x$ 축 및 두 직선  $x=a, x=b$ 로 둘러싸인 부분의 넓이  $S$ 는

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$



**[설명]** 함수  $f(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속일 때, 곡선  $y=f(x)$ 와  $x$ 축 및 두 직선  $x=a, x=b$ 로 둘러싸인 부분의 넓이  $S$ 를 각 경우로 나누어 구해 보면 다음과 같다.

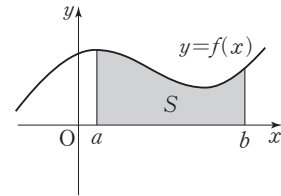
(i) 닫힌구간  $[a, b]$ 에서  $f(x) \geq 0$ 일 때,

정적분의 정의에 의하여 구하는 부분의 넓이  $S$ 는

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

이때  $f(x) = |f(x)|$ 이므로

$$S = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b |f(x)| dx$$

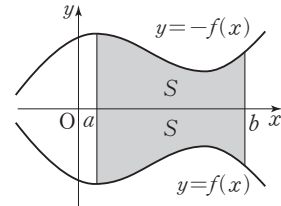


(ii) 닫힌구간  $[a, b]$ 에서  $f(x) \leq 0$ 일 때,

곡선  $y=f(x)$ 와 곡선  $y=-f(x)$ 는  $x$ 축에 대하여 대칭이므로 곡선  $y=-f(x)$ 와  $x$ 축 및 두 직선  $x=a, x=b$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는  $S$ 와 같다.

이때  $-f(x) \geq 0$ 이고  $-f(x) = |f(x)|$ 이므로 구하는 부분의 넓이  $S$ 는

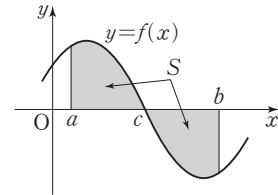
$$S = \int_a^b \{-f(x)\} dx = \int_a^b |f(x)| dx$$



(iii) 닫힌구간  $[a, c]$ 에서  $f(x) \geq 0$ , 닫힌구간  $[c, b]$ 에서  $f(x) \leq 0$ 일 때,

위의 (i), (ii)에 의하여 구하는 부분의 넓이  $S$ 는

$$\begin{aligned} S &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b \{-f(x)\} dx \\ &= \int_a^c |f(x)| dx + \int_c^b |f(x)| dx \\ &= \int_a^b |f(x)| dx \end{aligned}$$

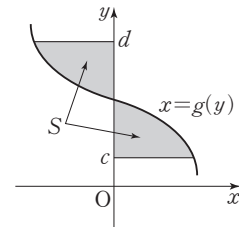


**[참고]** 곡선과  $y$ 축 사이의 넓이

함수  $x=g(y)$ 가 닫힌구간  $[c, d]$ 에서 연속일 때,

곡선  $x=g(y)$ 와  $y$ 축 및 두 직선  $y=c, y=d$ 로 둘러싸인 부분의 넓이  $S$ 는

$$S = \int_c^d |g(y)| dy$$





## 예제 2

### 곡선과 좌표축 사이의 넓이

닫힌구간  $[0, \ln 4]$ 에서 곡선  $y=e^x-2$ 와 두 직선  $x=0$ ,  $x=\ln 4$  및  $x$ 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

- ①  $\ln 2$                       ② 1                      ③  $2 \ln 2$                       ④  $3 \ln 2$                       ⑤ 3

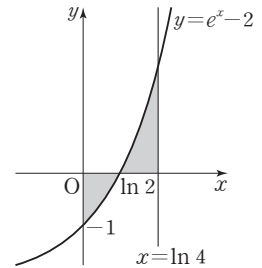
**풀이 전략**  $0 \leq x \leq \ln 4$ 인 범위에서 곡선  $y=e^x-2$ 와  $x$ 축이 만나는 점의  $x$ 좌표를 구한다.

**풀이**  $e^x-2=0$ 에서  $e^x=2$ 이므로

$$x=\ln 2$$

따라서 곡선  $y=e^x-2$ 와 두 직선  $x=0$ ,  $x=\ln 4$  및  $x$ 축으로 둘러싸인 부분은 그림과 같으므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 4} |e^x-2| dx &= \int_0^{\ln 2} (2-e^x) dx + \int_{\ln 2}^{\ln 4} (e^x-2) dx \\ &= \left[ 2x-e^x \right]_0^{\ln 2} + \left[ e^x-2x \right]_{\ln 2}^{\ln 4} \\ &= \{(2 \ln 2-2)-(-1)\} + \{(4-2 \ln 4)-(2-2 \ln 2)\} \\ &= (2 \ln 2-1) + (2-2 \ln 2) \\ &= 1 \end{aligned}$$



답 ②

정답과 풀이 49쪽

[20010-0154]

**유제 3** 곡선  $y=\frac{x-2}{x}$ 와 직선  $x=4$  및  $x$ 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

- ①  $2-2 \ln 2$                       ②  $3-2 \ln 2$                       ③  $4-2 \ln 2$                       ④  $5-2 \ln 2$                       ⑤  $6-2 \ln 2$

[20010-0155]

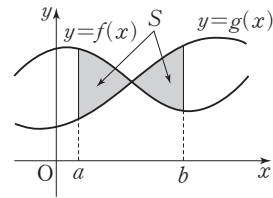
**유제 4** 닫힌구간  $[0, 2\pi]$ 에서 곡선  $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 와 두 직선  $x=0$ ,  $x=2\pi$  및  $x$ 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

- ① 1                      ② 2                      ③ 3                      ④ 4                      ⑤ 5

### 3. 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이

두 함수  $y=f(x)$ ,  $y=g(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속일 때, 두 곡선  $y=f(x)$ 와  $y=g(x)$  및 두 직선  $x=a$ ,  $x=b$ 로 둘러싸인 부분의 넓이  $S$ 는

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$



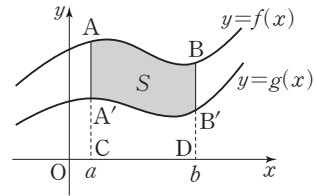
**설명** (i) 닫힌구간  $[a, b]$ 에서  $0 \leq g(x) \leq f(x)$ 일 때, 구하는 넓이  $S$ 는

$S = (\text{도형 ACDB의 넓이}) - (\text{도형 A'CDB'의 넓이})$

$$= \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

$$= \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx$$

$$= \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$



(ii) 닫힌구간  $[a, b]$ 에서  $g(x) \leq f(x)$ 이지만  $g(x)$  또는  $f(x)$ 가 음의 값을 가질 때, 그림과 같이 두 곡선  $y=f(x)$ ,  $y=g(x)$ 를  $y$ 축의 방향으로  $k$ 만큼 평행이동하여 닫힌구간  $[a, b]$ 에서

$$0 \leq g(x) + k \leq f(x) + k$$

가 되도록 한다.

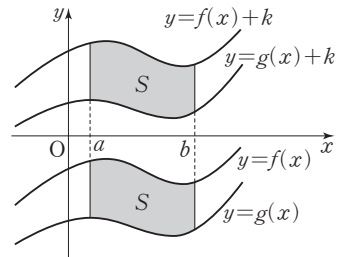
이때 평행이동한 부분의 넓이는 변하지 않으므로 구하는 넓이  $S$ 는

$$S = \int_a^b \{f(x) + k\} dx - \int_a^b \{g(x) + k\} dx$$

$$= \int_a^b [\{f(x) + k\} - \{g(x) + k\}] dx$$

$$= \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx$$

$$= \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$



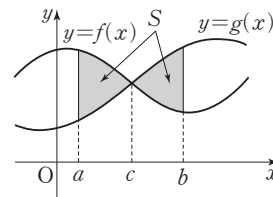
(iii) 닫힌구간  $[a, c]$ 에서  $f(x) \geq g(x)$ 이고 닫힌구간  $[c, b]$ 에서  $f(x) \leq g(x)$ 일 때,

(i), (ii)에 의하여 구하는 넓이  $S$ 는

$$S = \int_a^c \{f(x) - g(x)\} dx + \int_c^b \{g(x) - f(x)\} dx$$

$$= \int_a^c |f(x) - g(x)| dx + \int_c^b |f(x) - g(x)| dx$$

$$= \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$





### 예제 3

### 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이

두 곡선  $y=2e^x-2$ ,  $y=e^x$  및  $y$ 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

- ①  $-1+2\ln 2$       ②  $-\frac{1}{2}+2\ln 2$       ③  $2\ln 2$       ④  $\frac{1}{2}+2\ln 2$       ⑤  $1+2\ln 2$

**풀이 전략** 두 곡선  $y=2e^x-2$ ,  $y=e^x$ 을 그려서 구하고자 하는 부분을 나타내어 본다.

**풀이** 두 곡선  $y=2e^x-2$ ,  $y=e^x$ 의 교점의  $x$ 좌표는

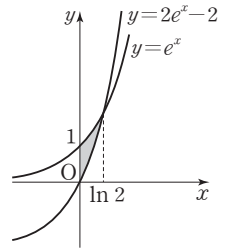
$$2e^x-2=e^x, e^x=2$$

따라서  $x=\ln 2$

이때 두 곡선  $y=2e^x-2$ ,  $y=e^x$  및  $y$ 축으로 둘러싸인 부분은 그림과 같다.

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 2} \{e^x - (2e^x - 2)\} dx &= \int_0^{\ln 2} (-e^x + 2) dx \\ &= \left[ -e^x + 2x \right]_0^{\ln 2} \\ &= (-2 + 2\ln 2) - (-1) \\ &= -1 + 2\ln 2 \end{aligned}$$



답 ①

정답과 풀이 49쪽

[20010-0156]

유제

5  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 두 곡선  $y=\sin x$ ,  $y=\sin x \cos x$  및 직선  $x=\frac{\pi}{2}$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는?

- ① 1      ②  $\frac{1}{2}$       ③  $\frac{1}{3}$       ④  $\frac{1}{4}$       ⑤  $\frac{1}{5}$

[20010-0157]

유제

6 곡선  $y=\ln x$ 와 이 곡선 위의 두 점  $P(1, 0)$ ,  $Q(e, 1)$ 을 지나는 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

- ①  $\frac{3-e}{2}$       ②  $\frac{4-e}{2}$       ③  $\frac{5-e}{2}$       ④  $\frac{6-e}{2}$       ⑤  $\frac{7-e}{2}$

#### 4. 입체도형의 부피

닫힌구간  $[a, b]$ 에서  $x$ 좌표가  $x$ 인 점을 지나고  $x$ 축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가  $S(x)$ 이고, 함수  $S(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속일 때, 이 입체도형의 부피  $V$ 는

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

**설명**  $x$ 축 위의 닫힌구간  $[a, b]$ 를  $n$ 등분하여 양 끝 점과 각 분점의  $x$ 좌표를 차례대로

$$x_0 (=a), x_1, x_2, \dots, x_n (=b)$$

라 하고  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ 라 하자.

이때 각 점  $x_k$  ( $k=1, 2, 3, \dots, n$ )에서  $x$ 축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이  $S(x_k)$ 를 밑면의 넓이로 하고 높이가  $\Delta x$ 인  $n$ 개의 기둥의 부피의 합  $V_n$ 은

$$\begin{aligned} V_n &= S(x_1)\Delta x + S(x_2)\Delta x + S(x_3)\Delta x + \dots + S(x_n)\Delta x \\ &= \sum_{k=1}^n S(x_k)\Delta x \end{aligned}$$

따라서 구하는 입체도형의 부피  $V$ 는 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n S(x_k)\Delta x = \int_a^b S(x) dx$$

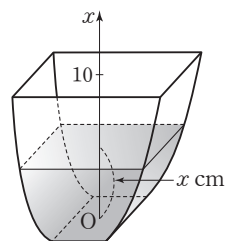
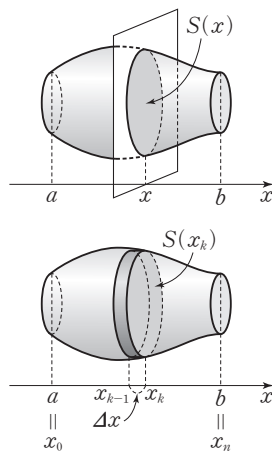
**예** 그림과 같은 모양의 컵에 채워진 물의 높이가 밑면으로부터  $x$  cm일 때, 수면은 한 변의 길이가  $\sqrt{2x+1}$  cm인 정사각형이다. 이 컵의 높이가 10 cm이고 물이 가득 채워져 있을 때, 물의 부피  $V$ 는 다음과 같이 구한다.

컵의 밑면의 대각선의 교점을 원점으로 하고, 이 점을 지나고 밑면에 수직인 직선의 위쪽을  $x$ 축의 양의 방향이라 하자.  $x$ 좌표가  $x$ 인 점을 지나고  $x$ 축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를  $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = (\sqrt{2x+1})^2 = 2x+1 (\text{cm}^2)$$

따라서 구하는 부피  $V$ 는

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{10} S(x) dx \\ &= \int_0^{10} (2x+1) dx \\ &= \left[ x^2 + x \right]_0^{10} \\ &= 110 (\text{cm}^3) \end{aligned}$$

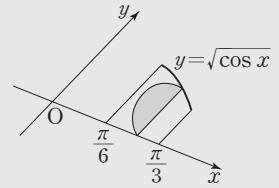




## 예제 4

### 입체도형의 부피

그림과 같이 곡선  $y = \sqrt{\cos x}$  ( $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ )와  $x$ 축 및 두 직선  $x = \frac{\pi}{6}$ ,  $x = \frac{\pi}{3}$ 로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을  $x$ 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 반원일 때, 이 입체도형의 부피는?



- ①  $\frac{\sqrt{2}-1}{16}\pi$       ②  $\frac{\sqrt{3}-1}{16}\pi$       ③  $\frac{1}{16}\pi$   
 ④  $\frac{\sqrt{5}-1}{16}\pi$       ⑤  $\frac{\sqrt{6}-1}{16}\pi$

**풀이 전략** 단면의 넓이  $S(x)$ 를 구한 후 부피  $V$ 는  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} S(x) dx$ 임을 이용하여 구한다.

**풀이** 이 입체도형을  $x$ 좌표가  $x$  ( $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ )인 점을 지나고  $x$ 축에 수직인 평면으로 자른 단면은 지름의 길이가  $\sqrt{\cos x}$ 인 반원이므로 단면의 넓이를  $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \frac{1}{2} \times \pi \times \left( \frac{\sqrt{\cos x}}{2} \right)^2 = \frac{\pi}{8} \cos x$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를  $V$ 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} S(x) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\pi}{8} \cos x dx \\ &= \left[ \frac{\pi}{8} \sin x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{16} \pi \end{aligned}$$

답 ②

정답과 풀이 50쪽

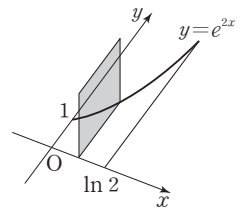
[20010-0158]

## 유제

### 7

그림과 같이 곡선  $y = e^{2x}$  ( $0 \leq x \leq \ln 2$ )와  $x$ 축 및 두 직선  $x = 0$ ,  $x = \ln 2$ 로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을  $x$ 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는?

- ①  $\frac{11}{4}$       ② 3      ③  $\frac{13}{4}$   
 ④  $\frac{7}{2}$       ⑤  $\frac{15}{4}$



## 5. 좌표평면 위를 움직이는 점이 움직인 거리

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각  $t$ 에서의 위치가  $x=f(t)$ ,  $y=g(t)$ 일 때,  $t=a$ 에서  $t=b$ 까지 점 P가 움직인 거리  $s$ 는

$$\begin{aligned} s &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2} dt \end{aligned}$$

**예** 좌표평면 위를 움직이는 점 P( $x, y$ )의 시각  $t$ 에서의 위치가  $x=\cos t$ ,  $y=\sin t$ 일 때, 시각  $t=0$ 에서  $t=\pi$ 까지 점 P가 움직인 거리  $s$ 를 구해 보자.

$\frac{dx}{dt} = -\sin t$ ,  $\frac{dy}{dt} = \cos t$ 이므로 시각  $t=0$ 에서  $t=\pi$ 까지 점 P가 움직인 거리  $s$ 는

$$s = \int_0^\pi \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt = \int_0^\pi \sqrt{1} dt = \left[ t \right]_0^\pi = \pi$$

## 6. 곡선의 길이

(1) 곡선 위의 점  $(x, y)$ 가 각각  $x=f(t)$ ,  $y=g(t)$ 이고 겹쳐지는 부분이 없을 때,  $a \leq t \leq b$ 에서 이 곡선의 길이  $l$ 은

$$\begin{aligned} l &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2} dt \end{aligned}$$

(2)  $a \leq x \leq b$ 에서 곡선  $y=f(x)$ 의 길이  $l$ 은

$$\begin{aligned} l &= \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx \end{aligned}$$

**예** 곡선 위의 점  $(x, y)$ 가  $x=\sin t$ ,  $y=\cos t$ 일 때,  $0 \leq t \leq 2\pi$ 에서 이 곡선의 길이를 구해 보자.

$\frac{dx}{dt} = \cos t$ ,  $\frac{dy}{dt} = -\sin t$ 이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos t)^2 + (-\sin t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1} dt = \left[ t \right]_0^{2\pi} = 2\pi$$





## 예제 5

### 좌표평면 위를 움직이는 점이 움직인 거리

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각  $t$ 에서의 위치  $(x, y)$ 가  $x = \frac{4}{3}t\sqrt{t}$ ,  $y = \frac{1}{2}t^2 - t$ 일 때,  $t=2$ 에서  $t=4$ 까지 점 P가 움직인 거리는?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

**풀이 전략**  $x, y$ 를 각각  $t$ 에 대하여 미분한 후  $s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$ 임을 이용한다.

**풀이**  $x = \frac{4}{3}t\sqrt{t} = \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}$ 에서  $\frac{dx}{dt} = 2t^{\frac{1}{2}}$ ,  $y = \frac{1}{2}t^2 - t$ 에서  $\frac{dy}{dt} = t - 1$ 이므로

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (2t^{\frac{1}{2}})^2 + (t-1)^2 = 4t + (t^2 - 2t + 1) = t^2 + 2t + 1 = (t+1)^2$$

따라서 점 P가  $t=2$ 에서  $t=4$ 까지 움직인 거리를  $s$ 라 하면

$$\begin{aligned} s &= \int_2^4 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_2^4 \sqrt{(t+1)^2} dt = \int_2^4 (t+1) dt \\ &= \left[ \frac{1}{2}t^2 + t \right]_2^4 = 12 - 4 = 8 \end{aligned}$$

답 ③

정답과 풀이 50쪽

[20010-0159]

유제

8

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각  $t$ 에서의 위치  $(x, y)$ 가  $x = e^t + e^{-t}$ ,  $y = 2t$ 일 때,  $t=0$ 에서  $t=\ln 2$ 까지 점 P가 움직인 거리는?

①  $\frac{1}{2}$ 

② 1

③  $\frac{3}{2}$ 

④ 2

⑤  $\frac{5}{2}$ 

[20010-0160]

유제

9

매개변수  $t$ 로 나타낸 곡선  $x = 4\sqrt{t}$ ,  $y = \ln t - t$ 에 대하여  $1 \leq t \leq e$ 일 때, 이 곡선의 길이는?

①  $e$ ②  $2e$ ③  $3e$ ④  $4e$ ⑤  $5e$

[20010-0161]

1  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k \times \sqrt[n]{e^k}}{n^2}$ 의 값은?

- ① 1                      ② 2                      ③ 3                      ④ 4                      ⑤ 5

[20010-0162]

2  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \sqrt{\frac{n}{2n+1}} + \sqrt{\frac{n}{2n+2}} + \sqrt{\frac{n}{2n+3}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{2n+n}} \right)$ 의 값은?

- ①  $2(\sqrt{2}-1)$               ②  $2(\sqrt{3}-\sqrt{2})$               ③  $2(2-\sqrt{3})$               ④  $2(\sqrt{5}-2)$               ⑤  $2(\sqrt{6}-\sqrt{5})$

[20010-0163]

3 곡선  $y = \ln x$ 와 두 직선  $y=0$ ,  $y=1$  및  $y$ 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

- ①  $e-2$                       ②  $e-1$                       ③  $e$                       ④  $e+1$                       ⑤  $e+2$

[20010-0164]

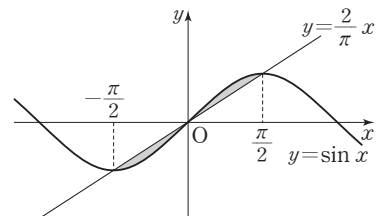
4 닫힌구간  $[0, \pi]$ 에서 함수  $f(x) = 2 \cos 2x - 1$ 의 그래프와 두 직선  $x=0$ ,  $x=\pi$  및  $x$ 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

- ①  $\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$                       ②  $2\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$                       ③  $3\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$                       ④  $4\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$                       ⑤  $5\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$

[20010-0165]

5 그림과 같이 곡선  $y = \sin x$ 와 직선  $y = \frac{2}{\pi}x$ 는 세 점  $\left(-\frac{\pi}{2}, -1\right)$ ,  $(0, 0)$ ,  $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ 에서 만난다. 곡선  $y = \sin x$ 와 직선  $y = \frac{2}{\pi}x$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는?

- ①  $2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$                       ②  $2\left(1 - \frac{\pi}{5}\right)$                       ③  $2\left(1 - \frac{\pi}{6}\right)$   
④  $2\left(1 - \frac{\pi}{7}\right)$                       ⑤  $2\left(1 - \frac{\pi}{8}\right)$



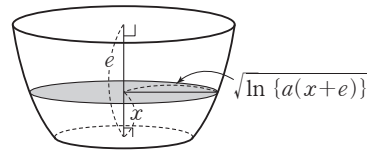
[20010-0166]

**6** 곡선  $y=e^x$  위의 점  $(0, 1)$ 에서의 접선을  $l$ 이라 하자. 곡선  $y=e^x$ 과 접선  $l$  및 직선  $x=2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는?

- ①  $e^2-5$       ②  $e^2-4$       ③  $e^2-3$       ④  $e^2-2$       ⑤  $e^2-1$

[20010-0167]

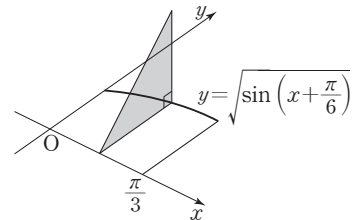
**7** 그림과 같이 높이가  $e$ 인 입체도형을 밑면으로부터 높이가  $x$ 인 지점에서 밑면에 평행한 평면으로 자른 단면이 반지름의 길이가  $\sqrt{\ln\{a(x+e)\}}$ 인 원이다. 이 입체도형의 부피가  $\pi(2e+2e\ln 2)$ 일 때, 양수  $a$ 의 값은?



- ①  $e$       ②  $e^2$       ③  $e^3$       ④  $e^4$       ⑤  $e^5$

[20010-0168]

**8** 그림과 같이 곡선  $y=\sqrt{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$  ( $0\leq x\leq\frac{\pi}{3}$ )와  $x$ 축 및 두 직선  $x=0$ ,  $x=\frac{\pi}{3}$ 로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을  $x$ 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 그림과 같은 직각이등변삼각형일 때, 이 입체도형의 부피는?



- ①  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       ②  $\frac{\sqrt{3}}{3}$       ③  $\frac{\sqrt{3}}{4}$       ④  $\frac{\sqrt{3}}{5}$       ⑤  $\frac{\sqrt{3}}{6}$

[20010-0169]

**9**  $\frac{1}{4}\leq x\leq\frac{4}{3}$ 일 때, 곡선  $y=x^{\frac{3}{2}}$ 의 길이는?

- ①  $\frac{37}{24}$       ②  $\frac{13}{8}$       ③  $\frac{41}{24}$       ④  $\frac{43}{24}$       ⑤  $\frac{15}{8}$

[20010-0170]

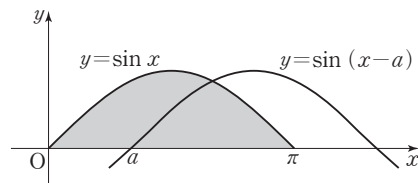
**1** 두 곡선  $y = \ln x$ ,  $y = \ln(2x-1)$ 과 직선  $x=e$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가  $\ln \frac{(2e-1)^k}{e^e}$ 일 때,  $k$ 의 값은?

- ①  $e-1$                       ②  $e-\frac{1}{2}$                       ③  $e$                       ④  $e+\frac{1}{2}$                       ⑤  $e+1$

[20010-0171]

**2** 그림과 같이  $0 \leq x \leq \pi$ 에서 곡선  $y = \sin x$ 와  $x$ 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 곡선  $y = \sin(x-a)$  ( $0 < a < \pi$ )가 이등분할 때, 상수  $a$ 의 값은?

- ①  $\frac{\pi}{2}$                       ②  $\frac{\pi}{3}$                       ③  $\frac{\pi}{4}$   
④  $\frac{\pi}{5}$                       ⑤  $\frac{\pi}{6}$



[20010-0172]

**3** 자연수  $n$ 에 대하여 함수  $f(x) = x^n(1-x)$  ( $x \geq 0$ )의 그래프와  $x$ 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를  $S_n$ 이라 할 때,  $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은?

- ①  $\frac{1}{2}$                       ②  $\frac{1}{3}$                       ③  $\frac{1}{4}$                       ④  $\frac{1}{5}$                       ⑤  $\frac{1}{6}$

[20010-0173]

**4** 함수  $f(x) = ae^x + be^{-x}$ 이  $x=1$ 에서 극솟값  $2e$ 를 가질 때, 함수  $y=f(x)$ 의 그래프와 직선  $y=2e$  및  $y$ 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단,  $a, b$ 는 상수이다.)

- ①  $e^2 - 2e - 1$                       ②  $e^2 - 2e$                       ③  $e^2 - 2e + 1$   
④  $e^2 - 2e + 2$                       ⑤  $e^2 - 2e + 3$

[20010-0174]

5 모든 자연수  $n$ 에 대하여 수열  $\{a_n\}$ 이

$$a_{3n-2} = \frac{1}{2n-1}, a_{3n-1} = \frac{1}{2n}, a_{3n} = -\frac{1}{n}$$

을 만족시킨다. 수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합을  $S_n$ 이라 할 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n}$ 의 값은?

- ①  $\ln 2$                       ②  $\ln 3$                       ③  $\ln 4$                       ④  $\ln 5$                       ⑤  $\ln 6$

[20010-0175]

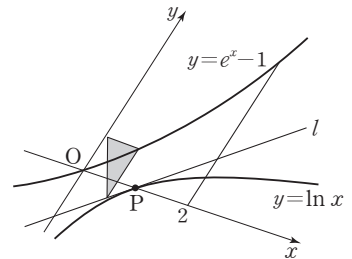
6 곡선  $y = \sqrt{2x+6}$  위의 점 P에서의 접선과 수직이고 점 P를 지나는 직선을  $l$ 이라 하자. 직선  $l$ 이 원점을 지날 때, 곡선  $y = \sqrt{2x+6}$ 과 직선  $l$  및  $x$ 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, 점 P는  $x$ 축 위의 점이 아니다.)

- ①  $\frac{11}{3}$                       ② 4                      ③  $\frac{13}{3}$                       ④  $\frac{14}{3}$                       ⑤ 5

[20010-0176]

7 곡선  $y = e^x - 1$ 과 곡선  $y = \ln x$  위의 점 P(1, 0)에서의 접선  $l$ 이 있다. 그림과 같이 곡선  $y = e^x - 1$  및 접선  $l$ 과 두 직선  $x = 0$ ,  $x = 2$ 로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형을  $x$ 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정삼각형일 때, 이 입체도형의 부피는?

- ①  $\frac{\sqrt{3}}{8}e^4 - \frac{\sqrt{3}}{2}e^2 + \frac{\sqrt{3}}{24}$                       ②  $\frac{\sqrt{3}}{8}e^4 + \frac{\sqrt{3}}{2}e^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}$   
 ③  $\frac{\sqrt{3}}{6}e^4 - \frac{\sqrt{3}}{2}e^2 + \frac{\sqrt{3}}{8}$                       ④  $\frac{\sqrt{3}}{6}e^4 + \frac{\sqrt{3}}{2}e^2 + \frac{\sqrt{3}}{8}$   
 ⑤  $\frac{\sqrt{3}}{4}e^4 - \frac{\sqrt{3}}{2}e^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$



[20010-0177]

8 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각  $t$  ( $t > 0$ )에서의 위치  $(x, y)$ 가

$$x = \sin t - t \cos t, y = \cos t + t \sin t$$

일 때,  $t = k$ 에서의 점 P의 속력이 3이다.  $t = 1$ 에서  $t = k$ 까지 점 P가 움직인 거리는?

- ① 3                      ②  $\frac{7}{2}$                       ③ 4                      ④  $\frac{9}{2}$                       ⑤ 5

[20010-0178]

1 함수  $f(x) = x - \frac{1}{x}$ 의 그래프와 직선  $y = a - \frac{1}{a}$  및  $x$ 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를  $S(a)$ 라 할 때,

$\lim_{a \rightarrow 1^+} \frac{S(a)}{a-1}$ 의 값은? (단,  $a > 1$ )

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

[20010-0179]

2 정의역이  $\{x | x \geq 0\}$ 인 두 함수  $f(x) = x\sqrt{x}$ ,  $g(x) = x\sqrt{e^{x-1}}$ 에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. 정의역의 모든 원소  $x$ 에 대하여  $f(x) \leq g(x)$ 이다.

ㄴ. 방정식  $f(x) = g(x)$ 는 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄷ. 두 함수  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$ 의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는  $4e^{-\frac{1}{2}} - \frac{12}{5}$ 이다.

① ㄱ

② ㄷ

③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[20010-0180]

3 닫힌구간  $[0, \pi]$ 에서 정의된 함수  $f(x) = x \sin x$ 가 있다.  $0 < x < \pi$ 에서 함수  $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점 P에서의 접선  $l$ 이 원점을 지날 때, 접선  $l$ 과 함수  $f(x) = x \sin x$ 의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는?

①  $\frac{\pi^2 - 8}{8}$ ②  $\frac{\pi^2 - 7}{8}$ ③  $\frac{\pi^2 - 6}{8}$ ④  $\frac{\pi^2 - 5}{8}$ ⑤  $\frac{\pi^2 - 4}{8}$ 

[20010-0181]

4 정의역이  $\left\{x \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$ 인 함수  $f(x) = \int_0^x \tan \theta \, d\theta$ 가 있다.  $0 < t < \frac{\pi}{2}$ 인 실수  $t$ 에 대하여  $0 \leq x \leq t$

일 때 곡선  $y = f(x)$ 의 곡선의 길이를  $l(t)$ 라 하자.  $\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left\{ l(t) + \ln \frac{\sin t}{f'(t)} \right\}$ 의 값은?

①  $\ln 2$ ②  $\ln 3$ ③  $\ln 4$ ④  $\ln 5$ ⑤  $\ln 6$

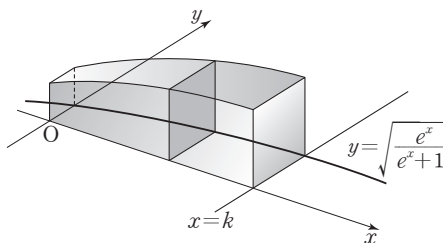


## 대표 기출 문제

### 출제 경향

급수의 합을 정적분을 이용하여 구하는 문제, 정적분을 이용하여 넓이를 구하는 문제, 입체도형의 부피를 구하는 문제, 속도와 거리에 관한 문제가 주로 출제된다.

그림과 같이 양수  $k$ 에 대하여 곡선  $y = \sqrt{\frac{e^x}{e^x+1}}$ 과  $x$ 축,  $y$ 축 및 직선  $x=k$ 로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고  $x$ 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피가  $\ln 7$ 일 때,  $k$ 의 값은? [3점]



①  $\ln 11$

②  $\ln 13$

③  $\ln 15$

④  $\ln 17$

⑤  $\ln 19$

2020학년도 대수능

**출제 의도** ▶ 정적분을 이용하여 입체도형의 부피를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

**풀이** 이 입체도형을  $x$ 좌표가  $x$  ( $0 \leq x \leq k$ )인 점을 지나고  $x$ 축에 수직인 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가

$\sqrt{\frac{e^x}{e^x+1}}$ 인 정사각형이므로 단면의 넓이를  $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \left( \sqrt{\frac{e^x}{e^x+1}} \right)^2 = \frac{e^x}{e^x+1}$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_0^k S(x) dx = \int_0^k \frac{e^x}{e^x+1} dx$$

이때  $e^x+1=t$ 로 놓으면  $x=0$ 일 때  $t=2$ ,  $x=k$ 일 때  $t=e^k+1$ 이고  $\frac{dt}{dx}=e^x$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^k \frac{e^x}{e^x+1} dx &= \int_2^{e^k+1} \frac{1}{t} dt = \left[ \ln t \right]_2^{e^k+1} \\ &= \ln(e^k+1) - \ln 2 = \ln \frac{e^k+1}{2} \end{aligned}$$

그런데 주어진 입체도형의 부피가  $\ln 7$ 이므로

$$\ln \frac{e^k+1}{2} = \ln 7$$

$$\frac{e^k+1}{2} = 7, e^k = 13$$

따라서  $k = \ln 13$

답 ②

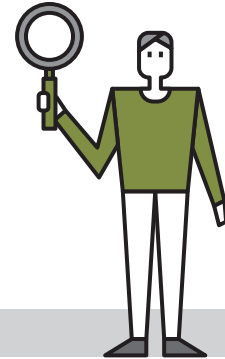
20  
20

# EBS 고교 교재 로드맵

고교 교재 선택, 더 이상 고민하지 마세요!

EBS 과목별 고교 교재 시리즈로 선택만 하면 됩니다.

이제 수준과 목표만 정하고 바로 시작할 수 있습니다.



고2 ~ 예비 고3

고3

단기/특화 · 수능 입문

기출문제

수능 실전

국어

단기 특강

영어

수능  
감(感) 잡기

2022학년도  
수능 스타트

수학

수능특강  
Light

한국사  
사회  
과학

강의노트  
수능개념

EBS  
수능기출의  
미래

연계교재



수능특강



수능완성

연계교재  
보완학습

수능특강  
사용설명서

발행과목  
국어·수학·영어  
한국사·사회·과학



수능연계  
교재의  
VOCA 1800

고난도

수능연계완성  
3/4주 특강  
고난도·신유형

수능의  
7대 함정

모의고사

FINAL  
실전모의고사

만점마무리  
봉투모의고사

고난도 시크릿X  
봉투모의고사