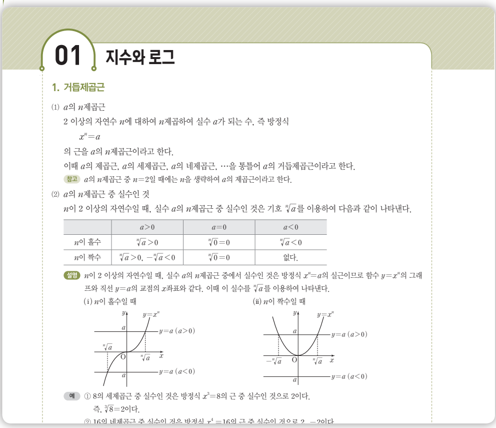
수능특강

수학영역 | **수학Ⅰ**

이 책의 차례 Contents

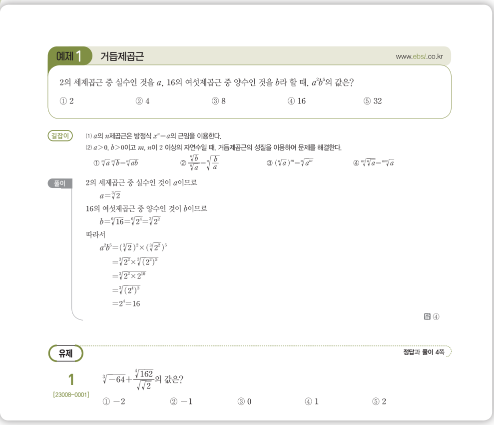
이 책의 구성과 특징 Structure

개념 정리



여러 종의 교과서를 통합하여 핵심 개념만을 체계적으로 정리하였고 설명, 참고, 예 를 제시하여 개념에 대한 이해와 적용에 도움이 되게 하였다.

예제 & 유제

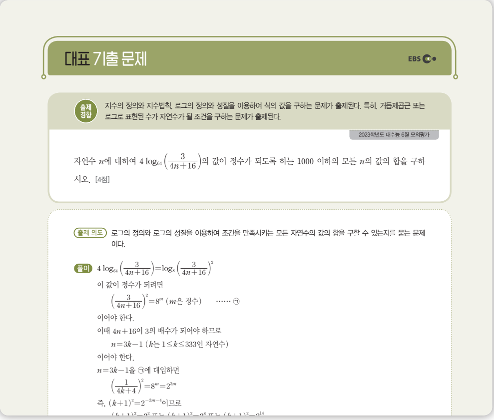


예제는 개념을 적용한 대표 문항으로 문제를 해결하는 데 필요한 주요 개념 및 풀이 전략을 길잡이로 제시하여 풀이 과정의 이해를 돕도록 하였고, 유제는 예제와 유사한 내용의 문제나 일반화된 문제를 제시하여 학습 내용과 문제에 대한 연관성을 익히도록 구성하였다.

Level 1-Level 2-Level 3

Level 1 기초 연습은 기초 개념을 제대로 숙지했는지 확인할 수 있는 문항을 제시하였으며, Level 2 기본 연습은 기본 응용 문항을, 그리고 Level 3 실력 완성은 수학적 사고력과 문제 해결 능력을 함양할 수 있는 문항을 제시하여 대학수학능력시험 실전에 대비할 수 있도록 구성하였다.

대표 기출 문제



대학수학능력시험과 모의평가 기출 문항으로 구성하였으며 기존 출제 유형을 파악할 수 있도록 출제 경향과 출제 의도를 제시하였다.

01 지수와 로그

1. 거듭제곱근

(1) a의 n제곱근

2 이상의 자연수 n에 대하여 n제곱하여 실수 a가 되는 수, 즉 방정식

$$x^n=a$$

의 근을 a의 n제곱근이라고 한다.

이때 a의 제곱근, a의 세제곱근, a의 네제곱근, …을 통틀어 a의 거듭제곱근이라고 한다.

참고 a의 n제곱근 중 $n=2$일 때에는 n을 생략하여 a의 제곱근이라고 한다.

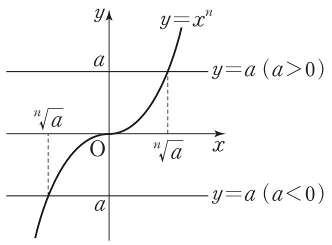
(2) a의 n제곱근 중 실수인 것

n이 2 이상의 자연수일 때, 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것은 기호 $\sqrt[n]{a}$를 이용하여 다음과 같이 나타낸다.

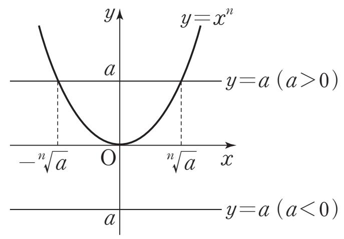
	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}>0$	$\sqrt[n]{0}=0$	$\sqrt[n]{a}<0$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}>0$, $-\sqrt[n]{a}<0$	$\sqrt[n]{0}=0$	없다.

설명 n이 2 이상의 자연수일 때, 실수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 방정식 $x^n=a$의 실근이므로 함수 $y=x^n$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표와 같다. 이때 이 실수를 $\sqrt[n]{a}$를 이용하여 나타낸다.

(i) n이 홀수일 때



(ii) n이 짝수일 때



예 ① 8의 세제곱근 중 실수인 것은 방정식 $x^3=8$의 근 중 실수인 것으로 2이다.
즉, $\sqrt[3]{8}=2$이다.
② 16의 네제곱근 중 실수인 것은 방정식 $x^4=16$의 근 중 실수인 것으로 2, -2이다.
즉, $\sqrt[4]{16}=2$, $-\sqrt[4]{16}=-2$이다.

(3) 거듭제곱근의 성질

$a>0$, $b>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때

① $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

② $\dfrac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{\dfrac{b}{a}}$

③ $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

설명 ① $a>0$, $b>0$이고 n이 2 이상의 자연수일 때, 지수법칙에 의하여 $(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n=ab$이다.
이때 $\sqrt[n]{a}>0$, $\sqrt[n]{b}>0$이므로 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}>0$이다.
따라서 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$는 ab의 n제곱근 중 양수이므로 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$이다.

예제 1 거듭제곱근

2의 세제곱근 중 실수인 것을 a, 16의 여섯제곱근 중 양수인 것을 b라 할 때, a^2b^5의 값은?

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

길잡이

(1) a의 n제곱근은 방정식 $x^n=a$의 근임을 이용한다.

(2) $a>0$, $b>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때, 거듭제곱근의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

① $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ ② $\dfrac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{\dfrac{b}{a}}$ ③ $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$ ④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

풀이

2의 세제곱근 중 실수인 것이 a이므로

$a=\sqrt[3]{2}$

16의 여섯제곱근 중 양수인 것이 b이므로

$b=\sqrt[6]{16}=\sqrt[6]{2^4}=\sqrt[3]{2^2}$

따라서

$$\begin{aligned}a^2b^5&=(\sqrt[3]{2})^2\times(\sqrt[3]{2^2})^5\\&=\sqrt[3]{2^2}\times\sqrt[3]{(2^2)^5}\\&=\sqrt[3]{2^2\times2^{10}}\\&=\sqrt[3]{(2^4)^3}\\&=2^4=16\end{aligned}$$

답 ④

유제

정답과 풀이 4쪽

1 [23008-0001]

$\sqrt[3]{-64}+\dfrac{\sqrt[4]{162}}{\sqrt{\sqrt{2}}}$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

2 [23008-0002]

a는 2의 여섯제곱근 중 양수이고 $a\times\sqrt[6]{18}$은 자연수 n의 세제곱근일 때, n의 값을 구하시오.

2. 지수가 정수일 때의 정의와 성질

(1) 지수가 0 또는 음의 정수일 때의 정의

$a \neq 0$이고 n이 양의 정수일 때

① $a^0=1$ ② $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

설명 m, n이 양의 정수일 때, 지수법칙

$a^m a^n = a^{m+n}$ …… ㉠

이 성립한다. $a \neq 0$이고 $m=0$일 때도 ㉠이 성립한다고 하면 $a^0 a^n = a^{0+n} = a^n$이므로 $a^0=1$로 정의한다.

또 $a \neq 0$이고 $m=-n$일 때도 ㉠이 성립한다고 하면 $a^{-n}a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$이므로 $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$로 정의한다.

즉, a^0과 a^{-n}은 지수가 정수일 때도 지수법칙이 일관되게 성립하도록 정의한 것이다.

(2) 지수가 정수일 때의 지수법칙

$a \neq 0$, $b \neq 0$이고 m, n이 정수일 때

① $a^m a^n = a^{m+n}$ ② $a^m \div a^n = a^{m-n}$ ③ $(a^m)^n = a^{mn}$ ④ $(ab)^n = a^n b^n$

3. 지수가 유리수일 때의 정의와 성질

(1) 지수가 유리수일 때의 정의

$a>0$이고 m은 정수, n은 2 이상의 정수일 때, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$이다. 특히 $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$이다.

(2) 지수가 유리수일 때의 지수법칙

$a>0$, $b>0$이고 r, s가 유리수일 때

① $a^r a^s = a^{r+s}$ ② $a^r \div a^s = a^{r-s}$ ③ $(a^r)^s = a^{rs}$ ④ $(ab)^r = a^r b^r$

4. 지수가 실수일 때의 정의와 성질

(1) 지수가 실수일 때의 정의

지수가 무리수인 경우는 $5^{\sqrt{2}}$을 예로 생각해 보자.

무리수 $\sqrt{2}=1.4142\cdots$에서 $\sqrt{2}$에 가까워지는 유리수 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, …를 지수로 가지는 수

5^1, $5^{1.4}$, $5^{1.41}$, $5^{1.414}$, $5^{1.4142}$, …

은 어떤 일정한 수에 한없이 가까워진다는 사실이 알려져 있다. 이 일정한 수를 $5^{\sqrt{2}}$으로 정한다.

이와 같은 방법으로 $a>0$일 때, 모든 무리수 x에 대하여 a^x을 정의할 수 있다.

따라서 $a>0$일 때, 모든 실수 x에 대하여 a^x을 정의할 수 있다.

(2) 지수가 실수일 때의 지수법칙

$a>0$, $b>0$이고 x, y가 실수일 때

① $a^x a^y = a^{x+y}$ ② $a^x \div a^y = a^{x-y}$ ③ $(a^x)^y = a^{xy}$ ④ $(ab)^x = a^x b^x$

예제 2 지수가 유리수일 때의 지수법칙

$\left(\dfrac{\sqrt[10]{2^7}\times\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt{6}}\right)^n$의 값이 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 최솟값은?

① 12 ② 16 ③ 20 ④ 24 ⑤ 28

길잡이

(1) $a>0$이고 m은 정수, n은 2 이상의 정수일 때, $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$이다.

(2) $a>0$, $b>0$이고 r, s가 유리수일 때, 지수법칙을 이용하여 식을 간단히 한다.

① $a^r a^s=a^{r+s}$ ② $a^r\div a^s=a^{r-s}$ ③ $(a^r)^s=a^{rs}$ ④ $(ab)^r=a^r b^r$

풀이

$\dfrac{\sqrt[10]{2^7}\times\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt{6}}=\dfrac{2^{\frac{7}{10}}\times3^{\frac{3}{4}}}{(2\times3)^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{2^{\frac{7}{10}}\times3^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{2}}}=2^{\frac{7}{10}-\frac{1}{2}}\times3^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{5}}\times3^{\frac{1}{4}}$

이므로

$$\left(\frac{\sqrt[10]{2^7}\times\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt{6}}\right)^n=(2^{\frac{1}{5}}\times3^{\frac{1}{4}})^n=2^{\frac{n}{5}}\times3^{\frac{n}{4}}$$

$2^{\frac{n}{5}}\times3^{\frac{n}{4}}=k$ (k는 자연수)라 하고 양변을 20제곱하면

$$2^{4n}\times3^{5n}=k^{20}$$

이므로 $k=2^l\times3^m$ (l과 m은 자연수)의 꼴이다.

이때 $2^{4n}\times3^{5n}=2^{20l}\times3^{20m}$으로부터 $n=5l=4m$을 얻는다.

즉, n은 5의 배수이면서 동시에 4의 배수이어야 한다.

따라서 n은 20의 배수이어야 하므로 n의 최솟값은 20이다.

답 ③

유제

정답과 풀이 4쪽

3 [23008-0003]

$\sqrt[3]{24}\times9^{-\frac{2}{3}}$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ 1

4 [23008-0004]

$3^x=4$, $36^y=8$을 만족시키는 두 실수 x, y에 대하여 $2^{\frac{4}{x}-\frac{3}{y}}$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

5. 로그의 정의

$a>0$, $a\neq1$, $N>0$일 때, $a^x=N$을 만족시키는 실수 x를 기호로

$\log_a N$

으로 나타낸다. 즉,

$a^x=N \Longleftrightarrow x=\log_a N$

이때 $\log_a N$에서 a를 밑, N을 진수라 하고, $\log_a N$을 a를 밑으로 하는 N의 로그라고 한다.

참고 (1) $a>0$, $a\neq1$, $N>0$일 때, $a^x=N$을 만족시키는 실수 x는 오직 하나 존재한다.

(2) $\log_a N$은 $a>0$, $a\neq1$, $N>0$인 경우만 생각한다.

예 (1) $3^2=9 \Longleftrightarrow 2=\log_3 9$

(2) $5^{-1}=\frac{1}{5} \Longleftrightarrow -1=\log_5 \frac{1}{5}$

6. 로그의 성질

$a>0$, $a\neq1$이고 $M>0$, $N>0$일 때

(1) $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$

(2) $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

(3) $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

(4) $\log_a M^k=k\log_a M$ (단, k는 실수)

설명 $a>0$, $a\neq1$이고 $M>0$, $N>0$일 때, $\log_a M=x$, $\log_a N=y$라 하면

$a^x=M$, $a^y=N$

(2) $MN=a^xa^y=a^{x+y}$이므로 로그의 정의에 의하여

$\log_a MN=x+y=\log_a M+\log_a N$

(3) $\frac{M}{N}=a^x\div a^y=a^{x-y}$이므로 로그의 정의에 의하여

$\log_a \frac{M}{N}=x-y=\log_a M-\log_a N$

(4) $M^k=(a^x)^k=a^{kx}$이므로 로그의 정의에 의하여

$\log_a M^k=kx=k\log_a M$

참고 $a>0$, $a\neq1$일 때, $a^0=1$, $a^1=a$이므로 로그의 정의에 의하여 $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$이다.

예 (1) $\log_2 6=\log_2 (2\times3)=\log_2 2+\log_2 3=1+\log_2 3$

(2) $\log_2 \frac{2}{3}=\log_2 2-\log_2 3=1-\log_2 3$

(3) $\log_2 8=\log_2 2^3=3\log_2 2=3$

예제 3 로그의 정의와 성질

두 실수 x, y가 $2^x=12$, $y=\log_2 9$를 만족시킬 때, $2x-y$의 값은?

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

길잡이 로그의 정의와 로그의 성질을 이용하여 값을 구한다.

$a>0$, $a\neq1$이고 $M>0$, $N>0$일 때

(1) $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$

(2) $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

(3) $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

(4) $\log_a M^k=k\log_a M$ (단, k는 실수)

풀이 $2^x=12$에서 $x=\log_2 12$

따라서

$$\begin{aligned}2x-y&=2\log_2 12-\log_2 9\\&=\log_2 12^2-\log_2 9\\&=\log_2 \frac{12^2}{9}\\&=\log_2 2^4\\&=4\log_2 2\\&=4\end{aligned}$$

답 ②

유제

정답과 풀이 4쪽

5 [23008-0005]

$\log_3 12+2\log_3 \dfrac{3}{2}$의 값은?

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

6 [23008-0006]

1이 아닌 세 양수 a, b, c에 대하여 $\dfrac{1}{2}\log_2 a=\log_2 \dfrac{b}{a}$, $b^3=c^4$일 때, $\log_a c$의 값은?

① $\dfrac{3}{4}$　② $\dfrac{7}{8}$　③ 1　④ $\dfrac{9}{8}$　⑤ $\dfrac{5}{4}$

7. 로그의 밑의 변환

(1) 로그의 밑의 변환

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $c>0$, $c\neq1$일 때,

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

설명 $\log_a b=x$, $\log_c a=y$라 하면 $a^x=b$, $c^y=a$이므로 지수법칙에 의하여

$$b=a^x=(c^y)^x=c^{xy}$$

이때 로그의 정의에 의하여 $xy=\log_c b$이므로

$$\log_a b\times\log_c a=\log_c b \qquad \cdots\cdots ㉠$$

한편, $a\neq1$에서 $\log_c a\neq0$이므로 ㉠의 양변을 $\log_c a$로 나누면

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

예 $\log_2 3=\dfrac{\log_5 3}{\log_5 2}$

(2) 로그의 밑의 변환의 활용

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$일 때

① $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$ (단, $b\neq1$)

② $\log_a b\times\log_b c=\log_a c$ (단, $b\neq1$, $c>0$)

③ $\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$ (단, m, n은 실수이고 $m\neq0$)

④ $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$ (단, $b\neq1$, $c>0$)

설명 ① $\log_a b=\dfrac{\log_b b}{\log_b a}=\dfrac{1}{\log_b a}$

② $\log_a b\times\log_b c=\log_a b\times\dfrac{\log_a c}{\log_a b}=\log_a c$

③ $\log_{a^m} b^n=\dfrac{\log_a b^n}{\log_a a^m}=\dfrac{n\log_a b}{m\log_a a}=\dfrac{n}{m}\log_a b$

④ $c\neq1$일 때, $a=c^x$이라 하면 $x=\log_c a$이므로

$$a^{\log_b c}=(c^{\log_c a})^{\log_b c}=c^{\log_c a\times\log_b c}=c^{\log_c a\times\frac{\log_c c}{\log_c b}}=c^{\frac{\log_c a}{\log_c b}}=c^{\log_b a}$$

한편, $c=1$일 때도 위의 식은 성립한다.

예 ① $\log_2 3=\dfrac{\log_3 3}{\log_3 2}=\dfrac{1}{\log_3 2}$

② $\log_2 3\times\log_3 5=\log_2 3\times\dfrac{\log_2 5}{\log_2 3}=\log_2 5$

③ $\log_8 16=\log_{2^3} 2^4=\dfrac{4}{3}\log_2 2=\dfrac{4}{3}$

④ $4^{\log_2 5}=5^{\log_2 4}=5^{2\log_2 2}=5^2=25$

예제 4 로그의 밑의 변환

$\log_4 3 \times \left(\log_3 16 - \dfrac{1}{\log_2 3}\right)$의 값은?

① $\dfrac{1}{2}$ ② 1 ③ $\dfrac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\dfrac{5}{2}$

길잡이 로그의 밑의 변환의 활용을 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

$a>0$, $a \neq 1$, $b>0$일 때

(1) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ (단, $b \neq 1$)

(2) $\log_a b \times \log_b c = \log_a c$ (단, $b \neq 1$, $c>0$)

풀이

$$\begin{aligned}\log_4 3 \times \left(\log_3 16 - \frac{1}{\log_2 3}\right) &= \log_4 3 \times (\log_3 16 - \log_3 2)\\ &= \log_4 3 \times \log_3 \frac{16}{2}\\ &= \log_4 3 \times \log_3 8\\ &= \log_4 3 \times \frac{\log_4 8}{\log_4 3}\\ &= \log_4 8\\ &= \log_{2^2} 2^3\\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

답 ③

유제

정답과 풀이 4쪽

7 [23008-0007]

$\log_5 16 \times \log_2 \dfrac{1}{5}$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

8 [23008-0008]

1이 아닌 세 양수 a, b, c에 대하여 $\dfrac{\log_a c}{\log_a b} = \dfrac{2}{3}$일 때, $b^{\log_c 4}$의 값을 구하시오.

8. 상용로그

(1) 상용로그의 뜻

10을 밑으로 하는 로그를 상용로그라 하고, 양수 N에 대하여 상용로그 $\log_{10} N$은 보통 밑 10을 생략하여

$$\log N$$

과 같이 나타낸다.

예 ① $\log_{10} 3=\log 3$

② $\log 100=\log_{10} 10^2=2\log_{10} 10=2$

③ $\log \frac{1}{10}=\log_{10} 10^{-1}=-\log_{10} 10=-1$

(2) 상용로그의 값 구하기

① 상용로그표를 이용하여 상용로그의 값 구하기

상용로그표는 0.01의 간격으로 1.00부터 9.99까지의 수에 대한 상용로그의 값을 반올림하여 소수점 아래 넷째 자리까지 나타낸 것이다. 예를 들어 상용로그표를 이용하여 $\log 2.34$의 값을 구하는 방법은 2.3의 행과 4의 열이 만나는 곳의 수 .3692를 찾으면 된다. 즉, $\log 2.34=0.3692$이다.

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0										
⋮										
2.3					.3692					
⋮										
9.9										

참고 상용로그표에서 .3692는 0.3692를 뜻한다.

② 양수의 상용로그의 값 구하기

양수 N은 $1\le a<10$인 실수 a와 정수 n에 대하여

$$N=a\times 10^n$$

의 꼴로 나타낼 수 있다. 이때 N의 상용로그의 값은

$$\log N=\log(a\times 10^n)=n+\log a$$

이므로 상용로그표를 이용하여 $\log a$의 값을 구한 후 n과 더하여 $\log N$의 값을 구할 수 있다.

예 상용로그표에서 $\log 2.34=0.3692$이므로

① $\log 234=\log(2.34\times 10^2)=\log 10^2+\log 2.34=2+0.3692=2.3692$

② $\log 0.234=\log(2.34\times 10^{-1})=\log 10^{-1}+\log 2.34=-1+0.3692=-0.6308$

(3) 상용로그의 활용

상용로그를 이용하면 2^{25}, $\sqrt[3]{2}$ 등과 같은 수를 10진법으로 나타내어 어림한 값을 구할 수 있다.

예 2^{25}의 어림한 값을 구하면 다음과 같다.

(i) 상용로그 $\log 2^{25}$의 값 구하기

상용로그표에서 $\log 2=0.3010$이므로 $\log 2^{25}=25\log 2=25\times 0.3010=7.5250$

(ii) 상용로그의 값으로부터 진수 구하기

상용로그표를 이용하여 $\log 3.35=0.5250$으로 계산하면 $7+0.5250=\log 10^7+\log 3.35=\log(3.35\times 10^7)$

(iii) 어림한 값 구하기

위의 (i)과 (ii)로부터 $\log 2^{25}=\log(3.35\times 10^7)$이므로 $2^{25}\fallingdotseq 3.35\times 10^7$

예제 5 상용로그

www.ebsi.co.kr

$a=\log 2$, $b=\log 3$일 때, 다음 중 $10^a \times \log_9 5$를 a, b로 나타낸 것은?

① $\dfrac{1-b}{b}$ ② $\dfrac{1-a}{b}$ ③ $\dfrac{1-a}{a}$ ④ $\dfrac{1+b}{b}$ ⑤ $\dfrac{1+b}{a}$

길잡이 상용로그의 뜻과 로그의 성질을 이용하여 주어진 식을 a, b로 나타낸다.

풀이 $10^a=10^{\log 2}=2^{\log 10}=2$

$\log_9 5=\dfrac{\log 5}{\log 9}=\dfrac{1-\log 2}{2\log 3}=\dfrac{1-a}{2b}$

따라서

$$10^a \times \log_9 5=2\times\dfrac{1-a}{2b}=\dfrac{1-a}{b}$$

답 ②

유제

정답과 풀이 5쪽

9 [23008-0009]

$\log \sqrt[3]{8.1}$의 값은? (단, $\log 3=0.4771$로 계산한다.)

① 0.1514 ② 0.3028 ③ 0.4542 ④ 0.6056 ⑤ 0.7570

10 [23008-0010]

양수 $N=a\times 10^n$ ($1\le a<10$, n은 정수)에 대하여 $\log \sqrt[5]{N^3}=1.5612$일 때, $a+n$의 값을 구하시오.

(단, $\log 2=0.3010$으로 계산한다.)

Level 1 기초 연습

[23008-0011]

1 $\sqrt[3]{8^5}\times 4^{-3}$의 값은?

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1　④ 2　⑤ 3

[23008-0012]

2 $\left(3^{\sqrt{3}+1}\times\frac{1}{9}\right)^{\sqrt{3}+1}$의 값은?

① 1　② 3　③ 9　④ 27　⑤ 81

[23008-0013]

3 -64의 세제곱근 중 실수인 것을 a라 하고, 실수 b의 네제곱근 중에서 양수인 것이 $\sqrt{5}$일 때, $a+b$의 값은?

① 21　② 22　③ 23　④ 24　⑤ 25

[23008-0014]

4 두 실수 x, y에 대하여 $6^x=4^y=27$일 때, $\frac{2}{x}-\frac{1}{y}$의 값은?

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{2}{3}$　③ 1　④ $\frac{4}{3}$　⑤ $\frac{5}{3}$

[23008-0015]

5 $\log_x(-x^2+4x+12)$가 정의되기 위한 모든 정수 x의 값의 합은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

[23008-0016]

6 $\log_3 54-\log_3 \dfrac{2}{3}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[23008-0017]

7 $(\log_2 9+4\log_4 2)\times\log_6 4$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

[23008-0018]

8 두 실수 a, b에 대하여 $3^a=\sqrt[4]{7}$, $b=\log_7 64$일 때, 9^{ab}의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

[23008-0019]

9 $\log 1.1=a$일 때, 다음 중 $\log 1210$의 값을 a로 나타낸 것은?

① $a+1$ ② $a+2$ ③ $a+3$ ④ $2a+2$ ⑤ $2a+3$

[23008-0020]

1 $(\sqrt[3]{2^{10}})^{\frac{n}{8}}$의 값이 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 최솟값은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

[23008-0021]

2 정수 a와 2 이상의 자연수 n에 대하여 64의 n제곱근이 a가 되는 두 수 n, a의 순서쌍 (n, a)의 개수는?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

[23008-0022]

3 두 양수 a, b에 대하여 $a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}=3$, $a^{-1}+b^{-1}=5$일 때, $a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$의 값은?

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

[23008-0023]

4 점 $\mathrm{A}(0, \sqrt[4]{8})$을 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=\frac{1}{2}\sqrt{x}$의 그래프와 만나는 점을 B라 하자. 삼각형 AOB의 넓이를 S라 할 때, $\log_2 S=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[23008-0024]

5 1이 아닌 두 양수 a, b에 대하여 이차방정식 $x^2-\left(\log_a \frac{a^3}{4}\right)x-2=0$의 서로 다른 두 근이 $\log_2 a$, $\log_a b$일 때, ab의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

[23008-0025]

6 두 양수 a, b에 대하여 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$, $\mathrm{B}(\log_3 a,\ \log_3 b)$를 지나는 직선과 직선 $y=\frac{1}{2}x-1$이 서로 평행하고 $\log_2 a+\log_2 27b=3$일 때, $81(a+b)$의 값을 구하시오.

[23008-0026]

7 두 실수 x, y에 대하여 $\frac{1}{4x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{3}$이고 $81^x=12^y$일 때, $4x\log_6 9+y\log_6 12$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

[23008-0027]

8 두 양수 a, b가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\log_2 a-\log_2 b=\log_{10} 314-\log_{10} 3.14$
(나) $\sqrt[4]{2^a}\times\sqrt[3]{4^{-b}}=6$

$(\sqrt[15]{4})^{a+b}$의 값을 구하시오.

[23008-0028]

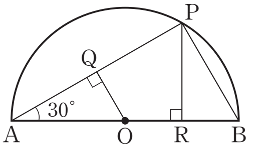
1 $a>1$, $b>1$인 두 상수 a, b에 대하여 원 $(x-\log_2 a)^2+(y-\log_2 b)^2=2$와 직선 $x+y-1=0$이 접하고 $5\log_a 2=\log_b 2$일 때, $(\sqrt[5]{a}\times\sqrt[4]{b})^8$의 값은?

① 4 ② 8 ③ 16 ④ 32 ⑤ 64

[23008-0029]

2 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB의 중점을 O라 하고, 호 AB 위의 한 점 P에 대하여 점 O에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 Q, 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 R라 하자. $\angle PAB=30°$이고 삼각형 QAO의 넓이가 $\frac{\sqrt[4]{27}}{2}$일 때, $\log_3(\overline{AR}\times\overline{BR})=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[23008-0030]

3 다음 조건을 만족시키는 세 수 a, b, n의 모든 순서쌍 (a, b, n)의 개수는?

(가) $\log_2(8a-a^2)$의 값은 자연수이다.
(나) 2 이상의 어떤 자연수 n에 대하여 b는 $8a-a^2$의 n제곱근 중 정수이다.

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

대표 기출 문제

EBS

출제 경향 지수의 정의와 지수법칙, 로그의 정의와 성질을 이용하여 식의 값을 구하는 문제가 출제된다. 특히, 거듭제곱근 또는 로그로 표현된 수가 자연수가 될 조건을 구하는 문제가 출제된다.

2023학년도 대수능 6월 모의평가

자연수 n에 대하여 $4\log_{64}\left(\dfrac{3}{4n+16}\right)$의 값이 정수가 되도록 하는 1000 이하의 모든 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

출제 의도 로그의 정의와 로그의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 모든 자연수의 값의 합을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 $4\log_{64}\left(\dfrac{3}{4n+16}\right)=\log_8\left(\dfrac{3}{4n+16}\right)^2$

이 값이 정수가 되려면

$$\left(\frac{3}{4n+16}\right)^2=8^m\ (m\text{은 정수}) \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이어야 한다.

이때 $4n+16$이 3의 배수가 되어야 하므로

$$n=3k-1\ (k\text{는 } 1\le k\le 333\text{인 자연수})$$

이어야 한다.

$n=3k-1$을 ㉠에 대입하면

$$\left(\frac{1}{4k+4}\right)^2=8^m=2^{3m}$$

즉, $(k+1)^2=2^{-3m-4}$이므로

$$(k+1)^2=2^2 \text{ 또는 } (k+1)^2=2^8 \text{ 또는 } (k+1)^2=2^{14}$$

$$k+1=2 \text{ 또는 } k+1=2^4 \text{ 또는 } k+1=2^7$$

$$k=1 \text{ 또는 } k=15 \text{ 또는 } k=127$$

따라서 $n=2$ 또는 $n=44$ 또는 $n=380$이므로 모든 n의 값의 합은

$$2+44+380=426$$

답 426

02 지수함수와 로그함수

1. 지수함수의 뜻

a가 1이 아닌 양수일 때, 실수 x에 a^x의 값을 대응시키는 함수

$$y=a^x$$

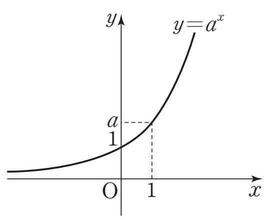
을 a를 밑으로 하는 지수함수라고 한다.

참고 함수 $y=a^x$에서 지수 x는 실수이므로 $a>0$인 경우만 생각한다. 또 $y=a^x$에서 $a=1$이면 모든 실수 x에 대하여 $y=1^x=1$이므로 함수 $y=a^x$은 상수함수이다. 따라서 지수함수 $y=a^x$에서는 밑이 1이 아닌 양수인 경우만 생각한다.

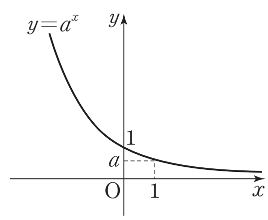
2. 지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프

지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프는 밑 a의 값의 범위에 따라 다음과 같다.

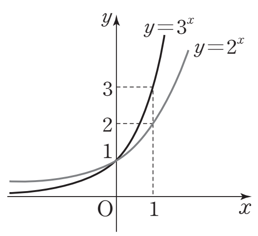
(1) $a>1$일 때

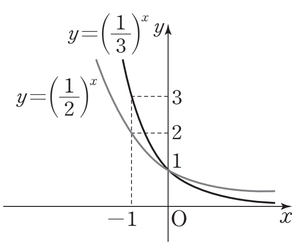


(2) $0<a<1$일 때



예 두 함수 $y=2^x$, $y=3^x$의 그래프와 두 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프는 그림과 같다.





3. 지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 성질

(1) 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.

(2) $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

$0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

(3) 그래프는 점 $(0,\ 1)$을 지나고, 점근선은 x축이다.

참고 지수함수 $y=a^x$에서

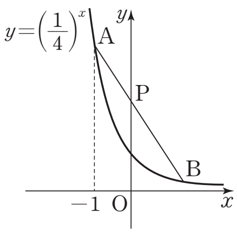
(i) $a>1$일 때, $x_1<x_2$이면 $a^{x_1}<a^{x_2}$이다.

(ii) $0<a<1$일 때, $x_1<x_2$이면 $a^{x_1}>a^{x_2}$이다.

예제 1 지수함수의 그래프

www.ebsi.co.kr

함수 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$의 그래프 위의 두 점 A, B에 대하여 점 A의 x좌표가 -1이고, 선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점 P가 y축 위에 있을 때, 선분 OP의 길이는? (단, O는 원점이다.)



① $\frac{9}{4}$　② $\frac{47}{20}$　③ $\frac{49}{20}$　④ $\frac{51}{20}$　⑤ $\frac{53}{20}$

길잡이 점 P의 x좌표가 0이므로 지수의 성질을 이용하여 지수함수의 그래프 위의 두 점 A, B의 y좌표를 구한 후, 내분점의 성질을 이용하여 점 P의 y좌표를 구한다.

풀이 선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점 P가 y축 위에 있으므로 점 P의 x좌표는 0이다.

점 B의 x좌표를 k라 하면

$\frac{2k+(-1)\times 3}{2+3}=0$에서 $k=\frac{3}{2}$

$\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}=4$이므로 점 A의 y좌표는 4이고, $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{8}$이므로 점 B의 y좌표는 $\frac{1}{8}$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{OP}}=\frac{2\times\frac{1}{8}+3\times 4}{2+3}=\frac{49}{20}$

답 ③

유제

정답과 풀이 10쪽

1 [23008-0031]

함수 $y=\left(\frac{a}{8}\right)^x$의 그래프와 직선 $y=-x+2$는 서로 다른 두 점에서 만나고, 함수 $y=\left(\frac{a}{3}\right)^x$의 그래프와 직선 $y=-x+2$는 한 점에서 만나도록 하는 자연수 a의 개수는? (단, $a\neq 3$, $a\neq 8$)

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

2 [23008-0032]

$a>1$인 상수 a에 대하여 직선 $y=64$가 두 함수 $y=(2a)^x$, $y=a^x$의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=1$일 때, $\overline{\mathrm{OB}}^2-\overline{\mathrm{OA}}^2$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

4. 지수함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동

(1) 지수함수의 그래프의 평행이동

지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 식은

$$y=a^{x-m}+n$$

참고 지수함수 $y=a^{x-m}+n$의 그래프는 항상 점 $(m,\ n+1)$을 지나고, 점근선은 직선 $y=n$이다.

(2) 지수함수의 그래프의 대칭이동

지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프를 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 식은 각각 다음과 같다.

① x축에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 식 : $-y=a^x$, 즉 $y=-a^x$

② y축에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 식 : $y=a^{-x}$, 즉 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$

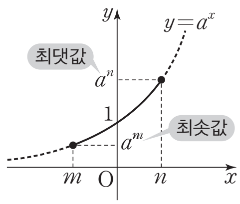
③ 원점에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 식 : $-y=a^{-x}$, 즉 $y=-\left(\frac{1}{a}\right)^x$

5. 지수함수의 최댓값과 최솟값

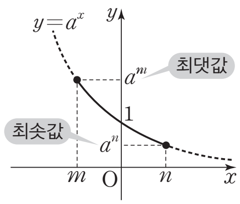
서로 다른 두 실수 m, n에 대하여 정의역이 $\{x \mid m\le x\le n\}$인 함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 최댓값과 최솟값은 다음과 같다.

(1) $a>1$일 때, $x=m$에서 최솟값 a^m, $x=n$에서 최댓값 a^n을 갖는다.

(2) $0<a<1$일 때, $x=m$에서 최댓값 a^m, $x=n$에서 최솟값 a^n을 갖는다.



[$a>1$일 때]



[$0<a<1$일 때]

예 ① 정의역이 $\{x \mid -1\le x\le 2\}$인 함수 $y=2^x$은

$x=-1$에서 최솟값 $2^{-1}=\frac{1}{2}$을 갖고, $x=2$에서 최댓값 $2^2=4$를 갖는다.

② 정의역이 $\{x \mid -2\le x\le 3\}$인 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$은

$x=-2$에서 최댓값 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=9$를 갖고, $x=3$에서 최솟값 $\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$을 갖는다.

예제 2 지수함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동

두 상수 a, b에 대하여 함수 $y=-3^{x-a}+b$의 그래프가 점 $(1,\ -4)$를 지나고 점근선이 직선 $y=5$일 때, $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

길잡이 $a>0$, $a\neq1$일 때, 함수 $y=a^{x-m}+n$의 그래프는 함수 $y=a^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이다. 즉, 함수 $y=a^{x-m}+n$의 그래프의 점근선은 직선 $y=n$이다.

풀이 함수 $y=-3^{x-a}+b$의 그래프는 함수 $y=3^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후, 다시 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이다.

함수 $y=-3^{x-a}+b$의 그래프의 점근선이 직선 $y=b$이므로

$b=5$

함수 $y=-3^{x-a}+b$의 그래프가 점 $(1,\ -4)$를 지나므로

$-3^{1-a}+5=-4$

$3^{1-a}=9=3^2$

$1-a=2$

$a=-1$

따라서 $a+b=-1+5=4$

답 ④

유제

정답과 풀이 11쪽

3 [23008-0033]

두 함수 $f(x)=-2^{-3x+6}+k$, $g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x+1$의 그래프가 제2사분면에서 만나도록 하는 자연수 k의 최솟값은?

① 64 ② 65 ③ 66 ④ 67 ⑤ 68

4 [23008-0034]

정의역이 $\{x\,|\,-1\leq x\leq 3\}$인 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+a$의 최댓값이 2이고 최솟값이 b일 때, $4ab$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

02 지수함수와 로그함수

6. 로그함수의 뜻

지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 역함수 $y=\log_a x$를 a를 밑으로 하는 로그함수라고 한다.

설명 지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$은 실수 전체의 집합에서 양의 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다. 이때 로그의 정의에 의하여

$$y=a^x \Longleftrightarrow x=\log_a y$$

이므로 $x=\log_a y$에서 x와 y를 서로 바꾸면 지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 역함수

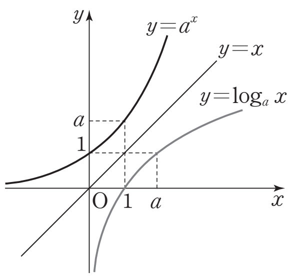
$$y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq1)$$

을 얻는다. 이 함수를 a를 밑으로 하는 로그함수라고 한다.

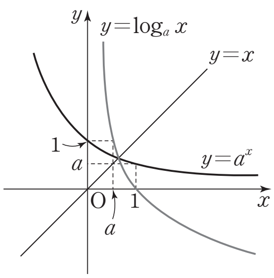
7. 로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프

로그함수 $y=\log_a x$는 지수함수 $y=a^x$의 역함수이므로 두 함수 $y=\log_a x$, $y=a^x$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 따라서 로그함수 $y=\log_a x$의 그래프는 밑 a의 값의 범위에 따라 다음과 같다.

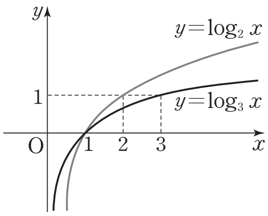
(1) $a>1$일 때

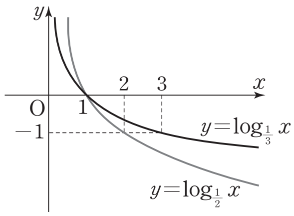


(2) $0<a<1$일 때



예 두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$의 그래프와 두 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$, $y=\log_{\frac{1}{3}} x$의 그래프는 그림과 같다.





8. 로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 성질

(1) 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.

(2) $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
$0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

(3) 그래프는 점 $(1,\ 0)$을 지나고, 점근선은 y축이다.

참고 로그함수 $y=\log_a x$에서

(i) $a>1$일 때, $0<x_1<x_2$이면 $\log_a x_1<\log_a x_2$이다.

(ii) $0<a<1$일 때, $0<x_1<x_2$이면 $\log_a x_1>\log_a x_2$이다.

예제 3 로그함수의 그래프

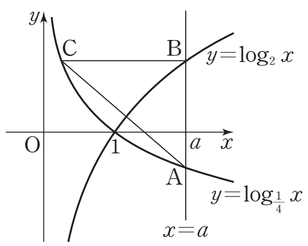
www.ebsi.co.kr

$a>1$인 상수 a에 대하여 직선 $x=a$가 두 함수 $y=\log_{\frac{1}{4}} x$, $y=\log_2 x$의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=\log_{\frac{1}{4}} x$의 그래프와 만나는 점을 C라 하자. 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $\left(b, \frac{1}{2}\right)$일 때, ab의 값은?

① $\frac{13}{6}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{17}{6}$ ④ $\frac{19}{6}$ ⑤ $\frac{7}{2}$

길잡이 로그의 성질을 이용하여 로그함수의 그래프 위의 세 점 A, B, C의 좌표를 a를 사용하여 나타낸 후, 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표를 구한다.

풀이 두 점 A, B의 x좌표가 모두 a이므로 $\mathrm{A}(a, \log_{\frac{1}{4}} a)$, $\mathrm{B}(a, \log_2 a)$이다.



점 C의 y좌표는 $\log_2 a$이므로 점 C의 x좌표를 k라 하면

$$\log_{\frac{1}{4}} k=\log_2 a,\ \log_2 k^{-\frac{1}{2}}=\log_2 a,\ k^{-\frac{1}{2}}=a,\ k=a^{-2}$$

즉, $\mathrm{C}(a^{-2}, \log_2 a)$이다.

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $\left(b, \frac{1}{2}\right)$이므로

$$\frac{a+a+a^{-2}}{3}=b \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\frac{\log_{\frac{1}{4}} a+\log_2 a+\log_2 a}{3}=\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡에서

$$\log_2 a=1,\ a=2$$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$$b=\frac{2+2+2^{-2}}{3}=\frac{17}{12}$$

따라서 $ab=2\times\frac{17}{12}=\frac{17}{6}$

답 ③

유제

정답과 풀이 11쪽

5 [23008-0035]

함수 $y=\log_3 x$의 그래프 위의 점 A(3, 1)을 지나고 기울기가 -1인 직선과 함수 $y=3^x$의 그래프가 만나는 점을 B, 함수 $y=\log_3 x$의 그래프와 x축이 만나는 점을 C라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.

6 [23008-0036]

$a>1$인 상수 a에 대하여 함수 $y=\log_a x$의 그래프와 직선 $y=8x-17$이 만나는 두 점을 각각 A, B라 할 때, 선분 AB의 중점은 x축 위에 있다. $\log_2 a=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

9. 로그함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동

(1) 로그함수의 그래프의 평행이동

로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 식은

$y=\log_a(x-m)+n$

참고 로그함수 $y=\log_a(x-m)+n$의 그래프는 항상 점 $(1+m,\ n)$을 지나고, 점근선은 직선 $x=m$이다.

(2) 로그함수의 그래프의 대칭이동

로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$의 그래프를 x축, y축, 원점 및 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 식은 각각 다음과 같다.

① x축에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 식 : $-y=\log_a x$, 즉 $y=-\log_a x$

② y축에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 식 : $y=\log_a(-x)$

③ 원점에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 식 : $-y=\log_a(-x)$, 즉 $y=-\log_a(-x)$

④ 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 식 : $x=\log_a y$, 즉 $y=a^x$

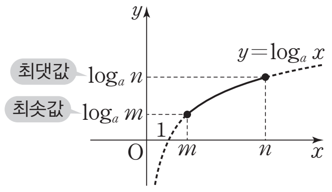
참고 $y=\log_{\frac{1}{a}} x=-\log_a x$이므로 함수 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$의 그래프는 함수 $y=\log_a x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

10. 로그함수의 최댓값과 최솟값

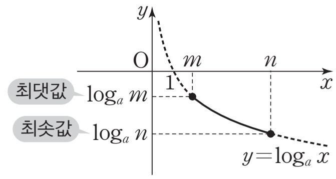
서로 다른 두 양수 m, n에 대하여 정의역이 $\{x\,|\,m\leq x\leq n\}$인 함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$의 최댓값과 최솟값은 다음과 같다.

(1) $a>1$일 때, $x=m$에서 최솟값 $\log_a m$, $x=n$에서 최댓값 $\log_a n$을 갖는다.

(2) $0<a<1$일 때, $x=m$에서 최댓값 $\log_a m$, $x=n$에서 최솟값 $\log_a n$을 갖는다.



[$a>1$일 때]



[$0<a<1$일 때]

예 ① 정의역이 $\{x\,|\,1\leq x\leq 4\}$인 함수 $y=\log_2 x$는
$x=1$에서 최솟값 $\log_2 1=0$을 갖고, $x=4$에서 최댓값 $\log_2 4=2$를 갖는다.

② 정의역이 $\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{3}\leq x\leq 9\right\}$인 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$는
$x=\frac{1}{3}$에서 최댓값 $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}=1$을 갖고, $x=9$에서 최솟값 $\log_{\frac{1}{3}} 9=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=-2$를 갖는다.

예제 4 로그함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동

함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프가 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$의 그래프와 점 $\left(-\frac{1}{2}, b\right)$에서 만날 때, $a+b$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① $-\frac{7}{2}$　② -3　③ $-\frac{5}{2}$　④ -2　⑤ $-\frac{3}{2}$

길잡이 $a>0$, $a\neq1$일 때, 함수 $y=\log_a(x-m)+n$의 그래프는 함수 $y=\log_a x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이다.

풀이 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$의 그래프가 점 $\left(-\frac{1}{2}, b\right)$를 지나므로

$$b=\log_{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}+1\right)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=1$$

함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면

$$y=\log_2(x-a)-1$$

이 함수의 그래프가 점 $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$을 지나므로

$$1=\log_2\left(-\frac{1}{2}-a\right)-1$$

$$\log_2\left(-\frac{1}{2}-a\right)=2$$

$$-\frac{1}{2}-a=2^2$$

$$a=-\frac{9}{2}$$

따라서 $a+b=-\frac{9}{2}+1=-\frac{7}{2}$

답 ①

유제

정답과 풀이 12쪽

7 [23008-0037]

함수 $f(x)=4^{-x+a}+2$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(6, 3)$을 지나고 점근선이 직선 $x=b$일 때, ab의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

8 [23008-0038]

상수 a에 대하여 정의역이 $\left\{x \middle| \frac{1}{4}\leq x\leq 8\right\}$인 함수 $f(x)=a+\log_{\frac{1}{2}} x$의 최댓값이 4, 최솟값이 b일 때, $a+b$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

02 지수함수와 로그함수

11. 지수함수의 활용

(1) 지수에 미지수를 포함한 방정식의 풀이

$a>0$, $a\neq1$일 때,

$$a^{f(x)}=a^{g(x)} \Longleftrightarrow f(x)=g(x)$$

설명 지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$은 실수 전체의 집합에서 양의 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로

$$a^{x_1}=a^{x_2} \Longleftrightarrow x_1=x_2\ (\text{단, } a>0,\ a\neq1)$$

이 성립한다. 이를 이용하여 지수에 미지수를 포함한 방정식을 푼다.

(2) 지수에 미지수를 포함한 부등식의 풀이

① $a>1$일 때, $a^{f(x)}<a^{g(x)} \Longleftrightarrow f(x)<g(x)$

② $0<a<1$일 때, $a^{f(x)}<a^{g(x)} \Longleftrightarrow f(x)>g(x)$

설명 지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$은 다음과 같은 성질을 갖는다.

(i) $a>1$일 때, $a^{x_1}<a^{x_2} \Longleftrightarrow x_1<x_2$

(ii) $0<a<1$일 때, $a^{x_1}<a^{x_2} \Longleftrightarrow x_1>x_2$

이를 이용하여 지수에 미지수를 포함한 부등식을 푼다.

예 ① $5^{3x}>5^{2x+4}$에서 밑 5가 1보다 크므로 $3x>2x+4$, 즉 $x>4$이다.

② $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x}>\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+4}$에서 밑 $\frac{1}{5}$이 0보다 크고 1보다 작으므로 $3x<2x+4$, 즉 $x<4$이다.

12. 로그함수의 활용

(1) 로그의 진수에 미지수를 포함한 방정식의 풀이

$a>0$, $a\neq1$, $f(x)>0$, $g(x)>0$일 때,

$$\log_a f(x)=\log_a g(x) \Longleftrightarrow f(x)=g(x)$$

설명 로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$은 양의 실수 전체의 집합에서 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로

$$\log_a x_1=\log_a x_2 \Longleftrightarrow x_1=x_2\ (\text{단, } a>0,\ a\neq1,\ x_1>0,\ x_2>0)$$

이 성립한다. 이를 이용하여 로그의 진수에 미지수를 포함한 방정식을 푼다.

(2) 로그의 진수에 미지수를 포함한 부등식의 풀이

$f(x)>0$, $g(x)>0$인 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

① $a>1$일 때, $\log_a f(x)<\log_a g(x) \Longleftrightarrow f(x)<g(x)$

② $0<a<1$일 때, $\log_a f(x)<\log_a g(x) \Longleftrightarrow f(x)>g(x)$

설명 로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$은 다음과 같은 성질을 갖는다.

(i) $a>1$일 때, $\log_a x_1<\log_a x_2 \Longleftrightarrow x_1<x_2$ (단, $x_1>0$, $x_2>0$)

(ii) $0<a<1$일 때, $\log_a x_1<\log_a x_2 \Longleftrightarrow x_1>x_2$ (단, $x_1>0$, $x_2>0$)

이를 이용하여 로그의 진수에 미지수를 포함한 부등식을 푼다.

예 ① $\log_2(x-1)>\log_2 2$에서 밑 2가 1보다 크므로 $x-1>2$, 즉 $x>3$이다.

한편, 로그의 진수 조건에 의하여 $x-1>0$에서 $x>1$이다. 따라서 구하는 해는 $x>3$이다.

② $\log_{\frac{1}{3}}(x-2)>\log_{\frac{1}{3}} 5$에서 밑 $\frac{1}{3}$이 0보다 크고 1보다 작으므로 $x-2<5$, 즉 $x<7$이다.

한편, 로그의 진수 조건에 의하여 $x-2>0$에서 $x>2$이다. 따라서 구하는 해는 $2<x<7$이다.

예제 5 로그의 진수에 미지수가 있는 부등식

www.ebsi.co.kr

1이 아닌 양수 a에 대하여 함수 $y=a^x$의 그래프와 원 $(x-1)^2+y^2=1$이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 부등식 $\log_a(x+3)\le\log_a(2x-4)$를 만족시키는 정수 x의 개수는?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

길잡이 $f(x)>0$, $g(x)>0$인 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

(1) $a>1$일 때, $\log_a f(x)<\log_a g(x) \Longleftrightarrow f(x)<g(x)$

(2) $0<a<1$일 때, $\log_a f(x)<\log_a g(x) \Longleftrightarrow f(x)>g(x)$

풀이 함수 $y=a^x$의 그래프와 원 $(x-1)^2+y^2=1$이 서로 다른 두 점에서 만나므로

$0<a<1$

로그의 진수 조건에 의하여 $x+3>0$이고 $2x-4>0$이므로

$x>2$ ...... ㉠

부등식 $\log_a(x+3)\le\log_a(2x-4)$에서 밑 a가 $0<a<1$이므로

$x+3\ge2x-4$

$x\le7$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서

$2<x\le7$

따라서 정수 x는 3, 4, 5, 6, 7이고, 그 개수는 5이다.

답 ③

유제

정답과 풀이 12쪽

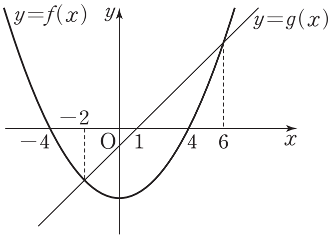
9 [23008-0039]

부등식 $(x-1)(4^{x-4}-32)<0$을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합은?

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

10 [23008-0040]

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 일차함수 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 부등식 $\log_3 f\left(\frac{x}{2}\right)\le\log_3 g\left(\frac{x}{2}\right)$를 만족시키는 정수 x의 개수를 구하시오.



[23008-0041]

1 함수 $y=2^{x-a}+b$의 그래프가 점 $A(-3,\ 0)$을 지나고 점 A와 함수 $y=2^{x-a}+b$의 그래프의 점근선 사이의 거리가 4일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -9　② -8　③ -7　④ -6　⑤ -5

[23008-0042]

2 정의역이 $\{x \mid -1 \le x \le 2\}$인 함수 $f(x)=-2+\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$의 최댓값은?

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

[23008-0043]

3 방정식 $3^{2x}-2\times3^{x+1}+8=0$의 두 실근을 α, β라 할 때, $4^{\frac{1}{\alpha}}+4^{\frac{1}{\beta}}$의 값은?

① 10　② 12　③ 14　④ 16　⑤ 18

[23008-0044]

4 부등식 $8^{x-5}\le\left(\frac{1}{4}\right)^{x-3}$을 만족시키는 자연수 x의 개수는?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[23008-0045]

5 상수 a에 대하여 함수 $y=a+\log_3 x$의 그래프가 두 점 $(9,\ 10)$, $\left(\frac{1}{9},\ b\right)$를 지날 때, $a+b$의 값은?

① 10　② 12　③ 14　④ 16　⑤ 18

[23008-0046]

6 함수 $y=\log_5(4x-1)$의 그래프의 점근선이 두 함수 $y=\log_{\frac{1}{4}}x$, $y=\log_2 x$의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 선분 AB의 길이를 구하시오.

[23008-0047]

7 방정식 $2\log_2 x+\log_2(x+2)=3+\log_2(x^2-x)$를 만족시키는 모든 실수 x의 값의 곱은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

[23008-0048]

8 부등식 $\log_{\frac{1}{5}}(x+4)>-2$의 해가 $\alpha<x<\beta$일 때, $\alpha+\beta$의 값은?

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

[23008-0049]

9 이차부등식 $3x^2-(4\log_3 a)x+4\log_3 a>0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하도록 하는 자연수 a의 개수는?

① 24 ② 25 ③ 26 ④ 27 ⑤ 28

[23008-0050]

1 함수 $f(x)=\log_2(x-1)+3$의 그래프의 점근선과 함수 $g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}+2$의 그래프가 만나는 점을 A, 점 A에서 y축에 내린 수선의 발을 B라 하고, 함수 $y=g(x)$의 그래프의 점근선과 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점을 C, 점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 D라 하자. 사각형 ABDC의 넓이는?

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

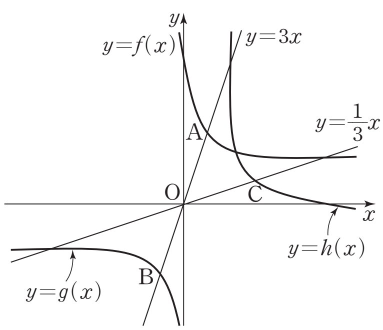
[23008-0051]

2 자연수 k에 대하여 함수 $y=\log_4(x+k)$의 그래프와 함수 $y=\log_{\frac{1}{4}}x$의 그래프가 만나는 점을 A, 함수 $y=\log_4(x+k)$의 그래프와 함수 $y=\log_2 x$의 그래프가 만나는 점을 B라 하고, 두 점 A, B의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 하자. $\frac{1}{10}<x_1<\frac{1}{5}$, $3<x_2<4$를 만족시키는 모든 k의 값의 합은?

① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

[23008-0052]

3 양수 a에 대하여 직선 $y=3x$가 두 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}+a$, $g(x)=-2^{x+3}-a$의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 함수 $f(x)$의 역함수를 $h(x)$라 할 때, 직선 $y=\frac{1}{3}x$가 함수 $y=h(x)$의 그래프와 만나는 점을 C라 하자. $\overline{BC}=8\sqrt{2}$일 때, $f(a)+g\left(-\frac{a}{2}\right)+h(2a)$의 값은?



① $-\frac{5}{4}$ ② -1 ③ $-\frac{3}{4}$
④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

[23008-0053]

4 1이 아닌 두 양수 a, b에 대하여 함수 $y=\log_a x$의 그래프와 직선 $y=x$는 서로 다른 두 점에서 만나고, 함수 $y=b^x$의 그래프와 직선 $y=x$는 만나지 않는다. 정의역이 $\{x\mid -1\le x\le 2\}$인 함수 $f(x)=\left(\frac{a}{b}\right)^x$의 최댓값이 4일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값은?

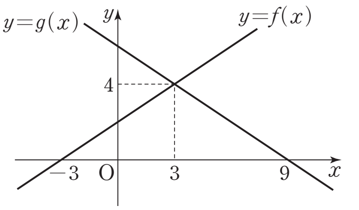
① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

[23008-0054]

5 두 일차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 부등식

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{f(x)g(x)}<\left(\frac{1}{81}\right)^{g(x)}$$

을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합을 구하시오.



[23008-0055]

6 함수 $f(x)=\begin{cases} -2^x+32 & (x<4) \\ 2^x & (x\ge 4) \end{cases}$ 일 때, x에 대한 방정식

$$\{\log f(x)\}^2-\log\{n(n+10)\}\times\log f(x)+\log n\times\log(n+10)=0$$

의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 50 이하의 자연수 n의 개수는?

① 22 ② 24 ③ 26 ④ 28 ⑤ 30

[23008-0056]

7 x에 대한 부등식

$$x^2-x\log_2 4n+\log_2 n^2\le 0$$

을 만족시키는 정수 x의 개수가 4가 되도록 하는 자연수 n의 개수는?

① 16 ② 24 ③ 32 ④ 40 ⑤ 48

[23008-0057]

1 두 함수 $f(x)=3^{x-2}+4$, $g(x)=-3^{-x+2}+4$가 있다. 상수 k에 대하여 직선 $x=k$가 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 선분 PQ의 길이가 최소일 때 두 점 P, Q의 위치를 각각 A, B라 하자. 두 점 A와 B, 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 C, 함수 $y=g(x)$의 그래프 위의 점 D가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 선분 AB의 중점과 선분 CD의 중점은 일치한다.

(나) 직선 CD의 기울기는 직선 AC의 기울기의 $\frac{3}{2}$배이다.

사각형 ADBC의 넓이는? (단, 점 C의 x좌표는 점 A의 x좌표보다 크다.)

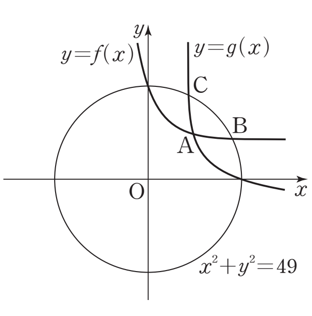
① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

[23008-0058]

2 양수 k에 대하여 세 함수 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$, $g(x)=\log_4(x+2)$, $h(x)=\log_2(x-k)$가 있다. 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점을 A, 두 함수 $y=f(x)$, $y=h(x)$의 그래프의 교점을 B, 두 함수 $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프의 교점을 C라 하고, 함수 $y=h(x)$의 그래프의 점근선이 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 만나는 점을 각각 D, E라 하자. $\overline{DE}=\frac{3}{2}\log_2\frac{15}{4}$일 때, 삼각형 ABC의 무게중심의 x좌표는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[23008-0059]

3 그림과 같이 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}+3$의 그래프와 함수 $g(x)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{x-3}{4}$의 그래프가 만나는 점을 $A(x_1, y_1)$, 원 $x^2+y^2=49$가 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 제1사분면에서 만나는 점을 각각 $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$이라 할 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



보기

ㄱ. $3<x_1<4$

ㄴ. $x_3-x_2=y_2-y_3$

ㄷ. 삼각형 ABC의 넓이는 8보다 크다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

대표 기출 문제

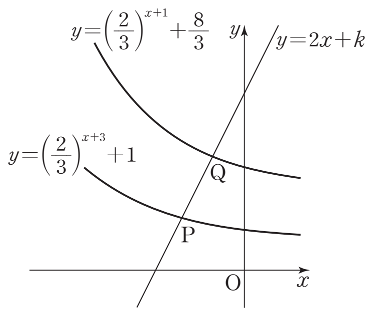
출제 경향 지수함수 또는 로그함수의 그래프 위의 점과 관련된 조건으로부터 식을 세우고 지수, 로그의 성질을 이용하여 미지수를 구하는 문제, 지수함수 또는 로그함수의 최댓값, 최솟값을 구하는 문제, 지수함수와 로그함수의 그래프를 활용하여 방정식과 부등식을 푸는 문제가 출제된다.

2022학년도 대수능

직선 $y=2x+k$가 두 함수

$$y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1,\ y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{5}$일 때, 상수 k의 값은? [4점]



① $\frac{31}{6}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{11}{2}$

④ $\frac{17}{3}$ ⑤ $\frac{35}{6}$

출제 의도 지수함수의 그래프 위의 점과 관련된 조건을 이용하여 관계식을 세운 후, 지수에 미지수를 포함한 방정식의 해를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 두 점 P, Q의 x좌표를 각각 p, q $(p<q)$라 하면 두 점 P, Q는 직선 $y=2x+k$ 위의 점이므로

P$(p,\ 2p+k)$, Q$(q,\ 2q+k)$로 놓을 수 있다.

이때 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{5}$, 즉 $\overline{\mathrm{PQ}}^2=5$이므로

$$(q-p)^2+(2q-2p)^2=5,\ (q-p)^2=1$$

$q-p>0$이므로 $q-p=1$, 즉 $q=p+1$

한편, 점 P는 함수 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1$의 그래프 위의 점이므로

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+3}+1=2p+k \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 점 Q는 함수 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$의 그래프 위의 점이므로

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+2}+\frac{8}{3}=2p+k+2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+2}+\frac{8}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{p+3}+3,\ \left(\frac{2}{3}\right)^{p+2}=1$$

즉, $p+2=0$에서 $p=-2$이고, 이 값을 ㉠에 대입하면

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2+3}+1=2\times(-2)+k$$

따라서 $k=\frac{17}{3}$

답 ④

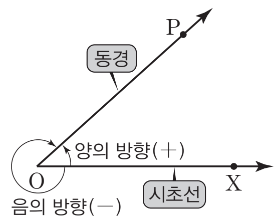
03 삼각함수

1. 일반각과 호도법

(1) 일반각

① 각과 각의 크기

평면에서 반직선 OP가 반직선 OX의 위치에서 점 O를 중심으로 회전할 때, 두 반직선 OX, OP로 이루어진 도형을 기호 ∠XOP로 나타내고, 회전한 양을 ∠XOP의 크기라고 한다. 이때 반직선 OX를 시초선, 반직선 OP를 동경이라고 한다. 또 동경 OP가 점 O를 중심으로 회전할 때, 시곗바늘이 도는 방향의 반대 방향을 양의 방향, 시곗바늘이 도는 방향을 음의 방향이라고 한다. 이때 각의 크기는 양의 방향일 때는 양의 부호 $+$, 음의 방향일 때는 음의 부호 $-$를 붙여서 나타낸다.



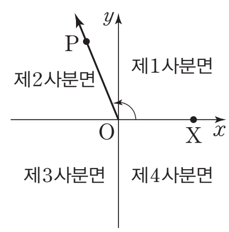
② 일반각

시초선 OX와 동경 OP에 의하여 ∠XOP가 주어질 때, 동경 OP가 나타내는 한 각의 크기를 α°라 하면 ∠XOP의 크기는 다음과 같이 나타내고, 이것을 동경 OP가 나타내는 일반각이라고 한다.

$360^\circ \times n + \alpha^\circ$ (단, n은 정수)

③ 사분면의 각

좌표평면에서 원점 O에 대하여 시초선 OX를 x축의 양의 방향으로 잡을 때, 동경 OP가 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면에 있으면 동경 OP가 나타내는 각을 각각 제1사분면의 각, 제2사분면의 각, 제3사분면의 각, 제4사분면의 각이라고 한다.

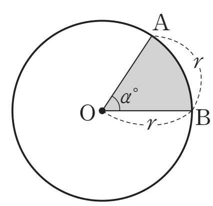


(2) 호도법

① 호도법

중심이 O이고 반지름의 길이가 r인 원에서 호 AB의 길이가 r인 부채꼴 AOB의 중심각의 크기 α°를 1라디안(radian)이라 하고, 이것을 단위로 하여 각의 크기를 나타내는 방법을 호도법이라고 한다.

참고 호도법으로 각의 크기를 나타낼 때는 단위인 라디안은 보통 생략한다.



② 육십분법과 호도법의 관계

$1(\text{라디안})=\dfrac{180^\circ}{\pi}$, $1^\circ=\dfrac{\pi}{180}(\text{라디안})$

설명 호의 길이는 중심각의 크기에 비례하므로 $2\pi r : r=360^\circ : \alpha^\circ$, $\alpha^\circ=\dfrac{180^\circ}{\pi}$, 즉 $1(\text{라디안})=\dfrac{180^\circ}{\pi}$

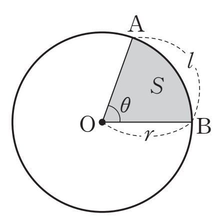
③ 부채꼴의 호의 길이와 넓이

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴에서 호의 길이를 l, 넓이를 S라 하면

(i) $l=r\theta$　　(ii) $S=\dfrac{1}{2}r^2\theta=\dfrac{1}{2}rl$

설명 호의 길이 l과 부채꼴의 넓이 S는 중심각의 크기 θ(라디안)에 비례하므로

(i) $l : 2\pi r=\theta : 2\pi$에서 $l=r\theta$　　(ii) $S : \pi r^2=\theta : 2\pi$에서 $S=\dfrac{1}{2}r^2\theta=\dfrac{1}{2}rl$



예제 1 호도법

www.ebsi.co.kr

좌표평면에서 원 $x^2+y^2=36$ 위의 두 점 A, B에 대하여 부채꼴 OAB의 넓이가 12π일 때, 부채꼴 OAB의 호의 길이는 a이고 중심각의 크기는 b이다. $a+b$의 값은? (단, O는 원점이다.)

① $\frac{11}{3}\pi$ ② 4π ③ $\frac{13}{3}\pi$ ④ $\frac{14}{3}\pi$ ⑤ 5π

길잡이 반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴에서

(1) 호의 길이 $l=r\theta$

(2) 부채꼴의 넓이 $S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}rl$

풀이 원 $x^2+y^2=36$의 반지름의 길이가 6이므로 부채꼴 OAB의 반지름의 길이는 6이다.

부채꼴 OAB의 중심각의 크기를 θ, 호의 길이를 l이라 하자.

부채꼴 OAB의 넓이가 12π이므로

$12\pi=\frac{1}{2}\times6\times l$에서 $l=4\pi$

$12\pi=\frac{1}{2}\times6^2\times\theta$에서 $\theta=\frac{2}{3}\pi$

따라서 $a=4\pi$, $b=\frac{2}{3}\pi$이므로 $a+b=4\pi+\frac{2}{3}\pi=\frac{14}{3}\pi$

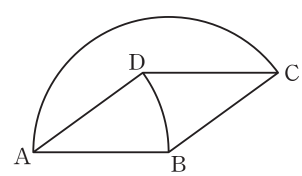
답 ④

유제

정답과 풀이 19쪽

1 [23008-0060]

그림과 같이 한 변의 길이가 6인 마름모 ABCD와 중심이 A인 부채꼴 ABD와 중심이 B인 부채꼴 BCA가 있다. 호 BD의 길이를 l_1, 호 AC의 길이를 l_2라 할 때, l_1+l_2의 값은?



① 4π ② $\frac{9}{2}\pi$ ③ 5π

④ $\frac{11}{2}\pi$ ⑤ 6π

2 [23008-0061]

다음 조건을 만족시키는 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 중심각의 크기를 θ라 할 때, $20(r+\theta)$의 값을 구하시오.

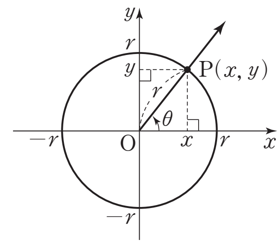
(가) 부채꼴의 둘레의 길이는 $\frac{7}{2}r$와 같다.

(나) 부채꼴의 넓이는 27이다.

03 삼각함수

2. 삼각함수의 뜻

좌표평면에서 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 r $(r>0)$인 원 위의 한 점을 $\mathrm{P}(x, y)$, x축의 양의 방향을 시초선으로 하였을 때 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ라 할 때, θ에 대한 삼각함수를 다음과 같이 정의한다.



$$\sin\theta=\frac{y}{r},\ \cos\theta=\frac{x}{r},\ \tan\theta=\frac{y}{x}\ (x\neq0)$$

이때 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$를 각각 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수라 하고, 이 함수들을 θ에 대한 삼각함수라고 한다.

설명 동경 OP가 나타내는 각의 크기 θ에 대하여 $\frac{y}{r}$, $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{x}$ $(x\neq0)$의 값은 각각 하나로 결정된다.

즉, 다음의 대응 관계는 각각 θ에 대한 함수가 된다.

$$\theta \longrightarrow \frac{y}{r},\ \theta \longrightarrow \frac{x}{r},\ \theta \longrightarrow \frac{y}{x}\ (x\neq0)$$

이때 각 함수를 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수라 하고, 이것을 각각 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\sin\theta=\frac{y}{r},\ \cos\theta=\frac{x}{r},\ \tan\theta=\frac{y}{x}\ (x\neq0)$$

참고 (1) 각 사분면에서의 삼각함수의 부호는 다음 표와 같다.

삼각함수 \ 사분면	제1사분면 $(x>0, y>0)$	제2사분면 $(x<0, y>0)$	제3사분면 $(x<0, y<0)$	제4사분면 $(x>0, y<0)$
$\sin\theta$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos\theta$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\tan\theta$	$+$	$-$	$+$	$-$

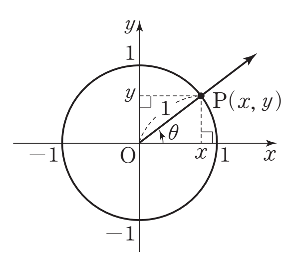
(2) $\tan\theta$는 $\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)에서 정의되지 않는다.

3. 삼각함수 사이의 관계

(1) $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

(2) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

설명 각 θ가 나타내는 동경과 원 $x^2+y^2=1$이 만나는 점을 $\mathrm{P}(x, y)$라 하면 다음이 성립한다.



(1) $\sin\theta=y$, $\cos\theta=x$, $\tan\theta=\frac{y}{x}$ $(x\neq0)$이므로

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

(2) 점 $\mathrm{P}(x, y)$가 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=y^2+x^2=1$$

예제 2 삼각함수의 뜻

좌표평면에서 직선 $y=-\frac{4}{3}x$ 위의 점 중 x좌표가 양수인 점 P에 대하여 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ라 할 때, $\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\tan\theta}$의 값은? (단, O는 원점이다.)

① $-\frac{3}{20}$　② $-\frac{1}{20}$　③ $\frac{1}{20}$　④ $\frac{3}{20}$　⑤ $\frac{1}{4}$

길잡이 조건을 만족시키는 점 P의 좌표를 설정하고, 삼각함수의 정의를 이용하여 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값을 구한다.

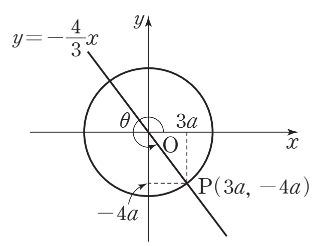
풀이 점 P는 직선 $y=-\frac{4}{3}x$ 위의 점이고 x좌표가 양수이므로

P$(3a,\ -4a)$ $(a>0)$이라 하자.

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(3a)^2+(-4a)^2}=5a$이므로

$\sin\theta=\frac{-4a}{5a}=-\frac{4}{5}$, $\cos\theta=\frac{3a}{5a}=\frac{3}{5}$, $\tan\theta=\frac{-4a}{3a}=-\frac{4}{3}$

따라서 $\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\tan\theta}=\frac{-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}}{-\frac{4}{3}}=\frac{-\frac{1}{5}}{-\frac{4}{3}}=\frac{3}{20}$



답 ④

유제

정답과 풀이 20쪽

3 [23008-0062]

$\tan\theta=2$일 때, $\frac{1}{\sin^2\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}-2$의 값은?

① $\frac{15}{4}$　② $\frac{17}{4}$　③ $\frac{19}{4}$　④ $\frac{21}{4}$　⑤ $\frac{23}{4}$

4 [23008-0063]

양의 실수 m에 대하여 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=10$과 함수 $y=|mx|$의 그래프가 만나는 점 중 x좌표가 양수인 점을 P, x좌표가 음수인 점을 Q라 하고, 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 α, 동경 OQ가 나타내는 각의 크기를 β라 하자. $\sin\alpha\times\cos\beta=-\frac{2}{5}$일 때, 서로 다른 모든 m의 값의 합은?

(단, O는 원점이다.)

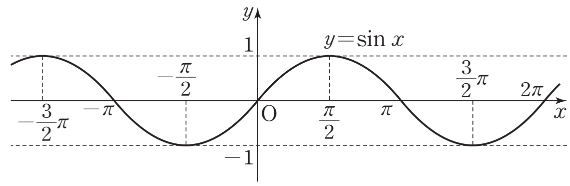
① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

4. 삼각함수의 그래프

(1) 함수 $y=\sin x$의 그래프

① 정의역은 실수 전체의 집합이고,
치역은 $\{y\,|\,-1\leq y\leq 1\}$이다.

② 함수 $y=\sin x$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.



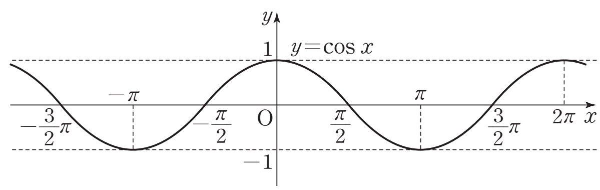
③ 모든 실수 x에 대하여
$\sin(2n\pi+x)=\sin x$ (n은 정수)이고, 주기가 2π인 주기함수이다.

참고 함수 $f(x)$의 정의역에 속하는 임의의 실수 x에 대하여 $f(x+p)=f(x)$를 만족시키는 0이 아닌 상수 p가 존재할 때 함수 $f(x)$를 주기함수라 하고, 상수 p 중 최소인 양수를 함수 $f(x)$의 주기라고 한다.

(2) 함수 $y=\cos x$의 그래프

① 정의역은 실수 전체의 집합이고,
치역은 $\{y\,|\,-1\leq y\leq 1\}$이다.

② 함수 $y=\cos x$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.



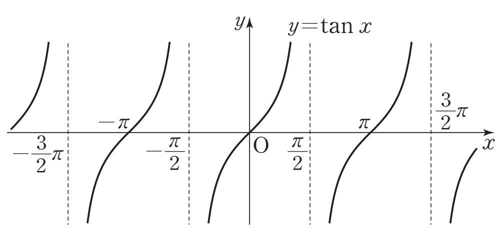
③ 모든 실수 x에 대하여
$\cos(2n\pi+x)=\cos x$ (n은 정수)이고, 주기가 2π인 주기함수이다.

(3) 함수 $y=\tan x$의 그래프

① 정의역은 $x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)인 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.

② 함수 $y=\tan x$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

③ 모든 실수 x에 대하여
$\tan(n\pi+x)=\tan x$ (n은 정수)이고, 주기가 π인 주기함수이다.



④ 그래프의 점근선은 직선 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)이다.

참고 여러 가지 삼각함수의 그래프

(1) 함수 $y=a\sin x$, $y=a\cos x$, $y=a\tan x$ (a는 0이 아닌 상수)의 그래프

① 두 함수 $y=a\sin x$, $y=a\cos x$의 최솟값은 $-|a|$, 최댓값은 $|a|$이다.

② 함수 $y=a\tan x$의 최솟값과 최댓값은 없다.

(2) 함수 $y=\sin ax$, $y=\cos ax$, $y=\tan ax$ (a는 0이 아닌 상수)의 그래프

① 두 함수 $y=\sin ax$, $y=\cos ax$의 주기는 모두 $\frac{2\pi}{|a|}$이다.

② 함수 $y=\tan ax$의 주기는 $\frac{\pi}{|a|}$이다.

예제 3 삼각함수의 그래프

www.ebsi.co.kr

a, b, c가 자연수일 때, 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)=a\sin bx+c$에 대하여 $f\left(\frac{\pi}{24}\right)$의 최솟값을 구하시오.

> (가) 함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다.
> (나) 함수 $f(x)$의 최댓값은 10이다.
> (다) 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 만나지 않는다.

길잡이 조건을 만족시키는 세 자연수 a, b, c의 관계를 구한 후, 함숫값이 최소가 되는 경우를 생각한다.

풀이 조건 (가)에서 함수 $f(x)$의 주기가 $\frac{\pi}{2}$이므로 $\frac{2\pi}{b}=\frac{\pi}{2}$에서 $b=4$

조건 (나)에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 10이므로 $a+c=10$, 즉 $c=10-a$ …… ㉠

조건 (다)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 만나지 않으므로 함수 $f(x)$의 최솟값은 양수이어야 한다.

함수 $f(x)$의 최솟값은 $-a+c$이므로 $-a+c>0$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $-a+(10-a)>0$에서 $a<5$

$$f\left(\frac{\pi}{24}\right)=a\sin\left(4\times\frac{\pi}{24}\right)+c=a\sin\frac{\pi}{6}+c=\frac{1}{2}a+c=\frac{1}{2}a+(10-a)=10-\frac{1}{2}a \quad \cdots\cdots \text{㉢}$$

a는 5보다 작은 자연수이므로 ㉢에서 $f\left(\frac{\pi}{24}\right)$의 최솟값은 $a=4$일 때

$$10-\frac{1}{2}\times 4=8$$

답 8

유제

정답과 풀이 20쪽

5 [23008-0064]

함수 $y=a\cos bx$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{6}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수를 $y=f(x)$라 하자. 함수 $f(x)$의 주기가 8π이고 최댓값이 3일 때, $f\left(\frac{3}{2}\pi\right)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 양의 상수이다.)

6 [23008-0065]

양의 실수 a에 대하여 두 함수 $y=\tan\frac{\pi x}{8}$, $y=\log_{\frac{1}{2}}\frac{x}{a}+1$의 그래프가 제1사분면에서 만나는 점의 개수가 2가 되도록 하는 모든 자연수 a의 값의 합을 구하시오.

03 삼각함수

5. 삼각함수의 성질

(1) $2n\pi+\theta$의 삼각함수 (단, n은 정수)

① $\sin(2n\pi+\theta)=\sin\theta$　② $\cos(2n\pi+\theta)=\cos\theta$　③ $\tan(2n\pi+\theta)=\tan\theta$

(2) $-\theta$의 삼각함수

① $\sin(-\theta)=-\sin\theta$　② $\cos(-\theta)=\cos\theta$　③ $\tan(-\theta)=-\tan\theta$

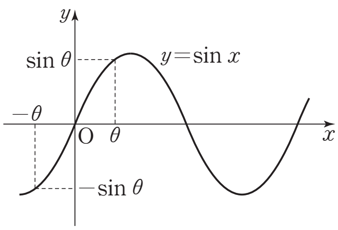
(3) $\pi+\theta$의 삼각함수

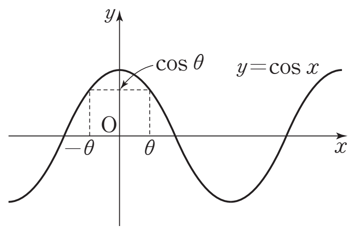
① $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$　② $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$　③ $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$

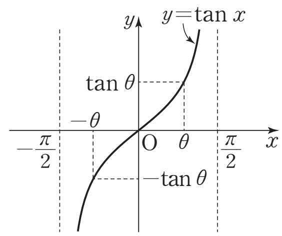
(4) $\frac{\pi}{2}+\theta$의 삼각함수

① $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$　② $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$

설명 (2) 함수 $y=\sin x$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 $\sin(-\theta)=-\sin\theta$
함수 $y=\cos x$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 $\cos(-\theta)=\cos\theta$
함수 $y=\tan x$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 $\tan(-\theta)=-\tan\theta$





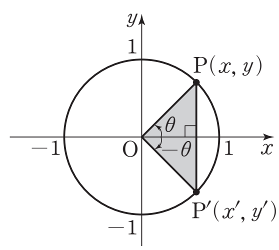


각 θ와 각 $-\theta$가 나타내는 동경이 원 $x^2+y^2=1$과 만나는 점을 각각 $\mathrm{P}(x, y)$, $\mathrm{P}'(x', y')$이라 하면 점 P와 점 P$'$은 x축에 대하여 서로 대칭이므로 $x'=x$, $y'=-y$이다. 따라서 다음이 성립한다.

$\sin(-\theta)=y'=-y=-\sin\theta$

$\cos(-\theta)=x'=x=\cos\theta$

$\tan(-\theta)=\frac{y'}{x'}=\frac{-y}{x}=-\tan\theta\ (x\neq 0)$



참고 위의 (3), (4)의 식에 θ 대신 $-\theta$를 대입하면 다음이 성립한다.

(3) $\sin(\pi-\theta)=-\sin(-\theta)=\sin\theta$
$\cos(\pi-\theta)=-\cos(-\theta)=-\cos\theta$
$\tan(\pi-\theta)=\tan(-\theta)=-\tan\theta$

(4) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos(-\theta)=\cos\theta$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=-\sin(-\theta)=\sin\theta$

예제 4 삼각함수의 성질

이차방정식 $x^2+x\sin\frac{7}{6}\pi+\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\times\tan\frac{2}{3}\pi=0$의 두 실근을 α, β ($\alpha<\beta$)라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은?

① $\frac{11}{4}$ ② 3 ③ $\frac{13}{4}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{15}{4}$

길잡이 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수의 값을 구한 후, 이차방정식의 근을 구한다.

풀이

$\sin\frac{7}{6}\pi=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$,

$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\tan\frac{2}{3}\pi=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$

이므로 주어진 이차방정식은

$$x^2-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}\times(-\sqrt{3})=0$$

$$2x^2-x-3=0$$

$$(x+1)(2x-3)=0$$

$x=-1$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=\frac{3}{2}$이므로

$$\alpha^2+\beta^2=(-1)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2=1+\frac{9}{4}=\frac{13}{4}$$

답 ③

유제

정답과 풀이 21쪽

7 [23008-0066]

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{2}{3}$이고 $\cos(\pi-\theta)<0$일 때, $\tan\theta$의 값은?

① $-\sqrt{5}$ ② $-\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ③ $-\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ④ $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

8 [23008-0067]

모든 실수 θ에 대하여 $\sin\left(\frac{2n-1}{3}\pi-\theta\right)=\sin\theta$가 성립하도록 하는 15 이하의 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

6. 삼각함수의 활용

(1) 방정식에의 활용

방정식 $2\sin x=1$, $\tan x=-1$과 같이 각의 크기가 미지수인 삼각함수를 포함한 방정식은 삼각함수의 그래프를 이용하여 다음과 같이 풀 수 있다.

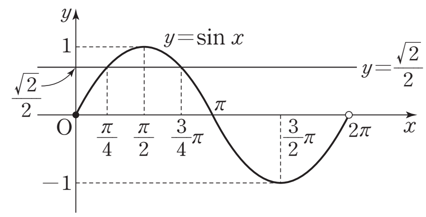
① 주어진 방정식을 $\sin x=k$ ($\cos x=k$, $\tan x=k$)의 꼴로 변형한다.

② 주어진 범위에서 삼각함수 $y=\sin x$ ($y=\cos x$, $y=\tan x$)의 그래프와 직선 $y=k$를 그린 후 두 그래프의 교점의 x좌표를 찾아서 해를 구한다.

예 $0\le x<2\pi$일 때, 방정식 $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 해를 구해 보자.

방정식 $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 교점의 x좌표이다.

따라서 그림에서 구하는 해는 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{3}{4}\pi$

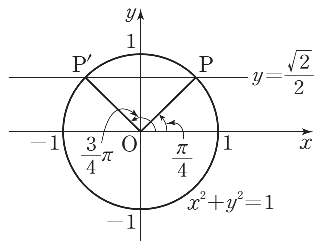


참고 단위원을 이용하는 방법

단위원 $x^2+y^2=1$과 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$가 만나는 두 점을 P, P′이라 할 때, 방정식 $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 해는 두 동경 OP, OP′이 나타내는 각의 크기이다.

(단, O는 원점이다.)

따라서 그림에서 구하는 해는 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{3}{4}\pi$



(2) 부등식에의 활용

부등식 $2\sin x<1$, $2\sin x>-1$과 같이 각의 크기가 미지수인 삼각함수를 포함한 부등식은 삼각함수의 그래프를 이용하여 다음과 같이 풀 수 있다.

① 주어진 부등식을 $\sin x>k$ ($\sin x\ge k$, $\sin x<k$, $\sin x\le k$)의 꼴로 변형한다.

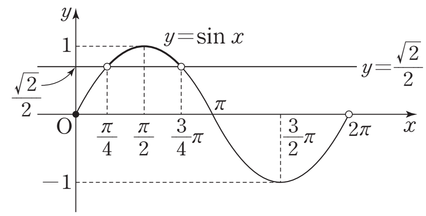
② 주어진 범위에서 삼각함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=k$보다 위쪽(또는 아래쪽)에 있는 x의 값의 범위를 찾아서 해를 구한다. 이때 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표를 찾아서 해를 구한다.

예 $0\le x<2\pi$일 때, 부등식 $\sin x>\frac{\sqrt{2}}{2}$의 해를 구해 보자.

$0\le x<2\pi$일 때, 방정식 $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 해는 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{3}{4}\pi$

이때 부등식 $\sin x>\frac{\sqrt{2}}{2}$의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위이므로

$\frac{\pi}{4}<x<\frac{3}{4}\pi$



참고 (1) 삼각함수를 포함한 부등식도 삼각함수를 포함한 방정식과 마찬가지로 단위원을 이용하여 풀 수 있다.

(2) 두 개 이상의 삼각함수가 포함된 방정식 또는 부등식은 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ 등을 이용하여 하나의 삼각함수로 변형하여 풀면 편리하다.

예제 5 삼각함수의 활용

함수 $f(x)=2\sin x-1$에 대하여 $0\le x<2\pi$일 때, 부등식 $f(x)f(\pi-x)\le 0$을 만족시키는 서로 다른 모든 실수 x의 값의 곱은?

① $\frac{5}{36}\pi^2$　② $\frac{1}{6}\pi^2$　③ $\frac{7}{36}\pi^2$　④ $\frac{2}{9}\pi^2$　⑤ $\frac{1}{4}\pi^2$

길잡이 삼각함수의 성질을 이용하여 부등식을 정리한 후 이 부등식의 해를 구한다.

풀이 $f(\pi-x)=2\sin(\pi-x)-1=2\sin x-1$이므로

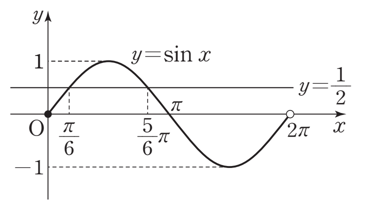
$f(x)f(\pi-x)=(2\sin x-1)(2\sin x-1)=(2\sin x-1)^2$

부등식 $(2\sin x-1)^2\le 0$에서

$2\sin x-1=0,\ \sin x=\frac{1}{2}$

$0\le x<2\pi$에서 방정식 $\sin x=\frac{1}{2}$의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표이므로 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

따라서 구하는 모든 실수 x의 값의 곱은 $\frac{\pi}{6}\times\frac{5}{6}\pi=\frac{5}{36}\pi^2$



답 ①

유제

정답과 풀이 21쪽

9 [23008-0068]

다음 조건을 만족시키는 모든 θ의 값의 범위가 $a<\theta<b$ 또는 $c<\theta<d$일 때, $\frac{12}{\pi}(a+c)$의 값을 구하시오. (단, $a<b<c<d$)

(가) $0\le\theta<2\pi$
(나) 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2+4x\cos\theta+1>0$이 성립한다.

10 [23008-0069]

함수 $f(x)=\sin 2x$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수를 $y=g(x)$라 하자. $0\le x<\pi$일 때, 방정식 $\{f(x)\}^2=\frac{3}{2}g(x)$를 만족시키는 서로 다른 모든 실수 x의 값의 합은?

① $\frac{\pi}{2}$　② π　③ $\frac{3}{2}\pi$　④ 2π　⑤ $\frac{5}{2}\pi$

[23008-0070]

1 다음을 만족시키는 두 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?

(가) $70^\circ = a\pi$	(나) $\frac{2}{5}\pi = b^\circ$

① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

[23008-0071]

2 $\sin\frac{\pi}{3} \times \cos\frac{2}{3}\pi \times \tan\frac{4}{3}\pi$의 값은?

① $-\frac{3}{4}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

[23008-0072]

3 좌표평면에서 원점 O와 점 $\mathrm{P}(a,\ 2\sqrt{a+1})$에 대하여 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ라 하자. $\cos\theta = \frac{3}{4}$일 때, 상수 a의 값은? (단, $a > -1$)

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

[23008-0073]

4 두 함수 $y = \cos\frac{ax}{3}$, $y = \tan\frac{4x}{b}$의 주기가 서로 같도록 하는 두 자연수 a, b에 대하여 $a+b$의 최솟값은?

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

[23008-0074]

5 $\tan\theta>0$이고 $\sin\theta=-\frac{1}{4}$일 때, $\cos\theta$의 값은?

① $-\frac{\sqrt{15}}{4}$ ② $-\frac{\sqrt{10}}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{4}$ ④ $\frac{\sqrt{10}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{15}}{4}$

[23008-0075]

6 $0\le x<2\pi$일 때, 두 부등식 $\tan x>0$, $\sqrt{2}\sin x+1<0$을 모두 만족시키는 모든 x의 값의 범위가 $\alpha<x<\beta$이다. $\alpha+\beta$의 값은?

① 2π ② $\frac{9}{4}\pi$ ③ $\frac{5}{2}\pi$ ④ $\frac{11}{4}\pi$ ⑤ 3π

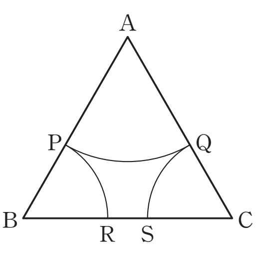
[23008-0076]

7 $0\le x<2\pi$일 때, 방정식 $2\cos^2 x+a\sin x-1=0$이 서로 다른 세 실근 $\frac{\pi}{6}$, α, β $(\alpha<\beta)$를 갖는다. $\alpha\beta$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① $\frac{3}{4}\pi^2$ ② $\frac{5}{6}\pi^2$ ③ $\frac{7}{6}\pi^2$ ④ $\frac{5}{4}\pi^2$ ⑤ $\frac{4}{3}\pi^2$

[23008-0077]

8 그림과 같이 한 변의 길이가 12인 정삼각형 ABC 위에 세 꼭짓점을 각각 중심으로 하는 세 부채꼴 APQ, BPR, CQS가 있다. 세 호 PQ, PR, QS의 길이의 합이 $\frac{17}{3}\pi$일 때, 선분 AP의 길이는?



① $\frac{13}{2}$ ② 7 ③ $\frac{15}{2}$

④ 8 ⑤ $\frac{17}{2}$

[23008-0078]

1 좌표평면에서 두 직선 $y=\frac{1}{2}x$, $y=2x$가 원 $x^2+y^2=64$와 제1사분면에서 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 점 $\mathrm{A}(8,\ 0)$에 대하여 중심이 원점 O인 두 부채꼴 OAP, OAQ에서 호 AP의 길이를 l_1, 호 AQ의 길이를 l_2라 할 때, $\frac{l_1+l_2}{\pi}$의 값을 구하시오.

[23008-0079]

2 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\cos(-\theta)=\frac{4}{3}$일 때, $\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}-\frac{1}{1-\sin\theta}$의 값은?

① $-\frac{9}{4}$　② $-\frac{9}{5}$　③ $-\frac{4}{5}$　④ $-\frac{5}{9}$　⑤ $-\frac{4}{9}$

[23008-0080]

3 함수 $y=2\sin 3x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{3}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수를 $y=f(x)$라 하자. 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 $\left(\frac{\pi}{6},\ f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$, $\left(\frac{\pi}{2},\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$를 지나는 직선의 기울기는?

① $\frac{3}{\pi}$　② $\frac{6}{\pi}$　③ $\frac{9}{\pi}$　④ $\frac{12}{\pi}$　⑤ $\frac{15}{\pi}$

[23008-0081]

4 $-4<x<4$에서 함수 $y=3\tan\frac{\pi x}{8}$의 그래프와 두 직선 $x=-2$, $y=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

[23008-0082]

5 함수 $f(x)=\tan(ax+b)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f\left(-\frac{\pi}{24}\right)$의 값은? $\left(\text{단, } a>0,\ 0<b<\frac{\pi}{2}\right)$

(가) 함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

(나) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $x=k$가 만나지 않도록 하는 양의 실수 k의 최솟값은 $\frac{\pi}{12}$이다.

① -1 ② $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ 1

[23008-0083]

6 세 양수 a, b, c에 대하여 함수 $y=|a\sin bx-c|$의 주기는 4π이고 이 함수의 최댓값은 5, 최솟값은 1일 때, abc의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[23008-0084]

7 좌표평면 위의 서로 다른 두 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2, y_2)$에 대하여 두 동경 OP, OQ가 나타내는 각의 크기를 각각 θ_1, θ_2라 하자. 두 점 P, Q와 θ_1, θ_2가 다음 조건을 만족시킬 때, $\sin\theta_2$의 값은? (단, O는 원점이다.)

(가) $\theta_1=2\theta_2$

(나) $x_1y_1>0$, $(x_1-x_2)^2+(y_1+y_2)^2=0$

① $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ 1

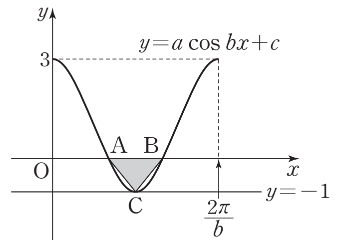
[23008-0085]

8 $0\le x<2\pi$에서 부등식 $\sin x>k$를 만족시키는 모든 x의 값의 범위가 $\alpha<x<\beta$이고 $\cos(\beta-\alpha)=\frac{1}{2}$일 때, $\alpha\beta$의 값은? (단, $0<k<1$)

① $\frac{5}{36}\pi^2$ ② $\frac{1}{6}\pi^2$ ③ $\frac{7}{36}\pi^2$ ④ $\frac{2}{9}\pi^2$ ⑤ $\frac{1}{4}\pi^2$

[23008-0086]

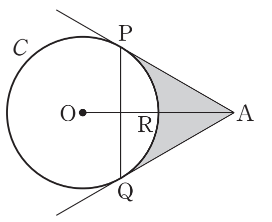
9 세 양수 a, b, c에 대하여 정의역이 $\left\{x \middle| 0\le x\le \frac{2\pi}{b}\right\}$인 함수 $f(x)=a\cos bx+c$의 최댓값은 3이고 최솟값은 -1이다. 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 두 점 A, B에서 만나고 직선 $y=-1$과 한 점 C에서 만난다. 삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{2}{3}\pi$일 때, abc의 값은?



① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

[23008-0087]

10 그림과 같이 중심이 O인 원 C 밖의 점 A에서 원 C에 그은 두 접선이 원 C와 만나는 두 점을 P, Q라 하고, 선분 OA와 원 C가 만나는 점을 R라 하자. 점 R가 선분 OA의 중점이고, 삼각형 APQ의 둘레의 길이가 $9\sqrt{2}$일 때, 두 선분 AP, AQ와 점 R를 포함하는 호 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이는?



① $4\sqrt{3}-2\pi$ ② $5\sqrt{3}-2\pi$ ③ $6\sqrt{3}-2\pi$
④ $5\sqrt{3}-\pi$ ⑤ $6\sqrt{3}-\pi$

[23008-0088]

11 $0\le x<2\pi$일 때, 부등식 $(2\sin x-1)(2\cos x-1)>0$을 만족시키는 모든 x의 값의 범위가 $a<x<b$ 또는 $c<x<d$이다. $\frac{6(a+d)}{\pi}$의 값을 구하시오. (단, $a<b<c<d$)

[23008-0089]

12 $0<x<10$일 때, 방정식

$$\sin^2\frac{\pi x}{5}-\sin\frac{\pi x}{5}-\left(\sin\frac{2}{5}\pi+1\right)\sin\frac{2}{5}\pi=0$$

을 만족시키는 서로 다른 두 실근을 α, β라 하자. $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오.

정답과 풀이 28쪽

[23008-0090]

1 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

(가) $\theta=\frac{\pi}{2n}$

(나) $14<\sin^2\theta+\sin^2 2\theta+\sin^2 3\theta+\cdots+\sin^2 n\theta<16$

[23008-0091]

2 다음 조건을 만족시키는 0이 아닌 두 실수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 모두 2개이다. 이 두 순서쌍을 각각 (a_1, b_1), (a_2, b_2) $(a_1<a_2)$라 할 때, $(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2$의 값을 구하시오.

$0<x<\pi$에서 정의된 두 함수 $y=a\sin x$, $y=b|\cos x|+k$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 실수 k의 값의 범위는 $-3<k<4$이다.

[23008-0092]

3 함수 $y=4\cos 2x-1$의 그래프와 함수 $y=\tan\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$의 그래프의 점근선이 만나는 모든 점의 y좌표 중에서 서로 다른 모든 y좌표의 곱을 구하시오.

대표 기출 문제

출제 경향 삼각함수의 성질에 관한 문제 또는 이를 이용하여 삼각함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제가 출제된다.

2023학년도 대수능

함수

$$f(x)=a-\sqrt{3}\tan 2x$$

가 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{6},\ b\right]$에서 최댓값 7, 최솟값 3을 가질 때, $a\times b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

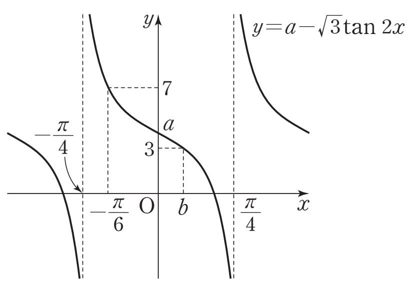
① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{5\pi}{12}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{\pi}{4}$ ⑤ $\frac{\pi}{6}$

출제 의도 닫힌구간에서 탄젠트함수의 최댓값과 최솟값을 이용하여 두 상수의 곱을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 함수 $f(x)=a-\sqrt{3}\tan 2x$의 그래프의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이고,

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{6},\ b\right]$에서 최댓값 7, 최솟값 3을 가지므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고,

$-\frac{\pi}{6}<b<\frac{\pi}{4}$이다.



함수 $f(x)$는 $x=-\frac{\pi}{6}$에서 최댓값 7을 가지므로

$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=a-\sqrt{3}\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=7$에서

$a+\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{3}=7$, $a+3=7$, $a=4$

함수 $f(x)$는 $x=b$에서 최솟값 3을 가지므로

$f(b)=4-\sqrt{3}\tan 2b=3$에서 $\tan 2b=\frac{\sqrt{3}}{3}$

이때 $-\frac{\pi}{3}<2b<\frac{\pi}{2}$이므로 $2b=\frac{\pi}{6}$에서 $b=\frac{\pi}{12}$

따라서 $a\times b=4\times\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}$

답 ③

대표 기출 문제

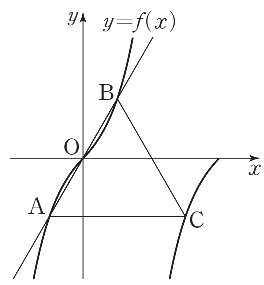
출제 경향 삼각함수의 그래프의 주기, 최댓값, 최솟값 등을 이용하는 문제가 출제된다.

2022학년도 대수능

양수 a에 대하여 집합 $\left\{x \,\middle|\, -\frac{a}{2}<x\le a,\ x\ne\frac{a}{2}\right\}$에서 정의된 함수

$$f(x)=\tan\frac{\pi x}{a}$$

가 있다. 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 세 점 O, A, B를 지나는 직선이 있다. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C라 하자. 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{17\sqrt{3}}{12}$ ③ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ④ $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{3}}{6}$

출제 의도 삼각함수의 그래프의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 삼각형의 넓이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 함수 $f(x)=\tan\frac{\pi x}{a}$의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{a}}=a$이므로 $\overline{AC}=a$

직선 BC와 x축이 만나는 점을 D라 하면 삼각형 ODB도 정삼각형이므로 두 삼각형 ACB, ODB는 서로 닮은 도형이고, 닮음비는 $\overline{AB}:\overline{OB}=2:1$이다.

따라서 $\overline{OD}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}a$이므로

점 B의 x좌표는 $\frac{1}{2}\overline{OD}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}a=\frac{1}{4}a$, 점 B의 y좌표는 $\overline{OB}\times\sin 60^\circ=\frac{1}{2}a\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}a$

이때 점 $B\left(\frac{1}{4}a,\ \frac{\sqrt{3}}{4}a\right)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로

$\frac{\sqrt{3}}{4}a=\tan\left(\frac{\pi}{a}\times\frac{1}{4}a\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$에서 $a=\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

따라서 정삼각형 ABC의 한 변의 길이가 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

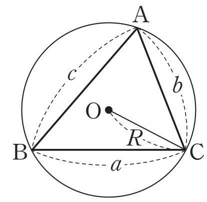
답 ③

04 사인법칙과 코사인법칙

1. 사인법칙

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

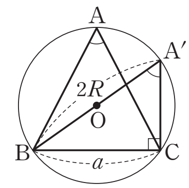
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$



참고 삼각형 ABC에서 $\angle$A, $\angle$B, $\angle$C의 크기를 각각 A, B, C로 나타내고, 이들의 대변의 길이를 각각 a, b, c로 나타내기로 한다.

설명 삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O라 할 때, 등식 $\frac{a}{\sin A}=2R$가 성립함을 $\angle$A가 예각, 직각, 둔각인 세 경우로 나누어 다음과 같이 증명할 수 있다.

(i) $0^\circ < A < 90^\circ$일 때



점 B에서 중심 O를 지나는 지름 BA′을 그리면 $A=A'$이므로

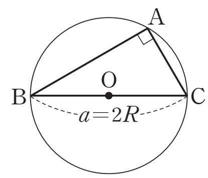
$\sin A=\sin A'$

삼각형 A′BC에서 $\angle$BCA′$=90^\circ$이므로

$\sin A'=\frac{\overline{\text{BC}}}{\overline{\text{BA}'}}=\frac{a}{2R}$

따라서 $\sin A=\frac{a}{2R}$, 즉 $\frac{a}{\sin A}=2R$

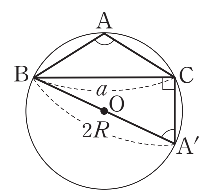
(ii) $A=90^\circ$일 때



$\sin A=\sin 90^\circ=1$이므로 $a=2R$

따라서 $\frac{a}{\sin A}=\frac{2R}{1}=2R$

(iii) $90^\circ < A < 180^\circ$일 때



점 B에서 중심 O를 지나는 지름 BA′을 그리면 $A+A'=180^\circ$이므로

$A=180^\circ-A'$

즉, $\sin A=\sin(180^\circ-A')=\sin A'$

삼각형 A′BC에서 $\angle$A′CB$=90^\circ$이므로

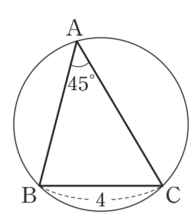
$\sin A'=\frac{\overline{\text{BC}}}{\overline{\text{BA}'}}=\frac{a}{2R}$

따라서 $\sin A=\frac{a}{2R}$, 즉 $\frac{a}{\sin A}=2R$

(i), (ii), (iii)에서 $\angle$A의 크기에 관계없이 $\frac{a}{\sin A}=2R$가 성립한다.

같은 방법으로 $\frac{b}{\sin B}=2R$, $\frac{c}{\sin C}=2R$도 성립한다.

예 $\overline{\text{BC}}=4$, $\angle$A$=45^\circ$인 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 구해 보자.



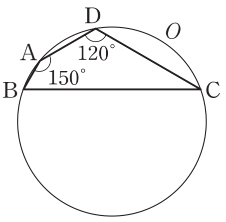
삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\text{BC}}}{\sin A}=2R$이므로

$$R=\frac{1}{2}\times\frac{\overline{\text{BC}}}{\sin A}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{\sin 45^\circ}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{2}$$

예제 1 사인법칙

그림과 같이 원 O에 내접하는 사각형 ABCD에서 $\angle\mathrm{ADC}=120^\circ$, $\angle\mathrm{BAD}=150^\circ$이고 $\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{BD}}=16\sqrt{3}$일 때, 원 O의 반지름의 길이는?



① 4　　② 5　　③ 6　　④ 7　　⑤ 8

길잡이 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

풀이 원 O의 반지름의 길이를 R라 하자.

삼각형 ACD에서 사인법칙에 의하여 $\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin D}=2R$이므로

$$\overline{\mathrm{AC}}=2R\sin D=2R\sin 120^\circ=2R\sin 60^\circ=2R\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}R$$

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여 $\dfrac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin A}=2R$이므로

$$\overline{\mathrm{BD}}=2R\sin A=2R\sin 150^\circ=2R\sin 30^\circ=2R\times\frac{1}{2}=R$$

이때 $\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{BD}}=16\sqrt{3}$이므로 $\sqrt{3}R^2=16\sqrt{3}$에서 $R^2=16$, $R=4$

따라서 원 O의 반지름의 길이는 4이다.

답 ①

유제

정답과 풀이 31쪽

1 [23008-0093]

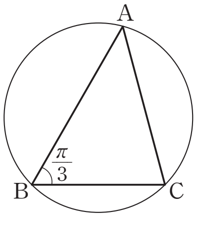
삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AC}}=4$, $\angle\mathrm{A}=\frac{\pi}{6}$이고 $\cos B=\frac{3}{5}$일 때, 선분 BC의 길이는?

① $\frac{3}{2}$　　② 2　　③ $\frac{5}{2}$　　④ 3　　⑤ $\frac{7}{2}$

2 [23008-0094]

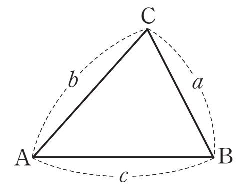
그림과 같이 삼각형 ABC에서 $\angle\mathrm{B}=\frac{\pi}{3}$이고 $\overline{\mathrm{AC}}=9$, $\overline{\mathrm{BC}}=3\sqrt{6}$이다. 점 C를 포함하지 않는 호 AB의 길이를 l이라 할 때, $\frac{4l^2}{\pi^2}$의 값을 구하시오.

$\left(\text{단, } 0<A<\frac{\pi}{2}\right)$



2. 코사인법칙

삼각형 ABC에서



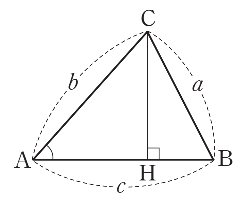
(1) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

(2) $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

(3) $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

설명 삼각형 ABC의 꼭짓점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 등식 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$가 성립함을 $\angle$A가 예각, 직각, 둔각인 세 경우로 나누어 다음과 같이 증명할 수 있다.

(ⅰ) $0^\circ<A<90^\circ$일 때



직각삼각형 CAH에서

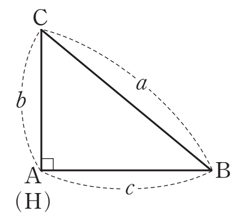
$\overline{\mathrm{CH}}=b\sin A$, $\overline{\mathrm{AH}}=b\cos A$

또 $\overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{AB}}-\overline{\mathrm{AH}}=c-b\cos A$

직각삼각형 BCH에서 $\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{CH}}^2+\overline{\mathrm{BH}}^2$이므로

$$\begin{aligned}a^2&=(b\sin A)^2+(c-b\cos A)^2\\&=b^2\sin^2 A+c^2-2bc\cos A+b^2\cos^2 A\\&=b^2(\sin^2 A+\cos^2 A)+c^2-2bc\cos A\\&=b^2+c^2-2bc\cos A\end{aligned}$$

(ⅱ) $A=90^\circ$일 때

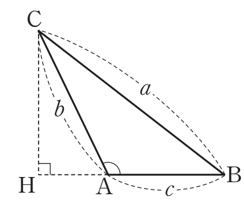


직각삼각형 ABC에서

$\cos A=\cos 90^\circ=0$이므로

$$\begin{aligned}a^2&=b^2+c^2\\&=b^2+c^2-2bc\cos A\end{aligned}$$

(ⅲ) $90^\circ<A<180^\circ$일 때



직각삼각형 ACH에서

$\overline{\mathrm{CH}}=b\sin(180^\circ-A)=b\sin A$, $\overline{\mathrm{AH}}=b\cos(180^\circ-A)=-b\cos A$

또 $\overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AH}}=c-b\cos A$

직각삼각형 BCH에서 $\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{CH}}^2+\overline{\mathrm{BH}}^2$이므로

$$\begin{aligned}a^2&=(b\sin A)^2+(c-b\cos A)^2\\&=b^2\sin^2 A+c^2-2bc\cos A+b^2\cos^2 A\\&=b^2(\sin^2 A+\cos^2 A)+c^2-2bc\cos A\\&=b^2+c^2-2bc\cos A\end{aligned}$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $\angle$A의 크기에 관계없이

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

가 성립한다.

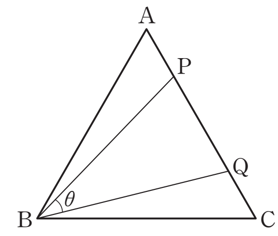
같은 방법으로

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

도 성립한다.

예제 2 코사인법칙

그림과 같이 정삼각형 ABC에서 선분 AC를 1 : 3으로 내분하는 점을 P, 선분 AC를 3 : 1로 내분하는 점을 Q라 하자. $\angle\mathrm{PBQ}=\theta$일 때, $\cos\theta$의 값은?



① $\frac{8}{13}$　② $\frac{9}{13}$　③ $\frac{10}{13}$
④ $\frac{11}{13}$　⑤ $\frac{12}{13}$

길잡이 삼각형 ABC에서

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

풀이 정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 $4a$라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{CQ}}=a,\ \overline{\mathrm{PQ}}=2a$

삼각형 ABP에서 $\angle\mathrm{A}=\frac{\pi}{3}$이므로 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{BP}}^2&=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AP}}^2-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AP}}\times\cos\frac{\pi}{3}\\&=(4a)^2+a^2-2\times4a\times a\times\frac{1}{2}\\&=13a^2\end{aligned}$$

$\overline{\mathrm{BP}}=\sqrt{13}a$

삼각형 ABP와 삼각형 CBQ는 서로 합동(SAS 합동)이므로 $\overline{\mathrm{BQ}}=\overline{\mathrm{BP}}=\sqrt{13}a$

따라서 삼각형 PBQ에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{PQ}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{BQ}}^2-2\times\overline{\mathrm{BP}}\times\overline{\mathrm{BQ}}\times\cos\theta$이므로

$$(2a)^2=(\sqrt{13}a)^2+(\sqrt{13}a)^2-2\times\sqrt{13}a\times\sqrt{13}a\times\cos\theta$$

$$\cos\theta=\frac{(\sqrt{13}a)^2+(\sqrt{13}a)^2-(2a)^2}{2\times\sqrt{13}a\times\sqrt{13}a}=\frac{11}{13}$$

답 ④

유제

정답과 풀이 31쪽

3 [23008-0095]

좌표평면에서 두 직선 $y=\frac{1}{2}x,\ y=-x+3$이 만나는 점을 A라 하자. 원점 O와 점 B(0, 3)에 대하여 삼각형 OAB에서 $\angle\mathrm{OAB}=\theta$라 할 때, $\cos\theta$의 값은?

① $\frac{\sqrt{10}}{20}$　② $\frac{\sqrt{10}}{10}$　③ $\frac{3\sqrt{10}}{20}$　④ $\frac{\sqrt{10}}{5}$　⑤ $\frac{\sqrt{10}}{4}$

4 [23008-0096]

$\overline{\mathrm{AC}}=2,\ \overline{\mathrm{BC}}=6$이고 $\angle\mathrm{C}=\frac{2}{3}\pi$인 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 $\frac{b}{a}\pi$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 서로소인 자연수이다.)

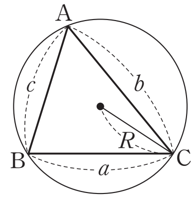
04 사인법칙과 코사인법칙

3. 삼각형의 모양

삼각형 ABC의 모양은 각의 크기 A, B, C에 대한 식을 변의 길이 a, b, c에 대한 식으로 고쳐서 알아본다.

(1) 사인법칙을 이용하는 경우

① 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면



$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R}$$

② $a : b : c=\sin A : \sin B : \sin C$

설명 ① 사인법칙에서 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$이므로

$\frac{a}{\sin A}=2R$에서 $\sin A=\frac{a}{2R}$

$\frac{b}{\sin B}=2R$에서 $\sin B=\frac{b}{2R}$

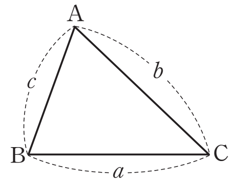
$\frac{c}{\sin C}=2R$에서 $\sin C=\frac{c}{2R}$

② ①에서 $\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$이므로

$$\sin A : \sin B : \sin C=\frac{a}{2R} : \frac{b}{2R} : \frac{c}{2R}=a : b : c$$

(2) 코사인법칙을 이용하는 경우

삼각형 ABC에서



① $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

② $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

③ $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

설명 코사인법칙에서 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$이므로 $2bc\cos A=b^2+c^2-a^2$에서

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

같은 방법으로 $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$, $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$도 성립한다.

예 삼각형 ABC가 $b\cos A=a\cos B$를 만족시킬 때, 삼각형 ABC의 모양을 조사해 보자.

코사인법칙에 의하여 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$이므로 $b\cos A=a\cos B$에서

$$b\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=a\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$b^2+c^2-a^2=c^2+a^2-b^2$$

$$a^2-b^2=0$$

$$(a+b)(a-b)=0$$

이때 $a+b\neq0$이므로 $a=b$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이다.

예제 3 삼각형의 모양

www.ebsi.co.kr

삼각형 ABC가 $\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$, $\sin A=3(\sin C-\sin B)$를 만족시킨다. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $\frac{15}{2}$일 때, 선분 AC의 길이를 구하시오.

길잡이 삼각형 ABC에서

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\ \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

풀이 삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AB}}=c$, $\overline{\mathrm{BC}}=a$, $\overline{\mathrm{CA}}=b$라 하자.

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $\frac{15}{2}$이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2\times\frac{15}{2}=15$$

즉, $\sin A=\frac{a}{15}$, $\sin B=\frac{b}{15}$, $\sin C=\frac{c}{15}$이므로

$\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$에서 $\left(\frac{a}{15}\right)^2+\left(\frac{b}{15}\right)^2=\left(\frac{c}{15}\right)^2$, $c^2=a^2+b^2$ ······ ㉠

$\sin A=3(\sin C-\sin B)$에서 $\frac{a}{15}=3\left(\frac{c}{15}-\frac{b}{15}\right)$, $a=3(c-b)$ ······ ㉡

㉠에서 삼각형 ABC는 $\angle\mathrm{C}=90°$인 직각삼각형이고, 직각삼각형의 빗변은 이 삼각형의 외접원의 지름이므로

$c=15$

㉡을 ㉠에 대입하면

$15^2=9(15-b)^2+b^2$, $10b^2-270b+1800=0$

$b^2-27b+180=0$, $(b-12)(b-15)=0$

$b=12$ 또는 $b=15$

이때 ㉡에서 $b<c$이므로 $b=12$

따라서 선분 AC의 길이는 12이다.

답 12

유제

정답과 풀이 32쪽

5 [23008-0097]

$\angle\mathrm{B}=15°$인 삼각형 ABC가 $\sin(A+B)=\sin B$를 만족시킨다. 삼각형 ABC의 외접원의 중심 O에 대하여 삼각형 OBC의 둘레의 길이가 36일 때, 선분 BC의 길이를 구하시오.

6 [23008-0098]

$\overline{\mathrm{BC}}=3$인 삼각형 ABC가 $\sin(A+B)+\sin(B+C)\cos(A+C)=0$을 만족시키고, 삼각형 ABC의 넓이가 $\sqrt{2}$이다. $\cos B+\cos C=p+q\sqrt{2}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

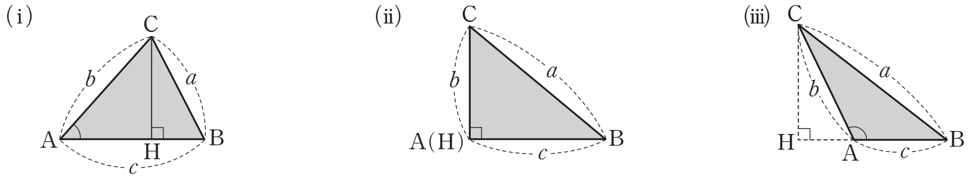
(단, p와 q는 유리수이다.)

4. 삼각형의 넓이

삼각형 ABC에서 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기가 주어질 때, 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$

설명 삼각형 ABC의 꼭짓점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이를 ∠A가 예각, 직각, 둔각인 세 경우로 나누어 생각한다.



(i) $0^\circ < A < 90^\circ$일 때

$\overline{\mathrm{CH}}=b\sin A$

(ii) $A=90^\circ$일 때

$\sin A=\sin 90^\circ=1$이므로

$\overline{\mathrm{CH}}=b=b\sin A$

(iii) $90^\circ < A < 180^\circ$일 때

$\overline{\mathrm{CH}}=b\sin(180^\circ-A)=b\sin A$

(i), (ii), (iii)에서 ∠A의 크기에 관계없이 $\overline{\mathrm{CH}}=b\sin A$이므로 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{CH}}=\frac{1}{2}bc\sin A$$

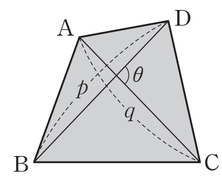
같은 방법으로

$$S=\frac{1}{2}ca\sin B,\ S=\frac{1}{2}ab\sin C$$

도 성립한다.

참고 그림과 같은 사각형 ABCD에서 두 대각선의 길이가 각각 p, q이고, 두 대각선이 이루는 각의 크기가 θ일 때, 사각형 ABCD의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}pq\sin\theta$$

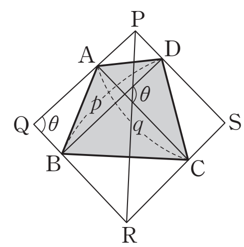


설명 그림과 같이 대각선 BD와 평행하고 두 점 A, C를 지나는 직선을 각각 그리고, 대각선 AC와 평행하고 두 점 B, D를 지나는 직선을 각각 그린다.

네 직선이 만나는 점을 각각 P, Q, R, S라 하면 사각형 PQRS는 평행사변형이다.

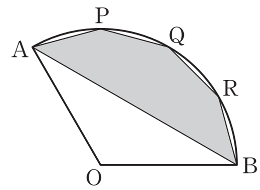
따라서 사각형 ABCD의 넓이는 사각형 PQRS의 넓이의 $\frac{1}{2}$이고, 삼각형 PQR의 넓이도 사각형 PQRS의 넓이의 $\frac{1}{2}$이므로 사각형 ABCD의 넓이와 삼각형 PQR의 넓이는 같다.

즉, $S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{QR}}\times\sin\theta=\frac{1}{2}pq\sin\theta$



예제 4 삼각형의 넓이

그림과 같이 중심이 O인 부채꼴 AOB에서 $\overline{OA}=6$이고 호 AB의 길이는 4π이다. 호 AB를 사등분하는 점을 점 A에 가까운 점부터 차례로 P, Q, R라 하자. 오각형 APQRB의 넓이는?



① $24-9\sqrt{3}$ ② $24-6\sqrt{3}$ ③ $36-9\sqrt{3}$
④ $36-6\sqrt{3}$ ⑤ $36-3\sqrt{3}$

길잡이 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A$이다.

풀이 부채꼴 AOB에서 $\overline{OA}=6$이고 호 AB의 길이는 4π이므로

$$\angle AOB=\frac{4\pi}{6}=\frac{2}{3}\pi$$

호 AB를 사등분하는 점이 P, Q, R이므로

$$\angle AOP=\angle POQ=\angle QOR=\angle ROB=\frac{2}{3}\pi\times\frac{1}{4}=\frac{\pi}{6}$$

따라서 삼각형 AOP, POQ, QOR, ROB의 넓이는 모두

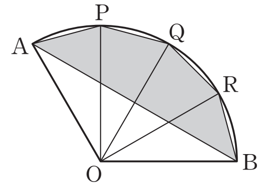
$$\frac{1}{2}\times6^2\times\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\times6^2\times\frac{1}{2}=9$$

이므로 육각형 APQRBO의 넓이는 $9\times4=36$

이때 삼각형 AOB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times6^2\times\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{1}{2}\times6^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$$

이므로 오각형 APQRB의 넓이는 $36-9\sqrt{3}$이다.



답 ③

유제

정답과 풀이 32쪽

7 [23008-0099]

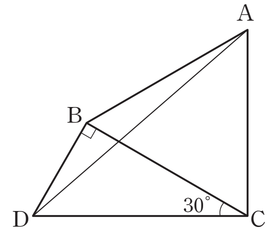
삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=2$이고 $\angle B=30^\circ$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는?

① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ 4 ⑤ $2\sqrt{5}$

8 [23008-0100]

그림과 같이 한 평면 위에 정삼각형 ABC와 $\angle CBD=90^\circ$, $\angle BCD=30^\circ$인 직각삼각형 CBD가 있다. 삼각형 ABD의 넓이를 S, 삼각형 ADC의 넓이를 T라 할 때, $\frac{T}{S}$의 값을 구하시오.

(단, 선분 AB와 선분 CD는 만나지 않는다.)



Level 1 기초 연습

[23008-0101]

1 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 12이고 $\cos(A+B)=-\frac{3}{4}$일 때, 선분 AB의 길이는?

① $4\sqrt{7}$ ② $5\sqrt{5}$ ③ $5\sqrt{7}$ ④ $6\sqrt{5}$ ⑤ $6\sqrt{7}$

[23008-0102]

2 $\overline{\mathrm{AB}}=a-2$, $\overline{\mathrm{BC}}=a$, $\overline{\mathrm{CA}}=a+2$인 삼각형 ABC에서 $\angle\mathrm{B}=120°$일 때, 상수 a의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

[23008-0103]

3 좌표평면 위의 원점 O와 두 점 A$(2, 1)$, B$(1, 2)$에 대하여 삼각형 OAB에서 $\angle\mathrm{AOB}=\theta$라 할 때, $\cos\theta$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{7}{10}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

[23008-0104]

4 $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overline{\mathrm{AC}}=2$인 예각삼각형 ABC의 넓이가 1일 때, $\cos A$의 값은?

① $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{5\sqrt{2}}{12}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ④ $\frac{7\sqrt{2}}{12}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

[23008-0105]

5 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=4$이고 $\angle A=60°$일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는?

① $\frac{\sqrt{21}}{6}$ ② $\frac{\sqrt{21}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{21}}{2}$ ④ $\frac{2\sqrt{21}}{3}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{21}}{6}$

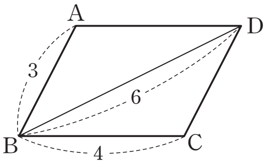
[23008-0106]

6 삼각형 ABC에서 $\sin A : \sin B = 1 : 3$이고 $\angle C=60°$이다. 삼각형 ABC의 넓이가 $12\sqrt{3}$일 때, 선분 BC의 길이는?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

[23008-0107]

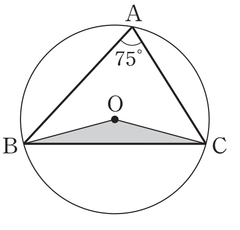
7 평행사변형 ABCD에서 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=4$, $\overline{BD}=6$일 때, 선분 AC의 길이는?



① $\sqrt{11}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{13}$
④ $\sqrt{14}$ ⑤ $\sqrt{15}$

[23008-0108]

8 그림과 같이 $\angle BAC=75°$인 삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O라 하자. 삼각형 OBC의 넓이가 9일 때, $\overline{BC}^2$의 값은?

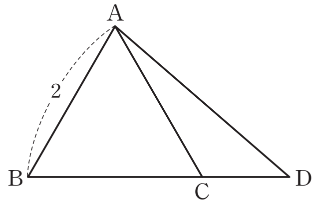


① $36+9\sqrt{3}$ ② $36+18\sqrt{3}$ ③ $72+9\sqrt{3}$
④ $72+18\sqrt{3}$ ⑤ $72+36\sqrt{3}$

Level 2 기본 연습

[23008-0109]

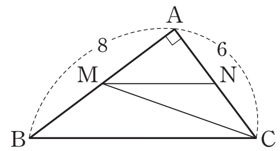
1 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC에서 선분 BC를 3 : 1로 외분하는 점을 D라 할 때, 삼각형 ACD의 외접원의 넓이는?



① 2π ② $\frac{7}{3}\pi$ ③ $\frac{8}{3}\pi$
④ 3π ⑤ $\frac{10}{3}\pi$

[23008-0110]

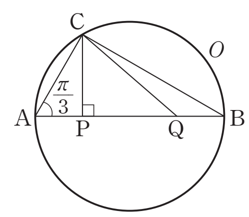
2 그림과 같이 $\overline{AB}=8$, $\overline{AC}=6$이고 $\angle A=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에서 선분 AB의 중점을 M, 선분 AC의 중점을 N이라 할 때, $\sin(\angle NMC)$의 값은?



① $\frac{2\sqrt{13}}{65}$ ② $\frac{3\sqrt{13}}{65}$ ③ $\frac{4\sqrt{13}}{65}$
④ $\frac{\sqrt{13}}{13}$ ⑤ $\frac{6\sqrt{13}}{65}$

[23008-0111]

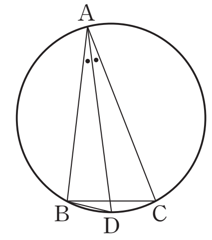
3 그림과 같이 선분 AB가 지름인 원 O에서 선분 AB 위에 $\overline{AP}=\overline{BQ}$를 만족시키는 두 점 P, Q를 잡는다. 원 O 위의 점 C에 대하여 두 선분 AP, CP가 서로 수직이고 $\angle CAP=\frac{\pi}{3}$일 때, $\cos(\angle ACQ)$의 값은?



① $\frac{\sqrt{7}}{28}$ ② $\frac{\sqrt{7}}{14}$ ③ $\frac{3\sqrt{7}}{28}$
④ $\frac{\sqrt{7}}{7}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{7}}{28}$

[23008-0112]

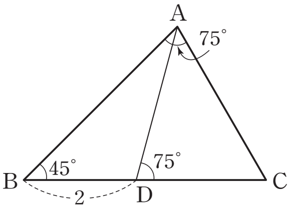
4 그림과 같이 $\overline{\mathrm{BC}}=12$인 삼각형 ABC에서 $\angle\mathrm{BAC}$의 이등분선이 삼각형 ABC의 외접원과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 D라 하자. $\overline{\mathrm{BD}}=k$일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는 $2k$이다. 실수 k의 값은? $\left(단, 0<\angle\mathrm{BAC}<\frac{\pi}{2}\right)$



① $\frac{6\sqrt{15}}{5}$ ② $\frac{13\sqrt{15}}{10}$ ③ $\frac{7\sqrt{15}}{5}$
④ $\frac{3\sqrt{15}}{2}$ ⑤ $\frac{8\sqrt{15}}{5}$

[23008-0113]

5 그림과 같이 삼각형 ABC에서 변 BC 위의 점 D에 대하여 $\overline{\mathrm{BD}}=2$이고 $\angle\mathrm{ABC}=45^\circ$, $\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{ADC}=75^\circ$이다. $\overline{\mathrm{AD}}=a$, $\overline{\mathrm{CD}}=b$라 할 때, a^2+3b^2의 값은?



① 22 ② 24 ③ 26
④ 28 ⑤ 30

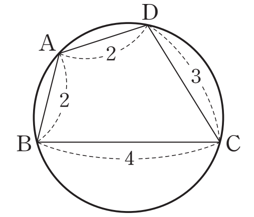
[23008-0114]

6 삼각형 ABC가 $\overline{\mathrm{AB}}\cos B+\overline{\mathrm{AC}}\cos(A+B)=0$을 만족시킨다. $\cos C=\frac{5}{8}$일 때, $\cos A$의 값은?

① $\frac{3}{16}$ ② $\frac{7}{32}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{9}{32}$ ⑤ $\frac{5}{16}$

[23008-0115]

7 사각형 ABCD의 네 꼭짓점은 한 원 위에 있고, $\overline{AB}=\overline{AD}=2$, $\overline{BC}=4$, $\overline{CD}=3$일 때, 사각형 ABCD에 외접하는 원의 반지름의 길이는?



① $\frac{\sqrt{15}}{3}$　② $\frac{2\sqrt{15}}{5}$　③ $\frac{7\sqrt{15}}{15}$　④ $\frac{8\sqrt{15}}{15}$　⑤ $\frac{3\sqrt{15}}{5}$

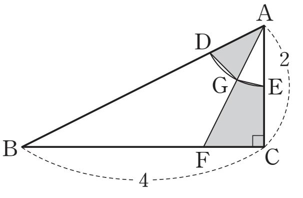
[23008-0116]

8 $\overline{AB}=8$, $\overline{AC}=6$인 삼각형 ABC의 외심을 O라 하자. 삼각형 OAC의 넓이가 12일 때, 선분 BC의 길이는 a이다. 서로 다른 모든 실수 a의 값의 합은?

① $\frac{61}{5}$　② $\frac{62}{5}$　③ $\frac{63}{5}$　④ $\frac{64}{5}$　⑤ 13

[23008-0117]

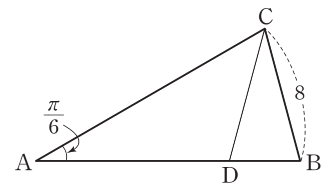
9 그림과 같이 $\overline{AC}=2$, $\overline{BC}=4$이고 $\angle C=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에서 중심이 A이고 반지름의 길이가 1인 원이 두 선분 AB, AC와 만나는 점을 각각 D, E라 하자. 선분 BC를 3 : 1로 내분하는 점을 F라 하고, 선분 AF가 호 DE와 만나는 점을 G라 하자. 사각형 CEGF의 넓이를 S, 삼각형 ADG의 넓이를 T라 할 때, $S+T$의 값은?



① $\frac{11-\sqrt{5}}{10}$　② $\frac{12-\sqrt{5}}{10}$　③ $\frac{13-\sqrt{5}}{10}$　④ $\frac{14-\sqrt{5}}{10}$　⑤ $\frac{15-\sqrt{5}}{10}$

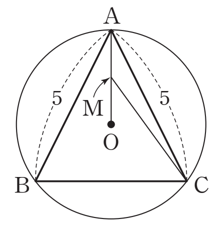
[23008-0118]

1 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$, $\overline{\mathrm{BC}}=8$이고 $\angle\mathrm{CAB}=\frac{\pi}{6}$인 삼각형 ABC가 있다.
선분 AB 위의 점 D에 대하여 $\overline{\mathrm{CB}}=\overline{\mathrm{CD}}$일 때, $\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{BD}}=a\sqrt{3}-b$이다.
두 자연수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.



[23008-0119]

2 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}=5$인 예각삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O라 하고, 선분 OA의 중점을 M이라 하자. 삼각형 ABC의 넓이가 10일 때, 선분 CM의 길이는?



① $\frac{\sqrt{37}}{8}$ ② $\frac{\sqrt{37}}{4}$ ③ $\frac{3\sqrt{37}}{8}$
④ $\frac{\sqrt{37}}{2}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{37}}{8}$

[23008-0120]

3 그림과 같이 중심이 각각 $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$이고 반지름의 길이가 각각 3, 2인 두 원 C_1, C_2가 직선 l_1과 점 A에서 동시에 접하고 있다. 원 C_2 위에 있고 직선 $\mathrm{O_1O_2}$의 왼쪽에 있는 점 B에서 원 C_2에 접하는 직선 l_2와 원 C_1이 만나는 두 점 중 점 B에 가까운 점을 P, 다른 한 점을 Q라 하고, 두 선분 AP, AQ가 원 C_2와 만나는 점을 각각 R, S라 하자. 직선 RS가 원 C_1과 만나는 점 중 점 S에 가까운 점을 T, 직선 l_1과 만나는 점을 U라 하자. 점 $\mathrm{O_1}$이 선분 SR 위의 점일 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

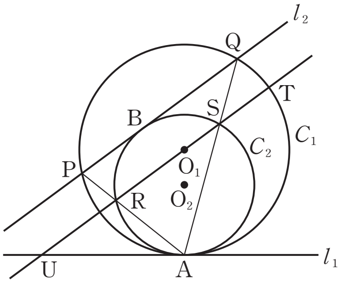
(단, 두 원 C_1, C_2는 한 평면 위에 있고, 원 C_2는 원 C_1의 내부에 있다.)

보기

ㄱ. $\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{3}{2}\overline{\mathrm{RS}}$

ㄴ. 삼각형 $\mathrm{O_1BO_2}$의 넓이는 $\frac{2}{\overline{\mathrm{O_1U}}}$와 같다.

ㄷ. $\left(\frac{\overline{\mathrm{O_1B}}^2-5}{4}\right)^2+\left(\frac{\overline{\mathrm{O_2T}}^2-10}{6}\right)^2=1$



① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

대표 기출 문제

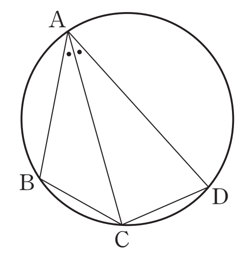
출제 경향 삼각형에서 사인법칙, 코사인법칙을 이용하여 선분의 길이, 각의 크기, 외접원의 반지름의 길이 또는 삼각함수의 값을 구하는 문제가 출제된다.

2023학년도 대수능

그림과 같이 사각형 ABCD가 한 원에 내접하고

$\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=3\sqrt{5}$, $\overline{AD}=7$, $\angle BAC=\angle CAD$

일 때, 이 원의 반지름의 길이는? [4점]



① $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{5\sqrt{5}}{3}$

④ $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

출제 의도 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 원의 반지름의 길이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 $\angle BAC=\angle CAD=\theta$라 하자.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2&=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\theta\\&=25+45-2\times5\times3\sqrt{5}\times\cos\theta\\&=70-30\sqrt{5}\cos\theta \qquad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{CD}^2&=\overline{AC}^2+\overline{AD}^2-2\times\overline{AC}\times\overline{AD}\times\cos\theta\\&=45+49-2\times3\sqrt{5}\times7\times\cos\theta\\&=94-42\sqrt{5}\cos\theta\end{aligned}$$

이때 $\angle BAC=\angle CAD$이므로 $\overline{BC}^2=\overline{CD}^2$

즉, $70-30\sqrt{5}\cos\theta=94-42\sqrt{5}\cos\theta$에서 $12\sqrt{5}\cos\theta=24$, $\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

㉠에서 $\overline{BC}^2=70-30\sqrt{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=10$이므로 $\overline{BC}=\sqrt{10}$

한편, $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2=\frac{1}{5}$이므로 $\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이를 R라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{BC}}{\sin\theta}=2R$이므로

$$R=\frac{1}{2}\times\frac{\overline{BC}}{\sin\theta}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{5}}{5}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

답 ①

대표 기출 문제

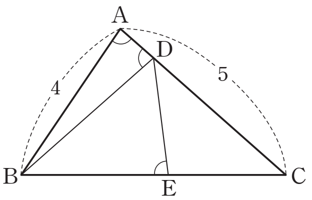
출제 경향 삼각형에서 코사인법칙을 이용하여 선분의 길이, 각의 크기 또는 삼각함수의 값을 구하는 문제가 출제된다.

2022학년도 대수능 6월 모의평가

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{AC}}=5$이고 $\cos(\angle\mathrm{BAC})=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E에 대하여

$$\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{BDA}=\angle\mathrm{BED}$$

일 때, 선분 DE의 길이는? [4점]



① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{8}{3}$
④ $\frac{17}{6}$ ⑤ 3

출제 의도 삼각형에서 코사인법칙과 닮은 도형의 성질을 이용하여 변의 길이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\cos(\angle\mathrm{BAC})=4^2+5^2-2\times4\times5\times\frac{1}{8}=36$$

이므로 $\overline{\mathrm{BC}}=6$

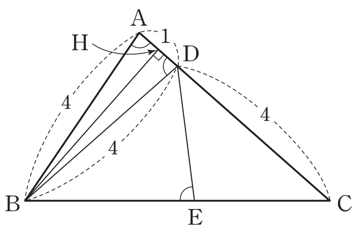
삼각형 ABD가 $\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{BDA}$인 이등변삼각형이므로

$$\overline{\mathrm{DB}}=\overline{\mathrm{AB}}=4$$

점 B에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{AB}}\cos(\angle\mathrm{BAC})=4\times\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$이므로

$$\overline{\mathrm{AD}}=2\overline{\mathrm{AH}}=2\times\frac{1}{2}=1,\ \overline{\mathrm{DC}}=\overline{\mathrm{AC}}-\overline{\mathrm{AD}}=5-1=4$$



한편, 삼각형의 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같으므로

$$\angle\mathrm{ADB}=\angle\mathrm{DBC}+\angle\mathrm{DCB},\ \angle\mathrm{DEB}=\angle\mathrm{ECD}+\angle\mathrm{EDC}$$

이때 $\angle\mathrm{ADB}=\angle\mathrm{DEB}$이므로

$$\angle\mathrm{DBC}+\angle\mathrm{DCB}=\angle\mathrm{ECD}+\angle\mathrm{EDC},\ \angle\mathrm{DBC}=\angle\mathrm{EDC}$$

즉, 두 삼각형 DBC, EDC는 서로 닮은 도형이므로

$\overline{\mathrm{DB}}:\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{ED}}:\overline{\mathrm{DC}}$에서 $4:6=\overline{\mathrm{ED}}:4$

따라서 $\overline{\mathrm{ED}}=\frac{4\times4}{6}=\frac{8}{3}$

답 ③

05 등차수열과 등비수열

1. 수열의 뜻과 일반항

(1) 자연수 중에서 홀수를 작은 수부터 차례로 나열하면

$$1, 3, 5, 7, \cdots$$

이다. 이와 같이 차례로 나열한 수의 열을 수열이라 하고, 수열을 이루는 각각의 수를 그 수열의 항이라고 한다.

(2) 수열을 나타낼 때는 각 항에 번호를 붙여

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

과 같이 나타내며, 앞에서부터 차례로 첫째항, 둘째항, 셋째항, $\cdots$, n째항, $\cdots$ 또는 제1항, 제2항, 제3항, $\cdots$, 제n항, $\cdots$이라고 한다. 이때 n의 식으로 나타낸 제n항 a_n을 수열의 일반항이라고 하며, 일반항이 a_n인 수열을 간단히 $\{a_n\}$으로 나타낸다.

2. 등차수열의 뜻과 일반항

(1) 등차수열의 뜻

첫째항부터 차례로 일정한 수를 더해 만들어지는 수열을 등차수열이라 하고, 더하는 일정한 수를 공차라고 한다.

(2) 등차수열의 일반항

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$$a_n=a+(n-1)d \ (n=1, 2, 3, \cdots)$$

설명 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$에서

$$a_1=a$$
$$a_2=a_1+d=a+d$$
$$a_3=a_2+d=(a+d)+d=a+2d$$
$$a_4=a_3+d=(a+2d)+d=a+3d$$
$$\vdots$$

이므로 일반항 a_n은

$$a_n=a+(n-1)d \ (n=1, 2, 3, \cdots)$$

예 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n=1+(n-1)\times 2=2n-1$$

3. 등차중항

세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, b를 a와 c의 등차중항이라고 한다.

이때 b가 a와 c의 등차중항이면 $b-a=c-b$이므로

$$2b=a+c, \text{ 즉 } b=\frac{a+c}{2}$$

가 성립한다. 역으로 $b=\frac{a+c}{2}$이면 $b-a=c-b$이므로 b는 a와 c의 등차중항이다.

예 세 수 2, x, 10이 이 순서대로 등차수열을 이루면 x는 2와 10의 등차중항이므로

$$x=\frac{2+10}{2}=6$$

예제 1 등차수열의 일반항

www.ebsi.co.kr

공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_3+a_5=4,\ |a_4|=|a_6|$

일 때, a_2의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

길잡이 (1) 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은 $a_n=a+(n-1)d\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

(2) b가 a와 c의 등차중항이면 $b=\frac{a+c}{2}$

풀이 수열 $\{a_n\}$에서 등차중항을 이용하면

$a_4=\frac{a_3+a_5}{2}=\frac{4}{2}=2$

수열 $\{a_n\}$의 공차가 0이 아니므로 $|a_4|=|a_6|$에서

$a_4=-a_6$, 즉 $a_6=-a_4=-2$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $a_4=2,\ a_6=-2$에서

$a_1+3d=2,\ a_1+5d=-2$

두 식을 연립하여 풀면 $a_1=8,\ d=-2$

따라서 $a_2=a_1+d=8+(-2)=6$

답 ③

참고 $a_4=2,\ a_6=-2$이고 세 수 $a_2,\ a_4,\ a_6$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$a_4=\frac{a_2+a_6}{2}$에서 $a_2=2a_4-a_6=2\times2-(-2)=6$

유제

정답과 풀이 40쪽

1 [23008-0121]

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_4=5,\ a_8-a_5=6$

일 때, a_7의 값은?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

2 [23008-0122]

첫째항이 자연수이고 모든 항이 정수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 세 수 $6,\ {a_2}^2,\ 2{a_3}^2$이 이 순서대로 등차수열을 이루도록 하는 모든 a_1의 값의 합은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

4. 등차수열의 합

(1) 첫째항이 a, 제n항이 l인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$$S_n=\frac{n(a+l)}{2}$$

(2) 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

설명 (1) 첫째항이 a, 공차가 d, 제n항이 l인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

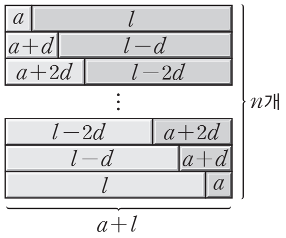
$$S_n=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(l-2d)+(l-d)+l \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 우변의 합의 순서를 거꾸로 나타내면

$$S_n=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots+(a+2d)+(a+d)+a \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl} S_n= & a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(l-2d)+(l-d)+l \\ +)\ S_n= & l+(l-d)+(l-2d)+\cdots+(a+2d)+(a+d)+a \\ \hline 2S_n= & \underbrace{(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots+(a+l)+(a+l)+(a+l)}_{n\text{개}} \\ = & n(a+l) \end{array}$$



따라서 $S_n=\frac{n(a+l)}{2}$

(2) (1)에서 $l=a+(n-1)d$이므로

$$S_n=\frac{n(a+l)}{2}=\frac{n\{a+a+(n-1)d\}}{2}=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

예 (1) 첫째항이 3이고 제10항이 17인 등차수열의 첫째항부터 제10항까지의 합 S_{10}은

$$S_{10}=\frac{10\times(3+17)}{2}=100$$

(2) 첫째항이 4이고 공차가 -2인 등차수열의 첫째항부터 제8항까지의 합 S_8은

$$S_8=\frac{8\times\{2\times4+(8-1)\times(-2)\}}{2}=-24$$

참고 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}=\frac{d}{2}n^2+\frac{2a-d}{2}n$$

이다. 이때 $\frac{d}{2}=A$, $\frac{2a-d}{2}=B$라 하면 $S_n=An^2+Bn$이므로 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은 n에 대한 이차식이고, 이때 상수항은 0이다.

5. 수열의 합과 일반항 사이의 관계

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면 $S_1=a_1$이고, 2 이상의 자연수 n에 대하여

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n=S_{n-1}+a_n$$

이므로 $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\ge2)$이다.

예제 2 등차수열의 합

www.ebsi.co.kr

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$a_9=a_3+a_6,\ -a_9+S_9=72$$

일 때, a_1의 값을 구하시오.

길잡이 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

$a_9=a_3+a_6$에서 $a_9-a_6=a_3$이므로

$$3d=a_1+2d,\ \text{즉}\ a_1=d$$

따라서

$$\begin{aligned}-a_9+S_9&=S_8\\&=\frac{8\times\{2a_1+(8-1)\times d\}}{2}\\&=4(2a_1+7a_1)\\&=36a_1\end{aligned}$$

이므로 $36a_1=72$에서

$$a_1=2$$

답 2

유제

정답과 풀이 41쪽

3 [23008-0123]

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$a_2=5,\ S_8=12$$

일 때, a_7-a_2의 값은?

① -9 ② -8 ③ -7 ④ -6 ⑤ -5

4 [23008-0124]

등차수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=4n-7$일 때, 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n에 대하여 $S_{20}-S_8$의 값은?

① 594 ② 600 ③ 606 ④ 612 ⑤ 618

6. 등비수열의 뜻과 일반항

(1) 등비수열의 뜻

첫째항부터 차례로 일정한 수를 곱해 만들어지는 수열을 등비수열이라 하고, 곱하는 일정한 수를 공비라고 한다.

(2) 등비수열의 일반항

첫째항이 a, 공비가 r $(r\neq0)$인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$$a_n=ar^{n-1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

설명 첫째항이 a, 공비가 r $(r\neq0)$인 등비수열 $\{a_n\}$에서

$$a_1=a$$
$$a_2=a_1r=ar$$
$$a_3=a_2r=(ar)r=ar^2$$
$$a_4=a_3r=(ar^2)r=ar^3$$
$$\vdots$$

이므로 일반항 a_n은

$$a_n=ar^{n-1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

예 ① 첫째항이 2이고 공비가 3인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n=2\times3^{n-1}$$

② 등비수열 $\{a_n\}$이

$$1,\ -5,\ 25,\ -125,\ \cdots$$

일 때, 첫째항이 1이고 공비가 -5이므로 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n=1\times(-5)^{n-1}=(-5)^{n-1}$$

7. 등비중항

0이 아닌 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, b를 a와 c의 등비중항이라고 한다.

이때 b가 a와 c의 등비중항이면 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{b}$이므로

$$b^2=ac$$

가 성립한다.

역으로 0이 아닌 세 수 a, b, c에 대하여 $b^2=ac$이면 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{b}$이므로 b는 a와 c의 등비중항이다.

예 세 수 2, x, 8이 이 순서대로 등비수열을 이루면 x는 2와 8의 등비중항이므로

$$x^2=2\times8=16$$

즉, $x=-4$ 또는 $x=4$

예제 3 등비수열의 일반항

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1a_3=4,\ \frac{a_5}{a_4-3a_6}=\frac{1}{2}$$

일 때, a_4의 값은?

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

길잡이 첫째항이 a, 공비가 r $(r\neq0)$인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$$a_n=ar^{n-1}\ (n=1, 2, 3, \cdots)$$

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 모든 항이 양수이므로 $a_1>0$, $r>0$이고,

$$a_1a_3=a_1\times(a_1r^2)=(a_1r)^2=4$$

$a_1r>0$이므로 $a_1r=2$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\frac{a_5}{a_4-3a_6}=\frac{1}{2}$에서 $2a_5=a_4-3a_6$이므로

$$2a_1r^4=a_1r^3-3a_1r^5$$

$$2r=1-3r^2$$

$$3r^2+2r-1=0$$

$$(3r-1)(r+1)=0$$

$r>0$이므로 $r=\frac{1}{3}$

㉠에서 $a_1=6$

따라서 $a_4=a_1r^3=6\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{2}{9}$

답 ②

유제

정답과 풀이 41쪽

5 [23008-0125]

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_2=12,\ a_4=2a_5$$

일 때, a_3의 값은?

① 3 ② 6 ③ 12 ④ 24 ⑤ 48

6 [23008-0126]

모든 항이 실수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_2a_4=\frac{4}{3},\ a_8a_{10}=27$$

일 때, ${a_6}^2$의 값을 구하시오.

8. 등비수열의 합

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

(1) $r\neq1$일 때, $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

(2) $r=1$일 때, $S_n=na$

설명 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1} \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 공비 r를 곱하면

$$rS_n=ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^n \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠에서 ㉡을 변끼리 빼면

$$\begin{array}{rrl} & S_n= & a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1} \\ -) & rS_n= & \quad\ \ ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+ar^n \\ \hline & (1-r)S_n= & a \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\ \ -ar^n \end{array}$$

$$(1-r)S_n=a(1-r^n)$$

따라서

$r\neq1$일 때, $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

$r=1$일 때, ㉠에서 $S_n=\underbrace{a+a+a+\cdots+a}_{n\text{개}}=na$

예 첫째항이 2이고 공비가 3인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합 S_{10}은

$$S_{10}=\frac{2\times(3^{10}-1)}{3-1}=3^{10}-1$$

참고 첫째항이 a, 공비가 r $(r\neq1)$인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{a}{r-1}r^n-\frac{a}{r-1}$$

이때 $\dfrac{a}{r-1}=A$라 하면

$$S_n=Ar^n-A$$

예를 들어 첫째항이 4, 공비가 3인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\frac{4\times(3^n-1)}{3-1}=2\times3^n-2$$

예제 4 등비수열의 합

www.ebsi.co.kr

공비가 음수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1+a_4=1,\ a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=7$$

일 때, $a_1+a_2=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

길잡이 첫째항이 a, 공비가 r $(r\neq1)$인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\,(r<0)$이라 하자.

$a_1+a_4=1$에서 $a_1+a_1r^3=a_1(1+r^3)=1$ ...... ㉠

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=7$에서 $\dfrac{a_1(1-r^6)}{1-r}=7$

이때

$$\frac{a_1(1-r^6)}{1-r}=\frac{a_1(1+r^3)(1-r)(1+r+r^2)}{1-r}=\frac{1\times(1-r)(1+r+r^2)}{1-r}=1+r+r^2$$

이므로 $1+r+r^2=7$에서

$$r^2+r-6=0,\ (r-2)(r+3)=0$$

$r<0$이므로 $r=-3$

$r=-3$을 ㉠에 대입하면

$-26a_1=1$에서 $a_1=-\dfrac{1}{26}$이므로

$$a_1+a_2=-\frac{1}{26}+\left(-\frac{1}{26}\right)\times(-3)=\frac{1}{13}$$

따라서 $p=13$, $q=1$이므로 $p+q=13+1=14$

답 14

유제

정답과 풀이 41쪽

7 [23008-0127]

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_2=\sqrt{2}a_1,\ a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=93\sqrt{2}$$

일 때, a_1의 값은?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

8 [23008-0128]

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$S_2=2,\ S_8-S_4=300$$

일 때, S_6의 값을 구하시오.

Level 1 기초 연습

[23008-0129]

1 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=3$, $a_4=9$일 때, a_8의 값은?

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

[23008-0130]

2 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5-a_3=12$일 때, $a_{10}-a_5$의 값은?

① 15 ② 20 ③ 25 ④ 30 ⑤ 35

[23008-0131]

3 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_2=5$, $a_4-a_5=3$일 때, S_{10}의 값은?

① -55 ② -50 ③ -45 ④ -40 ⑤ -35

[23008-0132]

4 두 수 4와 10 사이에 4개의 실수 x_1, x_2, x_3, x_4를 넣어서 6개의 수가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $x_1+x_2+x_3+x_4$의 값은?

① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

[23008-0133]

5 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면 모든 자연수 n에 대하여

$$S_{n+1}-S_n=-5n+40$$

을 만족시킨다. $a_k<0$일 때, a_1+k의 최솟값은? (단, k는 자연수이다.)

① 42 ② 44 ③ 46 ④ 48 ⑤ 50

[23008-0134]

6 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_2=-5$, $S_3=S_5$일 때, S_n의 최솟값은?

① -20 ② -18 ③ -16 ④ -14 ⑤ -12

[23008-0135]

7 모든 항이 실수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2=3$, $\frac{a_4}{a_1}=8$일 때, a_6의 값은?

① 36 ② 42 ③ 48 ④ 54 ⑤ 60

[23008-0136]

8 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1a_2=12$, $a_5a_6=27$일 때, a_3a_4의 값은?

① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

[23008-0137]

9 모든 항이 음수인 등비수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < a_{n+1}$을 만족시킨다. $\frac{a_2+a_4}{a_3}=\frac{10}{3}$일 때, $\frac{a_6}{a_4}$의 값은?

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ 1 ④ 4 ⑤ 9

[23008-0138]

10 첫째항이 3이고 모든 항이 실수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $8S_6=35S_3$일 때, a_2의 값은?

① $\frac{8}{9}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ 2 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ $\frac{27}{4}$

[23008-0139]

11 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 세 수 S_1, S_2, S_4가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 등비수열 $\{a_n\}$의 공비는?

① $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ② $\frac{-1+\sqrt{6}}{2}$ ③ $\frac{-1+\sqrt{7}}{2}$ ④ $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ⑤ $\frac{1+\sqrt{6}}{2}$

[23008-0140]

12 첫째항이 -2이고 공차가 3인 등차수열을 $\{a_n\}$이라 하자. $b_n=2^{a_n}$이라 할 때,

$b_5+b_6+b_7+b_8+b_9=\frac{2^{10}}{7}(2^m-1)$이다. 자연수 m의 값을 구하시오.

[23008-0141]

1 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2-1=1-a_4$이고 $|a_4-5|=|5-a_6|$일 때, a_1의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

[23008-0142]

2 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$과 첫째항과 공비가 같은 등비수열 $\{b_n\}$이 있다. $a_4=b_4$, $a_6=b_6$일 때, a_2+b_2의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

[23008-0143]

3 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_2a_4-a_1a_3=8,\ a_1+a_2+a_3+a_4=4$$

일 때, $a_1a_2a_3a_4$의 값은?

① 90 ② 95 ③ 100 ④ 105 ⑤ 110

[23008-0144]

4 모든 항이 서로 다른 양수인 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하고 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$S_6=\frac{15}{4}(a_7+a_8+a_9)=1$$

일 때, $\frac{a_1}{r-1}$의 값은?

① $-\frac{9}{5}$ ② $-\frac{3}{5}$ ③ $-\frac{1}{5}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{9}{5}$

[23008-0145]

5 공비가 1보다 큰 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $\frac{S_4}{S_3-S_1}=\frac{13}{6}$일 때, $\frac{a_4}{a_3-a_1}$의 값은?

① $\frac{8}{3}$ ② $\frac{27}{10}$ ③ $\frac{125}{42}$ ④ $\frac{64}{21}$ ⑤ $\frac{125}{36}$

[23008-0146]

6 모든 항이 실수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_2a_4=3,\ a_3a_5=a_3a_6-54$

일 때, a_1a_6의 값은?

① 3 ② $3\sqrt{3}$ ③ 9 ④ $9\sqrt{3}$ ⑤ 27

[23008-0147]

7 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여 $|S_{n+2}-S_n|=|6n-19|$이고 S_n의 최댓값이 존재할 때, a_3의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

[23008-0148]

8 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $b_n=a_n+a_6$이라 하고, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. S_n이 다음 조건을 만족시킬 때, a_6의 값은?

(가) $1\le n\le 14$인 모든 자연수 n에 대하여 $S_{15-n}=S_n$이다.
(나) $S_{16}=40$

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

[23008-0149]

9 공차가 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$과 3 이상의 자연수 k가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 세 수 2, k, $3k-4$가 이 순서대로 등비수열을 이룬다.
(나) 세 수 a_3, a_{k+1}, a_{3k-3}이 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

$a_k^{\,2}>100$일 때, a_2-a_1의 최솟값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

[23008-0150]

10 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $b_n=a_n-|a_n|$이라 하고, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $b_6=a_6$이고 S_n의 최댓값이 -2일 때, S_n의 최솟값은?

① -2 ② -3 ③ -4 ④ -5 ⑤ -6

[23008-0151]

11 첫째항이 2이고 모든 항이 서로 다른 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $S_5=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $0<S_n\leq S_1$이다.
(나) 어떤 자연수 m에 대하여 $|a_m|+|a_{m+2}|=5\times\left|\frac{a_2}{a_1}\right|^m$이다.

[23008-0152]

12 $x\geq0$에서 정의된 함수 $f(x)=|p\cos x+q|$ $(p>0)$에 대하여 $f(0)<f\left(\frac{\pi}{2}\right)$이다. 직선 $y=t$가 곡선 $y=f(x)$와 만나도록 하는 실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 모든 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열한 수열이 등차수열이 되도록 하는 t의 값은 α, β $(\alpha<\beta)$뿐이다. $t=\alpha$, $t=\beta$일 때의 이 등차수열을 각각 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이라 하자. $\alpha+\beta=7$이고 $\frac{f(b_2)}{a_3}=\frac{2}{\pi}$일 때, $5p+4q$의 값은? (단, p, q는 상수이다.)

① 7 ② 11 ③ 15 ④ 19 ⑤ 23

[23008-0153]

1 공차가 자연수인 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 두 집합 A, B는

$A=\{a_k \mid a_k$는 수열 $\{a_n\}$의 항, $1\le a_k\le 20\}$,

$B=\{b_k \mid b_k$는 수열 $\{b_n\}$의 항, k는 $1\le k\le 10$인 자연수$\}$

이다. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차가 각각 d_1, d_2일 때, 다음 조건을 만족시키는 d_1, d_2의 모든 순서쌍 (d_1, d_2)의 개수를 구하시오.

(가) $a_5=b_5=3$	(나) $n(A\cap B)=n(B-A)$

[23008-0154]

2 첫째항이 정수이고 모든 항이 유리수인 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 모든 자연수 n에 대하여 $b_n=a_n+a_{n+1}$이라 하고, 좌표평면 위의 두 점을 $\mathrm{P}_n(n, a_n)$, $\mathrm{Q}_n(n, b_n)$이라 하자. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 b_{10}의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?

(가) $a_2-a_1>0$

(나) 10이 아닌 모든 자연수 k에 대하여 $\angle \mathrm{P}_{12}\mathrm{Q}_{10}\mathrm{Q}_k=\frac{\pi}{2}$이다.

① $\frac{81}{4}$ ② $\frac{165}{8}$ ③ 21 ④ $\frac{171}{8}$ ⑤ $\frac{87}{4}$

[23008-0155]

3 첫째항이 정수이고 모든 항이 서로 다른 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 두 집합 A, B는 다음과 같다.

$A=\{{a_k}^2 \mid a_k$는 수열 $\{a_n\}$의 항, k는 $1\le k\le 10$인 자연수$\}$,

$B=\{(-1)^k a_k \mid a_k$는 수열 $\{a_n\}$의 항, k는 $1\le k\le 10$인 자연수$\}$

집합 A의 원소를 큰 수부터 차례로 α_1, α_2, α_3, $\cdots$, α_{10}이라 하고, 집합 B의 원소를 큰 수부터 차례로 β_1, β_2, β_3, $\cdots$, β_{10}이라 하자. $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^2$, $\beta_2=8$, $\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\beta_1+\beta_2}=4$일 때, $\alpha_1\times\beta_3$의 값을 구하시오.

대표 기출 문제

EBS

출제 경향 등차수열과 등비수열의 두 항 사이의 관계를 이용하여 특정한 항의 값을 구하는 문제, 등차수열과 등비수열의 합을 이용하여 항의 값을 구하는 문제가 출제된다.

2021학년도 대수능 9월 모의평가

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여

$$S_{n+3}-S_n=13\times 3^{n-1}$$

일 때, a_4의 값을 구하시오. [4점]

출제 의도 등비수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 특정한 항의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 $S_{n+3}-S_n=a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}$이므로 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}=13\times 3^{n-1} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

㉠에 $n=1$을 대입하면

$$a_2+a_3+a_4=13$$

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$$a_1r+a_1r^2+a_1r^3=13$$

$$a_1r(1+r+r^2)=13 \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

또 ㉠에 $n=2$를 대입하면

$$a_3+a_4+a_5=13\times 3=39$$

$$a_1r^2+a_1r^3+a_1r^4=39$$

$$a_1r^2(1+r+r^2)=39 \quad \cdots\cdots \text{㉢}$$

㉢÷㉡을 하면

$$\frac{a_1r^2(1+r+r^2)}{a_1r(1+r+r^2)}=\frac{39}{13},\ r=3$$

$r=3$을 ㉡에 대입하면

$$a_1\times 3\times(1+3+9)=13,\ a_1=\frac{1}{3}$$

따라서 $a_4=a_1\times r^3=\frac{1}{3}\times 3^3=9$

답 9

06 수열의 합과 수학적 귀납법

1. 합의 기호 $\sum$

(1) 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 합의 기호 $\sum$를 사용하여

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

와 같이 나타낸다.

(2) 수열 $\{a_n\}$의 제m항부터 제n항까지의 합을 합의 기호 $\sum$를 사용하여

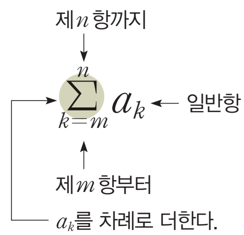
$$a_m+a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_n=\sum_{k=m}^{n}a_k\ (m\le n)$$

과 같이 나타낸다.

이것은 첫째항부터 제n항까지의 합에서 첫째항부터 제$(m-1)$항까지의 합을 뺀 것과 같으므로

$$\sum_{k=m}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{m-1}a_k\ (2\le m\le n)$$

이 성립한다.



예 $5+7+9+11+13+15$에서

① 일반항이 $a_n=2n+3$인 수열의 합으로 생각하면 $a_1=5$, $a_6=15$이므로

$$5+7+9+11+13+15=\sum_{k=1}^{6}(2k+3)$$

② 일반항이 $a_n=2n-1$인 수열의 합으로 생각하면 $a_3=5$, $a_8=15$이므로

$$5+7+9+11+13+15=\sum_{k=3}^{8}(2k-1)=\sum_{k=1}^{8}(2k-1)-\sum_{k=1}^{2}(2k-1)$$

참고 $\sum_{k=1}^{n}a_k$에서 k 대신 다른 문자를 사용해도 그 합은 같다. 즉,

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{j=1}^{n}a_j$$

2. 합의 기호 $\sum$의 성질

(1) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

(2) $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$

(3) $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ (단, c는 상수)

(4) $\sum_{k=1}^{n}c=\underbrace{c+c+c+\cdots+c}_{n\text{개}}=cn$ (단, c는 상수)

설명 (1) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+(a_3+b_3)+\cdots+(a_n+b_n)$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

(3) $\sum_{k=1}^{n}ca_k=ca_1+ca_2+ca_3+\cdots+ca_n=c(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)=c\sum_{k=1}^{n}a_k$

예제 1 합의 기호 $\sum$

수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{5} a_{k+1}=3,\ \sum_{k=1}^{6}(2a_k+3)=8$$

일 때, a_1의 값은?

① -8 ② -5 ③ -2 ④ 1 ⑤ 4

길잡이

(1) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

(2) $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ (단, c는 상수)

풀이

$\sum_{k=1}^{5}a_{k+1}=3$에서

$$\sum_{k=1}^{5}a_{k+1}=\sum_{k=2}^{6}a_k=3 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\sum_{k=1}^{6}(2a_k+3)=8$에서

$$2\sum_{k=1}^{6}a_k+\sum_{k=1}^{6}3=8$$

$$2\left(a_1+\sum_{k=2}^{6}a_k\right)+3\times6=8 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$2(a_1+3)+18=8,\ 2a_1=-16$$

$$a_1=-8$$

답 ①

유제

정답과 풀이 49쪽

1 [23008-0156]

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=4,\ \sum_{k=1}^{9}a_k=\sum_{k=1}^{9}(b_k+1)$$

일 때, $a_{10}-b_{10}$의 값은?

① -5 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 5

2 [23008-0157]

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3=4,\ \sum_{k=1}^{8}a_k=44$$

일 때, $\sum_{k=1}^{8}a_{2k}$의 값을 구하시오.

3. 자연수의 거듭제곱의 합

(1) $\sum_{k=1}^{n} k=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\sum_{k=1}^{n} k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\sum_{k=1}^{n} k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

설명 (2) k에 대한 항등식 $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$의 k에 1, 2, 3, $\cdots$, n을 차례로 대입하면

$k=1$일 때, $2^3-1^3=3\times1^2+3\times1+1$

$k=2$일 때, $3^3-2^3=3\times2^2+3\times2+1$

$k=3$일 때, $4^3-3^3=3\times3^2+3\times3+1$

$\vdots$

$k=n$일 때, $(n+1)^3-n^3=3\times n^2+3\times n+1$

이 n개의 등식을 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}(n+1)^3-1^3&=3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+3(1+2+3+\cdots+n)+1\times n\\&=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\times\frac{n(n+1)}{2}+n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3\sum_{k=1}^{n}k^2&=(n+1)^3-3\times\frac{n(n+1)}{2}-(n+1)\\&=\frac{n+1}{2}\{2(n+1)^2-3n-2\}\\&=\frac{(n+1)(2n^2+n)}{2}\\&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}\end{aligned}$$

따라서 $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) (2)와 같은 방법으로 k에 대한 항등식 $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$을 이용하여

$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$이 성립함을 보일 수 있다.

예 ① $\sum_{k=1}^{5}k=\frac{5\times6}{2}=15$

② $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)&=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\\&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{6}\{(2n+1)+3\}\\&=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\end{aligned}$$

③ $$\begin{aligned}2^3+3^3+4^3+5^3+6^3&=\sum_{k=2}^{6}k^3=\sum_{k=1}^{6}k^3-\sum_{k=1}^{1}k^3\\&=\left(\frac{6\times7}{2}\right)^2-1=441-1=440\end{aligned}$$

예제 2 자연수의 거듭제곱의 합

www.ebsi.co.kr

$\sum_{k=1}^{6}(k-1)^2=\sum_{k=1}^{6}(ak+1)$일 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{5}{3}$ ② 2 ③ $\frac{7}{3}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ 3

길잡이

(1) $\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

풀이

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{6}(k-1)^2&=0+\sum_{k=2}^{6}(k-1)^2\\&=\sum_{k=1}^{5}k^2\\&=\frac{5\times6\times11}{6}=55\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{6}(ak+1)&=a\sum_{k=1}^{6}k+\sum_{k=1}^{6}1\\&=a\times\frac{6\times7}{2}+1\times6\\&=21a+6\end{aligned}$$

$\sum_{k=1}^{6}(k-1)^2=\sum_{k=1}^{6}(ak+1)$에서

$55=21a+6$, $21a=49$

$a=\frac{7}{3}$

답 ③

유제 정답과 풀이 49쪽

3 [23008-0158]

$\sum_{k=1}^{8}\frac{k^3-k}{k+1}$의 값은?

① 162 ② 164 ③ 166 ④ 168 ⑤ 170

4 [23008-0159]

수열 $\{a_n\}$의 일반항이

$$a_n=(-1)^n\times n^2$$

일 때, $\sum_{k=1}^{20}a_k$의 값은?

① 210 ② 214 ③ 218 ④ 222 ⑤ 226

4. 일반항이 분수 꼴인 수열의 합

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

설명 분모가 서로 다른 두 일차식의 곱으로 나타내어진 유리식을 일반항으로 갖는 수열의 합은

$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)\ (A\neq B)$$

임을 이용하여 각 항을 두 개의 항으로 분리하여 구한다.

(1) $\displaystyle\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{(k+1)-k}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$

이므로 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

(2) $\displaystyle\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{(2k+1)-(2k-1)}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

이므로 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

한편, 분모가 서로 다른 두 무리식의 합으로 나타내어진 식을 일반항으로 갖는 수열의 합은 분모를 유리화하여 구한다.

(3) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1})^2-(\sqrt{k})^2}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$

이므로 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

예 ① $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$\displaystyle=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)$

$\displaystyle=1-\frac{1}{11}$

$\displaystyle=\frac{10}{11}$

② $\displaystyle\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{15}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{16}-\sqrt{15})$

$=-1+4$

$=3$

예제 3 일반항이 분수 꼴인 수열의 합

www.ebsi.co.kr

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+1)a_k}=n^2$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{12}a_k=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

길잡이 $\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$ $(A\neq B)$임을 이용한다.

풀이 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+1)a_k}=n^2$에서

(i) $n=1$일 때, $\frac{1}{3a_1}=1$, $a_1=\frac{1}{3}$

(ii) $n\geq 2$일 때

$$\frac{1}{(2n+1)a_n}=n^2-(n-1)^2=2n-1$$

$$a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

(i), (ii)에서 $a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ $(n\geq 1)$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{12}a_k&=\sum_{k=1}^{12}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}\\&=\sum_{k=1}^{12}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\\&=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{23}-\frac{1}{25}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{25}\right)=\frac{12}{25}\end{aligned}$$

따라서 $p=25$, $q=12$이므로 $p+q=25+12=37$

답 37

유제

정답과 풀이 50쪽

5 [23008-0160]

자연수 n에 대하여 x에 대한 이차방정식 $n(n+2)x^2-x-2=0$의 두 실근의 합을 a_n이라 할 때, $90\times\sum_{k=1}^{8}a_k$의 값을 구하시오.

6 [23008-0161]

첫째항이 3이고 공차가 양수 d인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{4}\frac{5}{a_{2k}a_{2k+2}}=1$일 때, d의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

5. 수열의 귀납적 정의

수열 $\{a_n\}$을

(i) 처음 몇 개의 항의 값

(ii) 이웃하는 여러 항 사이의 관계식

으로 정의하는 것을 수열의 귀납적 정의라고 한다.

6. 등차수열의 귀납적 정의

(1) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_1=a,\ a_{n+1}=a_n+d$$

를 만족시키는 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열이다.

(2) 모든 자연수 n에 대하여 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$를 만족시키는 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

예 ① $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n-2\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서

$$a_{n+1}-a_n=-2$$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공차가 -2인 등차수열이다.

즉, $a_n=1+(n-1)\times(-2)=-2n+3$

② $a_1=2,\ a_2=5,\ 2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서

$$a_{n+1}-a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2이고 공차가 $a_2-a_1=5-2=3$인 등차수열이다.

즉, $a_n=2+(n-1)\times3=3n-1$

7. 등비수열의 귀납적 정의

(1) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_1=a,\ a_{n+1}=ra_n$$

을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열이다.

(2) 모든 자연수 n에 대하여 ${a_{n+1}}^2=a_na_{n+2}$를 만족시키는 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

예 ① $a_1=4,\ a_{n+1}=2a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 4이고 공비가 2인 등비수열이다.

즉, $a_n=4\times2^{n-1}=2^{n+1}$

② $a_1=1,\ a_2=-3,\ {a_{n+1}}^2=a_na_{n+2}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공비가 $\dfrac{a_2}{a_1}=-3$인 등비수열이다.

즉, $a_n=1\times(-3)^{n-1}=(-3)^{n-1}$

예제 4 등차수열과 등비수열의 귀납적 정의

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}{}^2+4a_n{}^2=4a_na_{n+1}$$

을 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{8}a_k=51$일 때, a_1+a_2의 값은?

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{4}{5}$ ④ 1 ⑤ $\frac{6}{5}$

길잡이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=ra_n$을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$은 공비가 r인 등비수열이다.

풀이 $a_{n+1}{}^2+4a_n{}^2=4a_na_{n+1}$에서

$$a_{n+1}{}^2-4a_na_{n+1}+4a_n{}^2=0$$
$$(a_{n+1}-2a_n)^2=0$$
$$a_{n+1}=2a_n$$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 공비가 2인 등비수열이다.

$\sum_{k=1}^{8}a_k=\frac{a_1(2^8-1)}{2-1}=255a_1=51$에서 $a_1=\frac{1}{5}$

따라서 $a_2=2a_1=\frac{2}{5}$이므로

$$a_1+a_2=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$

답 ②

유제

정답과 풀이 50쪽

7 [23008-0162]

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=21$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=a_n-4$$

를 만족시킨다. $a_m>0$인 모든 자연수 m의 값의 합은?

① 15 ② 18 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27

8 [23008-0163]

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $a_5=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

(가) $a_2-a_1=1$
(나) 모든 자연수 n에 대하여 좌표평면에서 두 점 (a_n, S_n), (a_{n+1}, S_{n+1})을 지나는 직선의 기울기는 3이다.

8. 귀납적으로 정의된 여러 가지 수열

귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 특정한 항의 값을 구할 때에는 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하여 항의 값을 구한다.

예 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=5$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=\dfrac{n+1}{n}a_n$을 만족시킬 때, a_5의 값을 구해 보자.

$a_1=5$이므로 $a_2=\dfrac{2}{1}\times a_1=2\times5=10$

$a_2=10$이므로 $a_3=\dfrac{3}{2}\times a_2=\dfrac{3}{2}\times10=15$

$a_3=15$이므로 $a_4=\dfrac{4}{3}\times a_3=\dfrac{4}{3}\times15=20$

$a_4=20$이므로 $a_5=\dfrac{5}{4}\times a_4=\dfrac{5}{4}\times20=25$

9. 수학적 귀납법

자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지가 성립함을 보이면 된다.

(i) $n=1$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

이와 같이 자연수 n에 대한 어떤 명제 $p(n)$이 참임을 증명하는 방법을 수학적 귀납법이라고 한다.

예 모든 자연수 n에 대하여

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \qquad \cdots\cdots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하면 다음과 같다.

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=1$, (우변)$=\dfrac{1\times2}{2}=1$이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $(k+1)$을 더하면

$$\begin{aligned}1+2+3+\cdots+k+(k+1)&=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\&=\frac{k+1}{2}(k+2)\\&=\frac{(k+1)(k+2)}{2}\end{aligned}$$

이므로 $n=k+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

참고 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 $n\ge m$ (m은 자연수)인 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지가 성립함을 보이면 된다.

(i) $n=m$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.

(ii) $n=k$ $(k\ge m)$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

예제 5 귀납적으로 정의된 수열

수열 $\{a_n\}$은 $-5<a_1<0$이고 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n}=a_n+2$	(나) $a_{2n+1}=a_{2n}a_{2n+2}$

$a_3=3$일 때, a_9의 값을 구하시오.

길잡이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 특정한 항의 값을 구할 때에는 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하여 항의 값을 구한다.

풀이 조건 (나)에 $n=1$을 대입하면 $a_3=a_2a_4$ …… ㉠

조건 (가)에 $n=1$, $n=2$를 차례로 대입하면

$a_2=a_1+2$, $a_4=a_2+2=(a_1+2)+2=a_1+4$ …… ㉡

$a_3=3$이고 ㉠, ㉡에서

$(a_1+2)(a_1+4)=3$, $a_1^2+6a_1+5=0$, $(a_1+1)(a_1+5)=0$

$-5<a_1<0$이므로 $a_1=-1$

조건 (나)에 $n=4$를 대입하면 $a_9=a_8a_{10}$

$a_4=a_1+4=-1+4=3$이므로 조건 (가), (나)에 의하여

$a_8=a_4+2=3+2=5$

$a_{10}=a_5+2=a_4a_6+2=a_4(a_3+2)+2=3\times(3+2)+2=17$

따라서 $a_9=a_8a_{10}=5\times17=85$

답 85

유제

정답과 풀이 50쪽

9 [23008-0164]

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$a_n+a_{n+1}=2n+1$

을 만족시킨다. $a_3-a_4=1$일 때, a_1의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

10 [23008-0165]

다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{20}a_k$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오.

(가) $a_1=4$이고, 수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 자연수이다.
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $(a_{n+1}-a_n)^2-(a_{n+1}-a_n)-2=0$을 만족시킨다.

예제 6 수학적 귀납법

다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2^k}=8-\frac{n^2+5n+8}{2^n} \quad \cdots\cdots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때

$$(\text{좌변})=\frac{1\times 2}{2}=1,\ (\text{우변})=8-\frac{1^2+5\times 1+8}{2}=8-7=1$$

이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{k(k+1)}{2^k}=8-\frac{m^2+5m+8}{2^m}\text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1}\frac{k(k+1)}{2^k}&=\sum_{k=1}^{m}\frac{k(k+1)}{2^k}+\boxed{\text{(가)}}\\&=8-\frac{\boxed{\text{(나)}}}{2^{m+1}}+\boxed{\text{(가)}}\\&=8-\frac{(m+1)^2+5(m+1)+8}{2^{m+1}}\end{aligned}$$

즉, $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $f(3)\times g(5)$의 값은?

① 130 ② 135 ③ 140 ④ 145 ⑤ 150

길잡이 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지가 성립함을 보이면 된다.

(i) $n=1$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

풀이 (i) $n=1$일 때

$$(\text{좌변})=\frac{1\times 2}{2}=1,\ (\text{우변})=8-\frac{1^2+5\times 1+8}{2}=8-7=1$$

이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{k(k+1)}{2^k}=8-\frac{m^2+5m+8}{2^m}\text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1}\frac{k(k+1)}{2^k}&=\sum_{k=1}^{m}\frac{k(k+1)}{2^k}+\boxed{\frac{(m+1)(m+2)}{2^{m+1}}}\\&=8-\frac{m^2+5m+8}{2^m}+\frac{(m+1)(m+2)}{2^{m+1}}\\&=8-\frac{\boxed{2m^2+10m+16}}{2^{m+1}}+\boxed{\frac{(m+1)(m+2)}{2^{m+1}}}\end{aligned}$$

$$=8-\frac{(2m^2+10m+16)-(m^2+3m+2)}{2^{m+1}}$$
$$=8-\frac{m^2+7m+14}{2^{m+1}}$$
$$=8-\frac{(m+1)^2+5(m+1)+8}{2^{m+1}}$$

즉, $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

따라서 $f(m)=\frac{(m+1)(m+2)}{2^{m+1}}$, $g(m)=2m^2+10m+16$이므로

$$f(3)\times g(5)=\frac{4\times5}{2^4}\times(50+50+16)=\frac{5}{4}\times116=145$$

답 ④

유제

정답과 풀이 51쪽

11

[23008-0166]

다음은 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\times\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}>n^2 \quad \cdots\cdots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=2$일 때

$$(\text{좌변})=(1+\sqrt{2})\times\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=2+\frac{3\sqrt{2}}{2},\ (\text{우변})=4$$

이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=m\ (m\ge2)$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{m}\sqrt{k}\times\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{k}}>m^2$이므로

$$\sum_{k=1}^{m+1}\sqrt{k}\times\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{m}\sqrt{k}\times\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{k}}+\sum_{k=1}^{m}\left(\boxed{\text{(가)}}\right)+1$$
$$>m^2+1+\sum_{k=1}^{m}\left(\boxed{\text{(가)}}\right)$$
$$>m^2+1+\sum_{k=1}^{m}\left(\boxed{\text{(나)}}\right)$$
$$=(m+1)^2$$

즉, $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 식에 $k=4$, $m=8$을 대입한 값을 p, (나)에 알맞은 수를 q라 할 때, $p+q$의 값은?

① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{23}{6}$ ③ $\frac{25}{6}$ ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ $\frac{29}{6}$

Level 1 기초 연습

[23008-0167]

1 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10} a_k=5$, $\sum_{k=1}^{10} a_k^{\ 2}=8$일 때, $\sum_{k=1}^{10} (a_k+1)^2$의 값은?

① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

[23008-0168]

2 $\sum_{k=1}^{6} k^2=\sum_{k=1}^{6} ak$일 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{11}{3}$ ② 4 ③ $\frac{13}{3}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ 5

[23008-0169]

3 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \geq 6$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은?

① 24 ② 35 ③ 48 ④ 63 ⑤ 80

[23008-0170]

4 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=3$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1}-a_k)=2^n+n$$

을 만족시킨다. a_8의 값은?

① 132 ② 134 ③ 136 ④ 138 ⑤ 140

[23008-0171]

5 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $\dfrac{a_2}{b_2}$의 값을 구하시오.

(가) $a_1=b_1$, $a_5=b_5$

(나) 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n=3$, $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=3$이다.

[23008-0172]

6 수열 $\{a_n\}$은 $0<a_1<2$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} -a_n+2 & (0<a_n\leq 1) \\ 2(a_n-1) & (1<a_n<2) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_2=\dfrac{1}{2}$일 때, a_1+a_3의 값은?

① $\dfrac{9}{4}$ ② $\dfrac{19}{8}$ ③ $\dfrac{5}{2}$ ④ $\dfrac{21}{8}$ ⑤ $\dfrac{11}{4}$

[23008-0173]

7 수열 $\{a_n\}$은 $a_1>0$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{1}{a_n} & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ 2a_n & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_9+a_{12}=6$일 때, $\sum\limits_{k=1}^{16} a_k$의 값은?

① 27 ② 28 ③ 29 ④ 30 ⑤ 31

[23008-0174]

8 모든 항이 서로 다른 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 ${a_{n+1}}^2=a_na_{n+2}$를 만족시킨다. $a_1=6$이고

$$\sum_{k=1}^{5} {a_k}^2=2\sum_{k=1}^{5}(a_{2k-1}-a_{2k})$$

일 때, a_3의 값을 구하시오.

[23008-0175]

1 $\sum_{k=1}^{9}\frac{(k+1)^2}{k^2(k+1)}-\sum_{k=1}^{9}\frac{(k-1)^2}{k^2(k+1)}$의 값은?

① 3 ② $\frac{16}{5}$ ③ $\frac{17}{5}$ ④ $\frac{18}{5}$ ⑤ $\frac{19}{5}$

[23008-0176]

2 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=3^n+6$$

을 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{5}a_k=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[23008-0177]

3 공차가 -2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $|a_5|=|a_6|$일 때, $\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{\sqrt{|a_{k+1}|}+\sqrt{|a_k|}}$의 값은?

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

[23008-0178]

4 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_1=1$, $a_2=1$이고, 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{S_{n+1}}{S_n}$을 만족시킬 때, a_8의 값은?

① 8 ② 16 ③ 32 ④ 64 ⑤ 128

[23008-0179]

5 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}-a_n+4 & (a_n\le 0)\\ a_n-2 & (a_n>0)\end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_4+a_5=8$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

[23008-0180]

6 수열 $\{a_n\}$의 일반항이

$$a_n=\frac{n}{2n-1}$$

이고, $\sum_{k=1}^{6} k^2(a_k-a_{k+1})=pa_7$일 때, 상수 p의 값은?

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

[23008-0181]

7 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 x축 위의 점 P_n과 제1사분면 위의 점 Q_n이 있다.

- 점 P_n을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{OP}_n}$인 원은 곡선 $y=\sqrt{x}\ (x>0)$과 점 Q_n에서 만난다.
- 점 Q_n을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}$인 원은 x축과 서로 다른 두 점 P_n, P_{n+1}에서 만난다.

다음은 점 P_1의 좌표가 $(3,\ 0)$일 때, 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 2)$에 대하여 삼각형 ABP_n의 넓이 S_n을 구하는 과정이다. (단, O는 원점이다.)

모든 자연수 n에 대하여 두 점 P_n, Q_n의 x좌표를 각각 a_n, b_n이라 하자.
두 점 O, Q_n은 점 P_n을 중심으로 하는 원 위에 있으므로
$\overline{\mathrm{OP}_n}=\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}$에서

$$b_n=\boxed{\text{(가)}}\times a_n-1$$

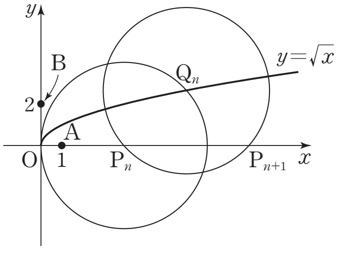
이다. 두 점 P_n, P_{n+1}은 점 Q_n을 중심으로 하는 원 위에 있으므로

$$a_{n+1}=\boxed{\text{(나)}}\times a_n-2$$

이다. 삼각형 ABP_n의 넓이 S_n에 대하여 $\frac{S_{n+1}}{S_n}$은 일정하므로

$$S_n=\boxed{\text{(다)}}$$

이다.



위의 (가), (나)에 알맞은 수를 각각 p, q라 하고, (다)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $p+q+f(6)$의 값은?

① 487 ② 489 ③ 491 ④ 493 ⑤ 495

[23008-0182]

1 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} n+a_n & (a_n<n) \\ a_n-p & (a_n\geq n) \end{cases}$$

을 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 p의 값의 합을 구하시오.

(가) p는 10 이하의 자연수이다.
(나) $a_m=0$, $a_{m+4}=0$인 자연수 m이 존재한다.

[23008-0183]

2 집합 $A=\left\{x \middle| 2\sin^2\frac{\pi x}{2}<1-\sin\frac{\pi x}{2}\right\}$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

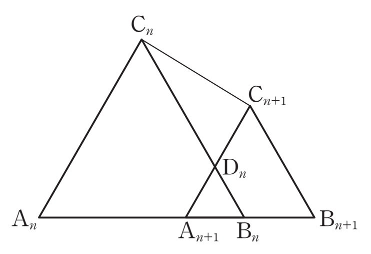
$$f(x)=\begin{cases} 2 & (x\in A) \\ -1 & (x\notin A) \end{cases}$$

가 있다. $\sum_{k=1}^{m}kf(k)\leq\sum_{k=1}^{10}4kf(4k)$를 만족시키는 자연수 m의 최댓값을 M이라 할 때, $M+\sum_{k=1}^{M}kf(k)$의 값은?

① 471 ② 475 ③ 479 ④ 483 ⑤ 487

[23008-0184]

3 한 변의 길이가 1인 정삼각형 $A_1B_1C_1$이 있다. 모든 자연수 n에 대하여 선분 B_nC_n을 2 : 5로 내분하는 점을 D_n, 점 D_n을 지나고 선분 A_nC_n에 평행한 직선이 선분 A_nB_n과 만나는 점을 A_{n+1}이라 하자. 다음 조건을 만족시키도록 삼각형 $A_nB_nC_n$의 외부에 직선 $A_{n+1}B_n$ 위의 점 B_{n+1}과 직선 $A_{n+1}D_n$ 위의 점 C_{n+1}을 잡는다.



(가) 삼각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$은 정삼각형이다.
(나) 세 삼각형 $A_{n+1}B_nD_n$, $C_nD_nC_{n+1}$, $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$의 넓이는 이 순서대로 등차수열을 이룬다.
(다) $\overline{A_{n+1}B_n}<\overline{B_nB_{n+1}}$

$49\times\overline{A_1B_3}$의 값을 구하시오. (단, 모든 자연수 n에 대하여 선분 C_nC_{n+1}은 직선 A_nB_n과 만나지 않는다.)

대표 기출 문제

출제 경향 합의 기호 $\sum$의 성질이나 자연수의 거듭제곱의 합을 이용하여 수열의 합을 구하는 문제, 수열의 귀납적 정의를 이용하여 항의 값을 구하는 문제가 출제된다.

2022학년도 대수능 9월 모의평가

수열 $\{a_n\}$은 $|a_1| \le 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} -2a_n-2 & \left(-1\le a_n<-\frac{1}{2}\right) \\ 2a_n & \left(-\frac{1}{2}\le a_n\le\frac{1}{2}\right) \\ -2a_n+2 & \left(\frac{1}{2}<a_n\le 1\right) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_5+a_6=0$이고 $\sum_{k=1}^{5} a_k>0$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① $\frac{9}{2}$　② 5　③ $\frac{11}{2}$　④ 6　⑤ $\frac{13}{2}$

출제 의도 수열의 귀납적 정의를 이용하여 조건을 만족시키는 첫째항을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 $-1\le a_n<-\frac{1}{2}$이면 $a_{n+1}=-2a_n-2$, 즉 $a_n=-\frac{1}{2}a_{n+1}-1$ …… ㉠

$-\frac{1}{2}\le a_n\le\frac{1}{2}$이면 $a_{n+1}=2a_n$, 즉 $a_n=\frac{1}{2}a_{n+1}$ …… ㉡

$\frac{1}{2}<a_n\le 1$이면 $a_{n+1}=-2a_n+2$, 즉 $a_n=-\frac{1}{2}a_{n+1}+1$ …… ㉢

㉠에서 $a_6=-2a_5-2$이면 $a_5+a_6=0$에서 $a_5=-2$이고,

이것은 $-1\le a_5<-\frac{1}{2}$을 만족시키지 않는다.

㉡에서 $a_6=2a_5$이면 $a_5+a_6=0$에서 $a_5=0$

㉢에서 $a_6=-2a_5+2$이면 $a_5+a_6=0$에서 $a_5=2$이고,

이것은 $\frac{1}{2}<a_5\le 1$을 만족시키지 않는다.

그러므로 $a_5=0$이다.

이때 ㉠에서 $a_4=-1$, ㉡에서 $a_4=0$, ㉢에서 $a_4=1$

같은 방법으로 항의 값을 구할 때 $\sum_{k=1}^{5} a_k>0$을 만족시키는 항의 값은 오른쪽 표와 같다.

따라서 모든 a_1의 값의 합은 $\frac{9}{2}$이다.

답 ①

<table>
<tr><th>a_5</th><th>a_4</th><th>a_3</th><th>a_2</th><th>a_1</th></tr>
<tr><td rowspan="11">0</td><td>-1</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">1</td><td rowspan="4">$\frac{1}{2}$</td><td rowspan="2">$\frac{1}{4}$</td><td>$\frac{1}{8}$</td></tr>
<tr><td>$\frac{7}{8}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\frac{3}{4}$</td><td>$\frac{3}{8}$</td></tr>
<tr><td>$\frac{5}{8}$</td></tr>
<tr><td rowspan="6">0</td><td>-1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{1}{4}$</td></tr>
<tr><td>$\frac{3}{4}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">0</td><td>-1</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>$\frac{1}{2}$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td></tr>
</table>

고2~N수 수능 집중 로드맵

수능 입문	기출 / 연습	연계+연계 보완	고난도	모의고사
윤혜정의 개념/패턴의 나비효과 수능 감(感)잡기 수능특강 Light 강의노트 수능개념	윤혜정의 기출의 나비효과 수능 기출의 미래 수능 기출의 미래 미니모의고사 수능특강Q 미니모의고사	수능연계교재의 국어 어휘 수능연계교재의 VOCA 1800 수능연계 기출 Vaccine VOCA 연계 감수 수능특강 감수 수능완성 수능특강 사용설명서 수능특강 연계 기출 수능 영어 간접연계 서치라이트 수능완성 사용설명서	수능연계완성 3/4주 특강 고난도·신유형 박봄의 사회 · 문화 표 분석의 패턴	FINAL 실전모의고사 만점마무리 봉투모의고사 고난도 시크릿X 봉투모의고사 수능 싱크로 100% 프리미엄 봉투모의고사

구분	시리즈명	특징	수준	영역
수능 입문	윤혜정의 개념/패턴의 나비효과	윤혜정 선생님과 함께하는 수능 국어 개념/패턴 학습		국어
	수능 감(感) 잡기	동일 소재 · 유형의 내신과 수능 문항 비교로 수능 입문		국/수/영
	수능특강 Light	수능 연계교재 학습 전 연계교재 입문서		국/영
	수능개념	EBSi 대표 강사들과 함께하는 수능 개념 다지기		전 영역
기출/연습	윤혜정의 기출의 나비효과	윤혜정 선생님과 함께하는 까다로운 국어 기출 완전 정복		국어
	수능 기출의 미래	올해 수능에 딱 필요한 문제만 선별한 기출문제집		전 영역
	수능 기출의 미래 미니모의고사	부담없는 실전 훈련, 고품질 기출 미니모의고사		국/수/영
	수능특강Q 미니모의고사	매일 15분으로 연습하는 고품격 미니모의고사		전 영역
연계 + 연계 보완	수능특강	최신 수능 경향과 기출 유형을 분석한 종합 개념서		전 영역
	수능특강 사용설명서	수능 연계교재 수능특강의 지문 · 자료 · 문항 분석		국/영
	수능특강 연계 기출	수능특강 수록 작품 · 지문과 연결된 기출문제 학습		국/영
	수능완성	유형 분석과 실전모의고사로 단련하는 문항 연습		전 영역
	수능완성 사용설명서	수능 연계교재 수능완성의 국어 · 영어 지문 분석		국/영
	수능 영어 간접연계 서치라이트	출제 가능성이 높은 핵심만 모아 구성한 간접연계 대비 교재		영어
	수능연계교재의 국어 어휘	수능 지문과 문항 이해에 필요한 어휘 학습서		국어
	수능연계교재의 VOCA 1800	수능특강과 수능완성의 필수 중요 어휘 1800개 수록		영어
	수능연계 기출 Vaccine VOCA	수능-EBS 연계 및 평가원 최다 빈출 어휘 선별 수록		영어
고난도	수능연계완성 3/4주 특강	단기간에 끝내는 수능 킬러 문항 대비서		국/수/영/과
	박봄의 사회 · 문화 표 분석의 패턴	박봄 선생님과 사회 · 문화 표 분석 문항의 패턴 연습		사회탐구
모의고사	FINAL 실전모의고사	수능 동일 난도의 최다 분량, 최다 과목 모의고사		전 영역
	만점마무리 봉투모의고사	실제 시험지 형태와 OMR 카드로 실전 훈련 모의고사		전 영역
	고난도 시크릿X 봉투모의고사	제대로 어려운 최고난도 모의고사		국/수/영
	수능 싱크로 100% 프리미엄 봉투모의고사	수능 직전에 만나는, 수능과 가장 가까운 고품격 프리미엄 모의고사		국/수/영