II_4. 명제와 조건

[10공수2-02-04] 명제와 조건의 뜻을 알고,
'모든', '어떤'을 포함한 명제를 이해하고 설명할 수 있다.

A : 명제와 조건의 뜻을 이해하고 이를 설명할 수 있으며,
'모든', '어떤'을 포함한 명제의 참, 거짓을 판별하고
그 이유를 설명할 수 있다.

B : 명제와 조건의 뜻을 알고 이를 설명할 수 있으며,
'모든', '어떤'을 포함한 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있다.

C : 명제와 조건의 뜻을 알고, 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있다.

D : 명제의 뜻을 알고, 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있다.

E : 간단한 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있다.

II_5. 명제의 역과 대우

[10공수2-02-05] 명제의 역과 대우를 이해하고
설명할 수 있다.

A : 명제의 역과 대우를 이해하고 설명할 수 있으며,
명제와 그 대우의 참, 거짓이 일치함을 이해한다.

B : 명제의 역과 대우를 이해하고,
명제와 그 대우의 참, 거짓이 일치함을 안다.

C : 명제의 역과 대우를 말할 수 있다.

D : 간단한 명제의 역과 대우를 말할 수 있다.

E : 간단한 명제의 역을 말할 수 있다.

II_6. 충분조건과 필요조건

[10공수2-02-06] 충분조건과 필요조건을 이해하고 판단할 수 있다.

A, B : 충분조건과 필요조건을 진리집합의 포함관계와 연결하여 이해하고 판단할 수 있다.

C, D : 충분조건과 필요조건을 알고 판단할 수 있다.

E : 간단한 예를 통해 충분조건과 필요조건을 구분할 수 있다.

1 명제와 조건

(1) 명제 : 참인지 거짓인지를 명확하게 판별할 수 있는 문장이나 식

(2) 조건 : 변수의 값에 따라 참, 거짓을 판별할 수 있는 문장이나 식

2 명제와 조건의 부정

(1) 부정 : 명제 p에 대하여 'p가 아니다.'를 p의 '부정'이라 하고, $\sim p$로 나타낸다.

(2) 두 조건 p, q에 대하여

① $\sim(p$ 또는 $q) \Leftrightarrow \sim p$이고 $\sim q$

② $\sim(p$이고 $q) \Leftrightarrow \sim p$ 또는 $\sim q$

✡ 부정의 예

(1) 크다($>$) $\xleftrightarrow{\text{부정}}$ 작거나 같다($\leq$)

(2) 작다($<$) $\xleftrightarrow{\text{부정}}$ 크거나 같다($\geq$)

(3) 같다($=$) $\xleftrightarrow{\text{부정}}$ 같지 않다($\neq$)

(4) 이고 $\xleftrightarrow{\text{부정}}$ 또는

(5) 모든 $\xleftrightarrow{\text{부정}}$ 어떤

(6) 적어도 하나는 $\cdots$ 이다. $\xleftrightarrow{\text{부정}}$ 모두 $\cdots$ 가 아니다.

3 조건과 진리집합

(1) 진리집합 : 전체집합 U의 원소 중에서 조건 p를 만족시키는 모든 원소의 집합을 조건 p의 '진리집합'이라 하고 대문자 P로 나타낸다.

(2) 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때

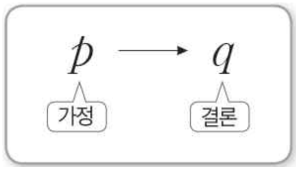
① 조건 $\sim p$의 진리집합 : P^C

② 조건 'p 또는 q'의 진리집합 : $P \cup Q$

③ 조건 'p 이고 q'의 진리집합 : $P \cap Q$

$\boxed{4}$ 명제 $p \to q$

(1) 두 조건 p, q로 이루어진 명제 'p이면 q이다.'를 '$p \to q$'로 나타내고, p를 '가정', q를 '결론'이라 한다.



① 명제 $p \to q$가 참일 때 : $p \Rightarrow q$

② 명제 $p \to q$가 거짓일 때 : $p \nRightarrow q$

③ 명제 $p \to q$, $q \to p$가 모두 참일 때 : $p \Leftrightarrow q$

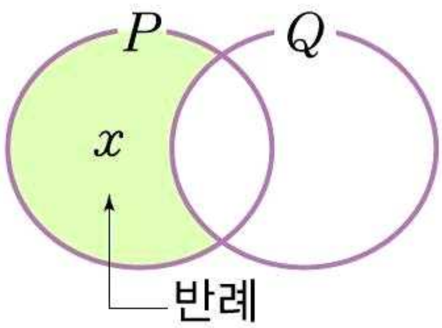
(2) 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때

① 명제 $p \to q$가 참이다. $\Leftrightarrow P \subset Q$

② 명제 $p \to q$가 거짓이다. $\Leftrightarrow P \not\subset Q$

✡ 명제 $p \to q$의 거짓의 증명

명제 $p \to q$가 거짓임을 보이려면 $x \in P$이지만 $x \notin Q$인 x를 찾으면 된다. 이러한 x를 '반례(counterexample)'라 한다. $\therefore\ x \in P \cap Q^C$



5 '모든', '어떤'이 있는 명제

전체집합 U에 대하여 조건 $p(x)$의 진리집합을 P라 할 때

(1) '모든', '어떤'이 있는 명제의 참, 거짓 판단

① $P=U$ $\Leftrightarrow$ '모든 x에 대하여 $p(x)$이다.'는 참이다.

② $P \neq \varnothing$ $\Leftrightarrow$ '어떤 x에 대하여 $p(x)$이다.'는 참이다.

(2) '모든', '어떤'이 있는 명제의 부정

① '모든 x에 대하여 $p(x)$'의 부정

$\Leftrightarrow$ 어떤 x에 대하여 $\sim p(x)$

$\Leftrightarrow$ p가 아닌 x가 있다.

② '어떤 x에 대하여 $p(x)$'의 부정

$\Leftrightarrow$ '모든 x에 대하여 $\sim p(x)$'

$\Leftrightarrow$ p인 x가 없다.

✡ '모든'이나 '어떤'의 다양한 표현

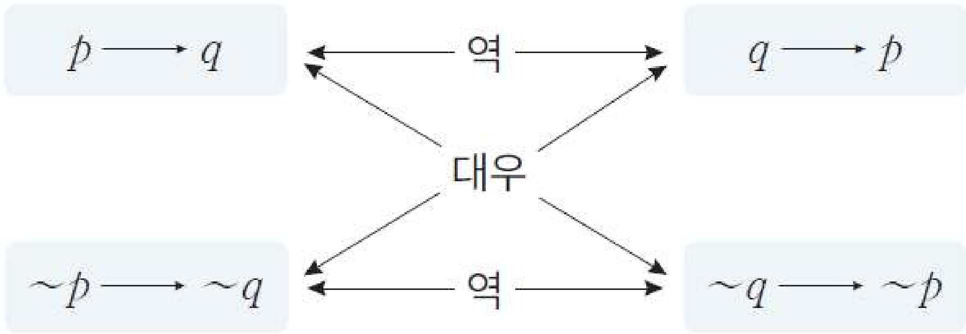
(1) '모든 x에 대하여(for all x)'와 같은 표현은 '모든 x에 대하여(for every x)', '각각의 x에 대하여(for each x)', '임의의 x에 대하여(for arbitrary x)', '어떤 x에 대하여도(for any x)' 등이 있다. 이때 '어떤 x에 대하여도'는 '어떤 x에 대하여'가 아닌 '모든 x에 대하여'와 같은 뜻임을 유의하도록 한다.

(2) '어떤 x에 대하여(for some x)'와 같은 표현은 '하나의 x에 대하여(for an x)', '적어도 하나의 x에 대하여(for at least one x)', '$\cdots$ 인 x가 있다.(there is an x)', '$\cdots$ 인 x가 존재한다.(there exists an x)' 등이 있다.

6 명제의 역, 대우

(1) 명제의 역, 대우

전체집합 U에서의 조건 p, q로 이루어진 명제 $p \rightarrow q$에 대하여 $q \rightarrow p$를 '역', $\sim q \rightarrow \sim p$를 '대우'라 한다.



(2) 명제와 대우의 관계

① 명제 $p \rightarrow q$가 참이다. $\Leftrightarrow$ 대우 $\sim q \rightarrow \sim p$가 참이다.

② 명제 $p \rightarrow q$가 거짓이다. $\Leftrightarrow$ 대우 $\sim q \rightarrow \sim p$가 거짓이다.

✡ 명제의 성질

(1) 명제 $p \rightarrow q$가 참이라 해도 역 $q \rightarrow p$가 반드시 참인 것은 아니다.

(2) 명제 $p \rightarrow q$와 $q \rightarrow r$이 참이면 명제 $p \rightarrow r$도 참이다.

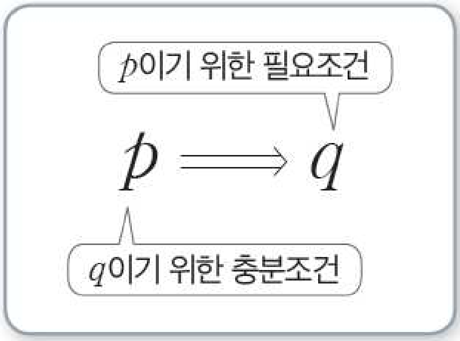
$\boxed{7}$ 충분조건, 필요조건, 필요충분조건

(1) 충분조건과 필요조건

명제 $p \to q$가 참일 때, 즉 $p \Rightarrow q$이면

p는 q이기 위한 '충분(출발)조건',

q는 p이기 위한 '필요(피)조건'이다.



(2) 필요충분조건

$p \Rightarrow q$이고 $q \Rightarrow p$, 즉 $p \Leftrightarrow q$이면 p는 q이기 위한 '필요충분조건', q는 p이기 위한 '필요충분조건'이다.

(3) 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때

① $P \subset Q$ $\Leftrightarrow$ p는 q이기 위한 충분조건

$\Leftrightarrow$ q는 p이기 위한 필요조건

② $P = Q$ $\Leftrightarrow$ p와 q는 서로 필요충분조건