Ⅰ_3. 다항식의 인수분해

[10공수1-01-03] 다항식의 인수분해를 할 수 있다.

A, B : 다양한 방법으로 다항식의 인수분해를 할 수 있다.
C, D : 인수분해 공식을 이용하여
다항식의 인수분해를 할 수 있다.
E : 안내된 절차에 따라 간단한 다항식의 인수분해를 할 수 있다.

1 인수분해의 뜻

하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타내는 것

$$x^2+3x+2 \underset{\text{전개}}{\overset{\text{인수분해}}{\rightleftarrows}} \underbrace{(x+1)(x+2)}_{\text{인수}}$$

✡ 인수분해에서 수의 범위

인수분해는 아무 조건이 없으면 계수가 유리수인 범위에서 인수분해한다.

예를 들어, '계수가 실수인 범위까지 인수분해하시오.'라고 할 때만 $x^2-2=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$로 인수분해한다.

2 인수분해 공식 ❶

(0) $ma + mb + mc = m(a + b + c)$

(1) $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2,\ a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

(2) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

(3) $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$

(4) $acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$

(5) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a + b + c)^2$

(6) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$

$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$

(7) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

2 인수분해 공식 ❷

(8) $x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x + abc$

$= (x + a)(x + b)(x + c)$

(9) $a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$

(10) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$= (a + b + c)\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca\right)$

(11) 교대식

$ab(a - b) + bc(b - c) + ca(c - a)$

$= a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$

$= -\left\{a\left(b^2 - c^2\right) + b\left(c^2 - a^2\right) + c\left(a^2 - b^2\right)\right\}$

$= -(a - b)(b - c)(c - a)$

[2] 인수분해 공식 ❸

✡ 곱셈 공식의 변형을 이용한 인수분해

① $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$

$= (a+b)(b+c)(c+a)$

② $(a+b)(b+c)(c+a)+abc$

$= (a+b+c)(ab+bc+ca)$

③ $a+b+c=0$이면

$a^3+b^3+c^3=3abc$

[3] 복잡한 식의 인수분해 ❶

(1) 치환을 이용한 인수분해

① 공통부분이 있을 경우, (공통부분) $= t$로 치환하여 인수분해한다.

② 공통부분이 없을 때는 공통부분이 생기도록 변형한 후 치환하여 인수분해한다.

(2) 복이차식의 인수분해(x^4+ax^2+b 꼴의 식)

① 상수항이 제곱수가 아니면 $\Rightarrow$ $x^2=t$로 치환

② 상수항이 제곱수이면 $\Rightarrow$ A^2-B^2 꼴로 변형

3 복잡한 식의 인수분해 ❷

(3) 여러 개의 문자가 있는 식의 인수분해

① 문자 중에서 차수가 가장 낮은 문자에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해한다.

② 차수가 같으면 어느 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해한다.

✡ x^n-1, x^n+1 꼴의 인수분해

① n이 자연수일 때,

$$x^n-1=(x-1)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots+x+1\right)$$

② n이 홀수일 때,

$$x^n+1=(x+1)\left(x^{n-1}-x^{n-2}+x^{n-3}-\cdots-x+1\right)$$

4 인수정리를 이용한 인수분해

삼차 이상인 다항식 $f(x)$에 대하여

(1) 인수정리 : $f(\alpha)=0$이 되는 α를 찾는다.

α의 값은 $\pm\dfrac{(\text{상수항의 약수})}{(\text{최고차항의 계수의 약수})}$ 중에서 찾는다.

(2) 조립제법을 사용하여 $f(x)=(x-\alpha)Q(x)$ 꼴로 나타낸다.

(3) 몫 $Q(x)$에 위의 순서를 다시 적용한다.

예 $f(x)=x^4+2x^3+x^2-2x-2$

$f(1)=0$, $f(-1)=0$

$\therefore\ f(x)=(x-1)(x+1)$
$\times\left(x^2+2x+2\right)$

1	1	2	1	−2	−2
		1	3	4	2
−1	1	3	4	2	0
		−1	−2	−2	
	1	2	2	0	

5 공통인수

(1) 공통인수 : 두 개 이상의 다항식이 공통으로 가지는 인수를 그 다항식의 ‘공통인수’라 한다.

(2) 공통인수의 성질 : 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$가 공통인수 $G(x)$를 가지면 두 다항식을 더하거나 빼서 만든 다항식도 $G(x)$를 인수고 갖는다.

즉, $f(x)=AG(x)$, $g(x)=BG(x)$이면

① $f(x)+g(x)=(A+B)G(x)$

② $f(x)-g(x)=(A-B)G(x)$