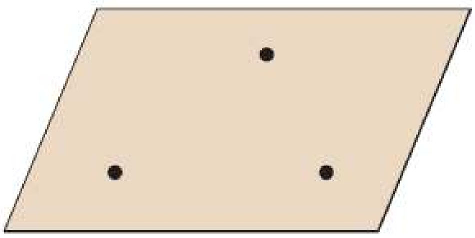
Ⅲ_1. 공간도형

[12기하03-01] 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계에 대한 간단한 증명을 할 수 있다.
[12기하03-02] 삼수선의 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
[12기하03-03] 정사영의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.

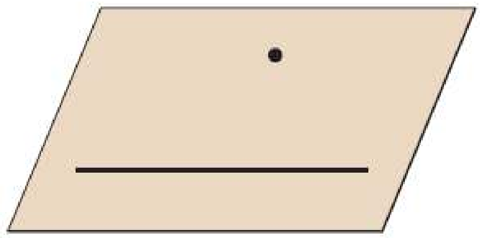
☐1 공간에서 직선과 평면의 위치 관계 ❶

(1) 평면의 결정 조건

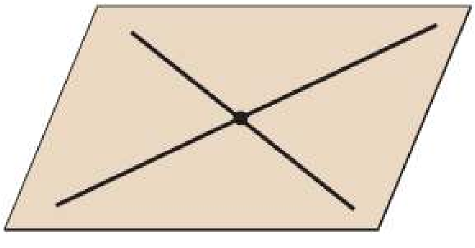
① 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점



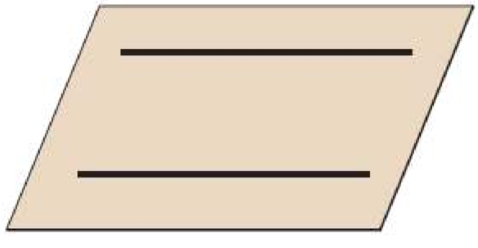
② 한 직선과 그 위에 있지 않은 한 점



③ 한 점에서 만나는 두 직선



④ 평행한 두 직선



① 공간에서 직선과 평면의 위치 관계 ❷

✡ 점과 직선의 결정 조건

① 점의 결정 조건

㉠ 만나는 서로 다른 두 직선은 하나의 점을 결정한다.

㉡ 한 평면과 그 평면에 포함되지도 않고 평행하지도 않은 직선은 하나의 점을 결정한다.

㉢ 교선이 평행하지 않은 서로 다른 세 평면은 하나의 점을 결정한다.

② 직선의 결정 조건

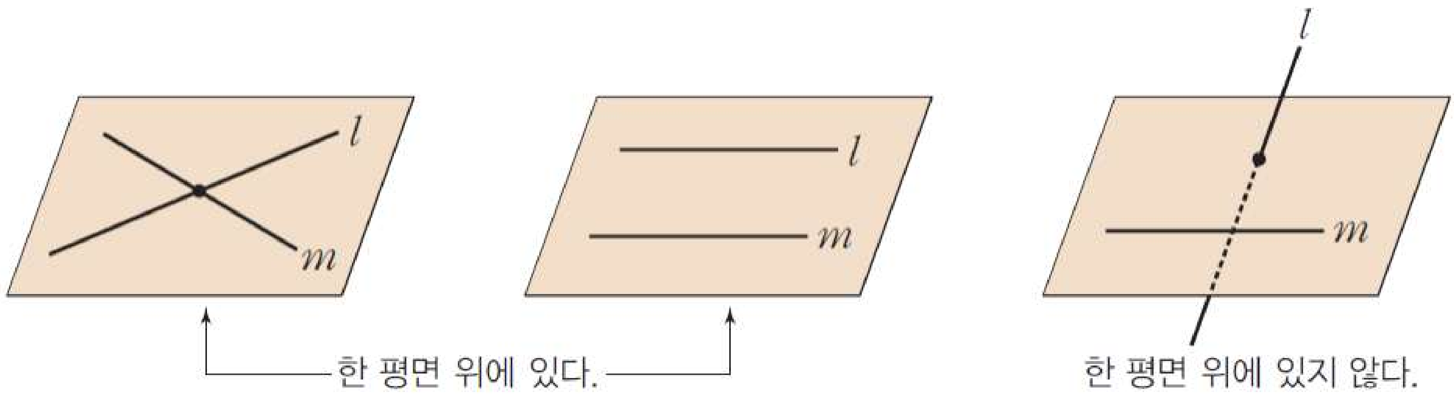
㉠ 서로 다른 두 점은 하나의 직선을 결정한다.

㉡ 만나는 서로 다른 두 평면은 하나의 직선을 결정한다.

① 공간에서 직선과 평면의 위치 관계 ❸

(2) 서로 다른 두 직선의 위치 관계

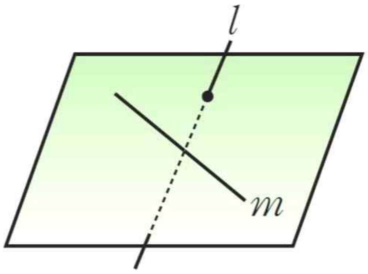
① 한 점에서 만난다. ② 평행하다. ③ 꼬인 위치에 있다.



☑ 두 직선 l과 m이 한 평면 위에 있고 서로 만나지 않을 때 '두 직선 l과 m은 평행하다'고 하고, 이것을 기호로 $l \,/\!/\, m$과 같이 나타낸다.

① 공간에서 직선과 평면의 위치 관계 ❹

☑ 꼬인 위치



한 평면 위에 있지 않다.

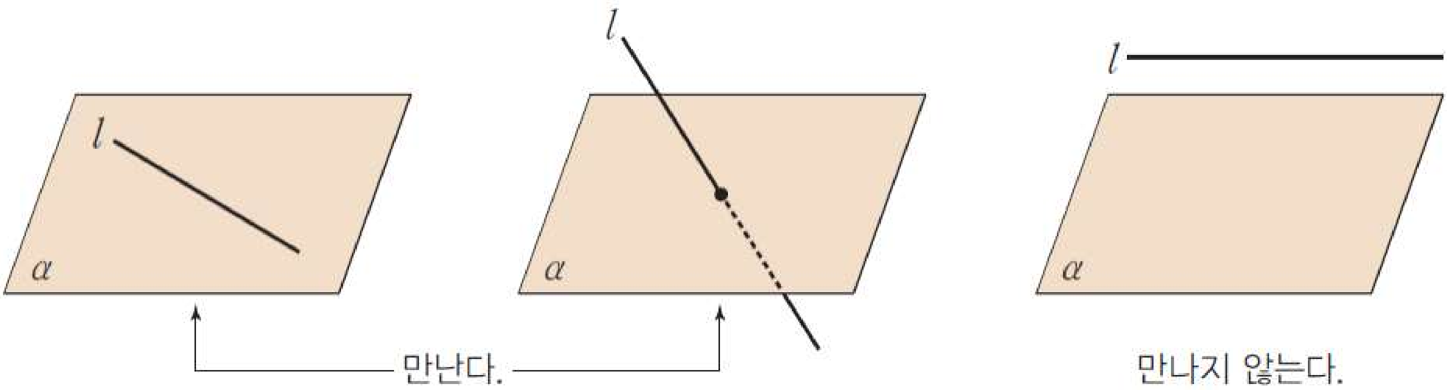
평면에서 만나지 않는 두 직선은 서로 평행하지만, 공간에서 만나지 않는 두 직선은 평행하거나 꼬인 위치에 있다.

즉, 공간에서 두 직선이 서로 만나지도 않고 평행하지도 않은 위치에 있을 때, 이 두 직선은 '꼬인 위치에 있다'고 한다. 두 직선이 꼬인 위치에 있다는 것이 두 직선이 서로 꼬여 있다는 것은 아니다. 실제로는 두 직선이 서로 평행하지도 않고 서로 비스듬하게 위치하고 있다. 꼬인 위치를 영어로 'skew position'이라 하는데 'skew'는 '비스듬하다'라는 뜻으로, 꼬인 위치는 '비스듬한 위치'를 의미한다.

① 공간에서 직선과 평면의 위치 관계 ❺

(3) 직선과 평면의 위치 관계

① 직선이 평면에 포함된다. ② 한 점에서 만난다. ③ 평행하다.

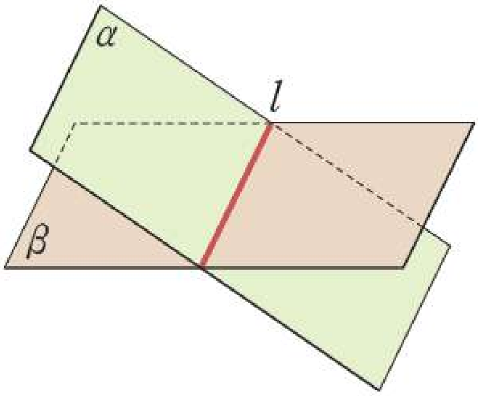


☑ 직선 l과 평면 α가 서로 만나지 않을 때 '직선 l과 평면 α는 평행하다'고 하고, 이것을 기호로 $l \,/\!/\, \alpha$와 같이 나타낸다.

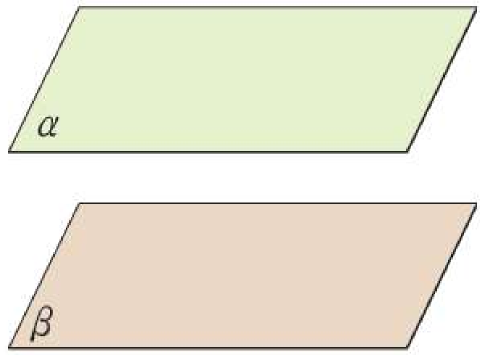
☐1 공간에서 직선과 평면의 위치 관계 ❻

(4) 서로 다른 두 평면의 위치 관계

① 만난다.



② 평행하다.



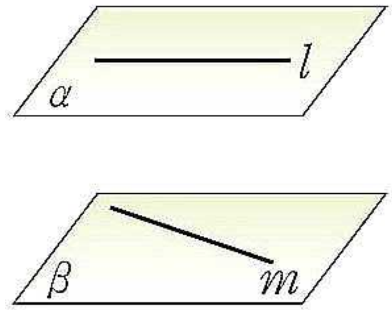
☑ 서로 다른 두 평면이 만날 때 두 평면의 공통부분은 직선이고, 이 직선을 두 평면의 '교선'이라 한다.

☑ 서로 다른 두 평면 α, β가 서로 만나지 않을 때 '두 평면 α, β는 평행하다'고 하고, 기호로 $\alpha /\!/ \beta$와 같이 나타낸다.

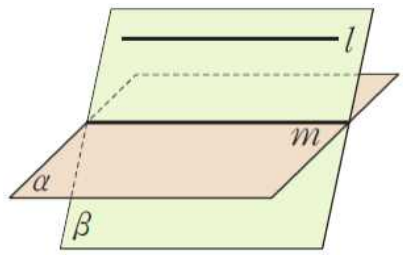
☐2 공간에서 직선과 평면의 평행 ❶

(1) 두 직선 l, m이 서로 평행할 때, 직선 l을 포함하고 직선 m을 포함하지 않는 모든 평면은 직선 m과 평행하다.

(2) 두 평면 α, β가 서로 평행할 때, 평면 α 위에 있는 모든 직선은 평면 β와 평행하다.

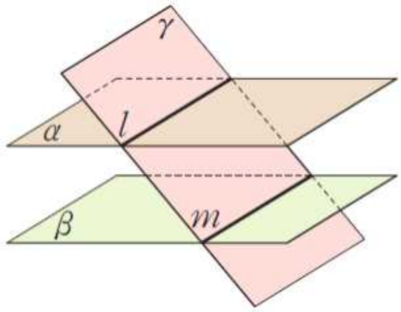


(3) 직선 l과 평면 α가 서로 평행할 때, 직선 l을 포함하는 평면과 평면 α의 교선은 직선 l과 평행하다.

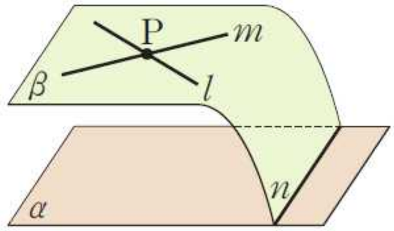


$\boxed{2}$ 공간에서 직선과 평면의 평행 ❷

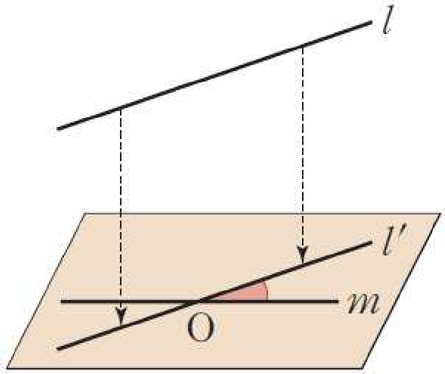
(4) 두 평면 α, β가 서로 평행할 때,
두 평면 α, β가 평면 γ와 만나서 생기는 두 교선은 서로 평행하다.



(5) 한 점에서 만나는 두 직선 l, m이 각각 평면 α와 평행할 때, 두 직선 l, m으로 결정되는 평면은 평면 α와 평행하다.



$\boxed{3}$ 공간에서 두 직선이 이루는 각



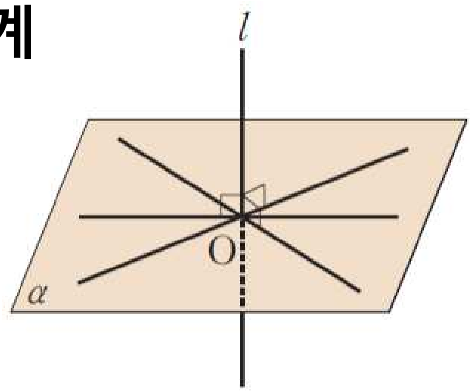
두 직선 l, m이 꼬인 위치에 있을 때, 직선 m 위에 한 점 O를 잡고, 점 O를 지나고 직선 l에 평행한 직선 l'을 그으면 두 직선 l', m은 점 O에서 만나므로 한 평면을 결정한다. 이때 두 직선 l', m이 이루는 각을 '두 직선 l, m이 이루는 각'이라 한다.

$$\angle(l,\, m) = \angle(l',\, m)$$

☑ ① 일반적으로 두 직선이 이루는 각의 크기는 두 각 중 크기가 크지 않은 것을 생각한다.

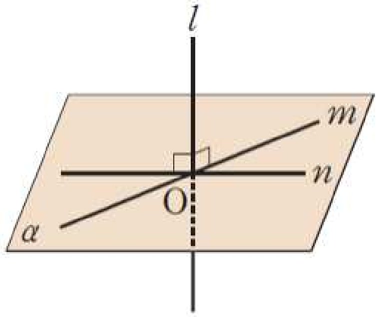
② 두 직선이 이루는 각이 직각일 때 '두 직선 l과 m은 수직'이라 하고, 기호로 $l \perp m$과 같이 나타낸다.

4 공간에서 직선과 평면의 수직 관계

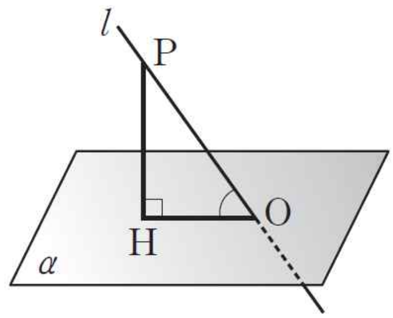


공간에서 직선 l과 평면 α 위의 모든 직선이 수직일 때, '직선 l과 평면 α는 서로 수직'이라 하고, 기호로 $l \perp \alpha$와 같이 나타낸다. 이때 직선 l을 평면 α의 '수선', 직선 l과 평면 α가 만나는 점 O를 '수선의 발'이라 한다.

☑ 직선 l이 평면 α 위의 평행하지 않은 서로 다른 두 직선과 각각 수직이면 $l \perp \alpha$이다.



5 공간에서 직선과 평면이 이루는 각



직선 l이 평면 α와 점 O에서 만나고 수직이 아닐 때, 점 O가 아닌 직선 l 위의 임의의 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 하자.

이때 $\angle$POH를 '직선 l과 평면 α가 이루는 각'이라 한다.

☑① 직선 l과 평면 α가 이루는 각의 크기는 직선 l과 직선 OH가 이루는 각의 크기와 같다.

② 점 O가 점 P의 수선의 발 H와 일치하면 직선 l과 평면 α는 서로 수직이다.

③ 직선 l이 평면 α와 평행하면 직선 l과 평면 α가 이루는 각의 크기는 0이다.

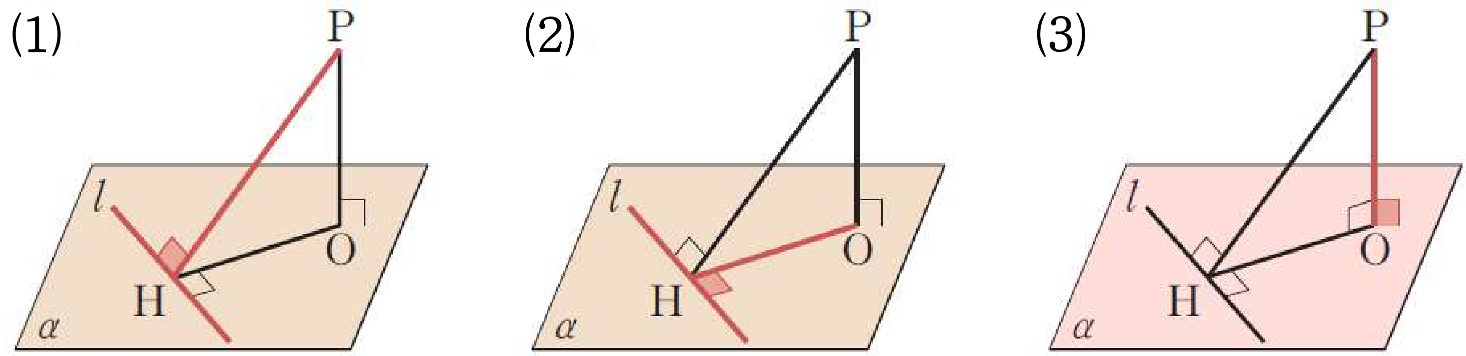
$\boxed{6}$ 삼수선의 정리 ❶

평면 α 위에 있지 않은 점 P와 평면 α 위의 점 O, 점 O를 지나지 않는 평면 α 위의 직선 l, 직선 l 위의 점 H에 대하여 다음 세 가지 성질이 성립하고, 이를 '삼수선의 정리'라 한다.

(1) $\overline{PO} \perp \alpha$, $\overline{OH} \perp l$이면 $\overline{PH} \perp l$

(2) $\overline{PO} \perp \alpha$, $\overline{PH} \perp l$이면 $\overline{OH} \perp l$

(3) $\overline{PH} \perp l$, $\overline{OH} \perp l$, $\overline{PO} \perp \overline{OH}$이면 $\overline{PO} \perp \alpha$



$\boxed{6}$ 삼수선의 정리 ❷

☑ (1) $\overline{PO} \perp \alpha$이므로 직선 PO는 평면 α 위의 모든 직선과 수직이고 직선 l이 평면 α 위에 있으므로 $\overline{PO} \perp l$이다. 또 $\overline{OH} \perp l$이므로 직선 l은 직선 PO와 직선 OH를 포함하는 평면 PHO와 수직이다. 즉, 직선 l은 평면 PHO 위의 모든 직선과 수직이고 직선 PH가 평면 PHO 위에 있으므로 $\overline{PH} \perp l$이다.

(2) $\overline{PO} \perp \alpha$이므로 직선 PO는 평면 α 위의 모든 직선과 수직이고 직선 l이 평면 α 위에 있으므로 $\overline{PO} \perp l$이다. 또 $\overline{PH} \perp l$이므로 직선 l은 직선 PO와 직선 PH를 포함하는 평면 PHO와 수직이다. 즉, 직선 l은 평면 PHO

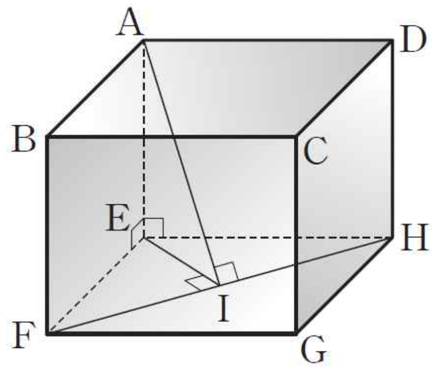
6 삼수선의 정리 ❸

위의 모든 직선과 수직이고 직선 OH가 평면 PHO 위에 있으므로 $\overline{\mathrm{OH}} \perp l$이다.

(3) $\overline{\mathrm{PH}} \perp l$, $\overline{\mathrm{OH}} \perp l$이므로 직선 l은 직선 PH와 직선 OH를 포함하는 평면 PHO와 수직이다. 즉, 직선 l은 평면 PHO 위의 모든 직선과 수직이고 직선 PO가 평면 PHO 위에 있으므로 $\mathrm{PO} \perp l$이다. 또 $\overline{\mathrm{PO}} \perp \overline{\mathrm{OH}}$이므로 직선 PO는 직선 l과 직선 OH를 포함하는 평면 α와 수직이다. 즉, $\overline{\mathrm{PO}} \perp \alpha$이다.

6 삼수선의 정리 ❹

예 그림과 같은 직육면체 ABCD－EFGH의 한 꼭짓점 A에서 선분 FH에 내린 수선의 발을 I라 하자. $\overline{\mathrm{AE}} \perp \overline{\mathrm{EF}}$, $\overline{\mathrm{AE}} \perp \overline{\mathrm{EH}}$이므로 $\overline{\mathrm{AE}} \perp$(평면 EFGH)이고 $\overline{\mathrm{AI}} \perp \overline{\mathrm{FH}}$이므로 삼수선의 정리 (2)에 의하여 $\overline{\mathrm{EI}} \perp \overline{\mathrm{FH}}$이다.

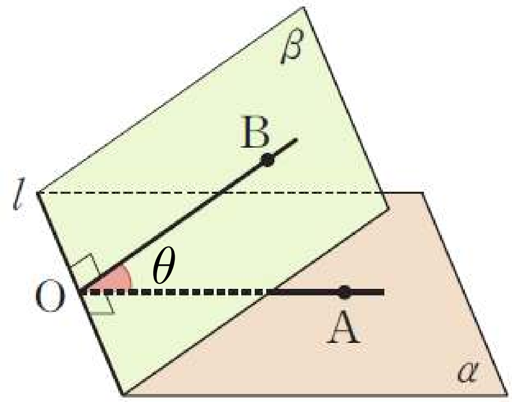


7 이면각(二面角) ❶

(1) 반평면

평면 위의 한 직선은 그 평면을 두 부분으로 나누는데, 그 각각을 ‘반평면’이라 한다.

(2) 이면각



그림과 같이 직선 l을 공유하는 두 반평면 α, β로 이루어진 도형을 ‘이면각’이라 한다. 이때 직선 l을 ‘이면각의 변’, 두 반평면 α, β를 각각 ‘이면각의 면’이라 한다.

(3) 이면각의 크기

이면각의 변 l 위의 한 점 O를 지나고 직선 l에 수직인 두 반직선 OA, OB를 두 반평면 α, β 위에 각각 그을 때,

7 이면각(二面角) ❷

$\angle$AOB의 크기는 점 O의 위치에 관계없이 일정하다. 이 일정한 각의 크기 θ를 ‘이면각의 크기’라 한다.

(4) 두 평면이 이루는 각의 크기

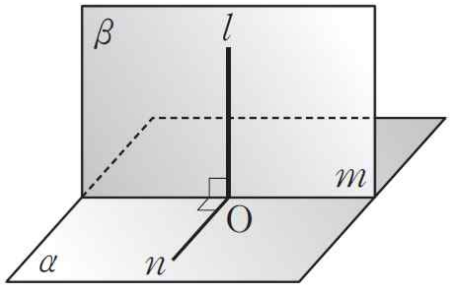
서로 다른 두 평면이 만나서 생기는 4개의 이면각 중에서 크기가 크지 않은 한 이면각의 크기를 ‘두 평면이 이루는 각의 크기’라 한다.

☑ ① 두 평면 α, β에서 이면각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$일 때, 두 평면 α, β는 서로 ‘수직’이라 하고, 기호로 $\alpha \perp \beta$와 같이 나타냄.

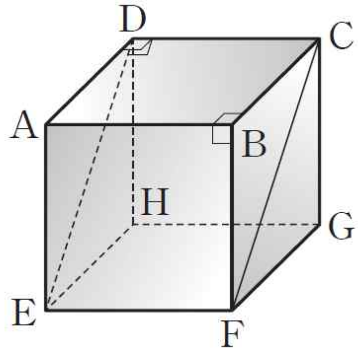
② 직선 l이 평면 α에 수직일 때, 직선 l을 포함하는 평면 β는 평면 α와 수직이다.

7 이면각(二面角) ❸

☑ 위의 ②가 성립함을 보이자.



그림과 같이 두 평면 α, β의 교선을 m이라 하고, 직선 l과 평면 α의 교점을 O라 하자. 평면 α 위에 점 O를 지나고 직선 m과 수직인 직선 n을 그으면 $l \perp \alpha$이므로 $l \perp n$이다. 이때 $l \perp m$, $m \perp n$이므로 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기는 두 직선 l, n이 이루는 각의 크기와 같다. 따라서 $\alpha \perp \beta$이다.



예 그림과 같은 정육면체 ABCD$-$EFGH에서

① $\overline{\mathrm{DC}} \perp \overline{\mathrm{AD}}$, $\overline{\mathrm{DC}} \perp \overline{\mathrm{ED}}$이고 $\angle \mathrm{ADE} = \dfrac{\pi}{4}$

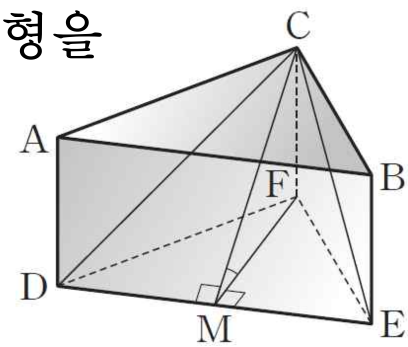
7 이면각(二面角) ❹

이므로 두 평면 ABCD, EFCD가 이루는 예각의 크기는 $\dfrac{\pi}{4}$

② $\overline{\mathrm{AB}} \perp \overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{AB}} \perp \overline{\mathrm{BF}}$이고 $\angle \mathrm{CBF} = \dfrac{\pi}{2}$이므로 두 평면

ABCD, AEFB가 이루는 각의 크기는 $\dfrac{\pi}{2}$이다. 즉,

(평면 ABCD) $\perp$ (평면 AEFB)이다.



예 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형을 을 밑면으로 하고 높이가 1인 정삼각기둥 ABC$-$DEF에서

① $\overline{\mathrm{CF}} \perp \overline{\mathrm{AC}}$, $\overline{\mathrm{CF}} \perp \overline{\mathrm{BC}}$이고 $\angle \mathrm{ACB} = \dfrac{\pi}{3}$

7 이면각(二面角) ❺

이므로 두 평면 ADFC, CFEB가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$

② 선분 DE의 중점을 M이라 하면 $\overline{\mathrm{DF}} = \overline{\mathrm{EF}}$에서 $\overline{\mathrm{DE}} \perp \overline{\mathrm{FM}}$이고, $\overline{\mathrm{CD}} = \overline{\mathrm{CE}}$에서 $\overline{\mathrm{DE}} \perp \overline{\mathrm{CM}}$이므로 두 평면 CDE, FDE가 이루는 각은 $\angle\mathrm{CMF}$이다. 이때 $\overline{\mathrm{FM}} \perp \overline{\mathrm{CF}}$이고

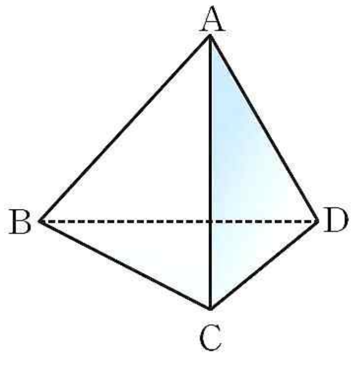
$\overline{\mathrm{FM}} = \sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{DF}} = 1$이므로 $\tan(\angle\mathrm{CMF}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$에서

$\angle\mathrm{CMF} = \frac{\pi}{6}$ 즉, 두 평면 CDE, FDE가 이루는 각의

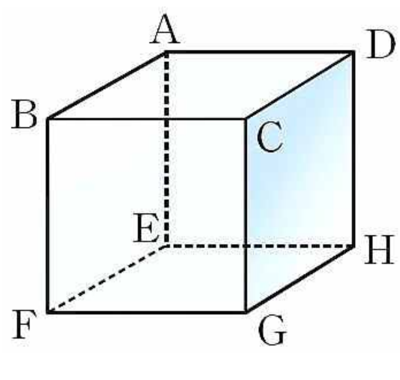
크기는 $\frac{\pi}{6}$이다.

✡ 정다면체

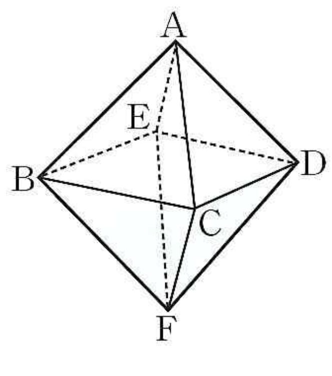
(1) 정사면체



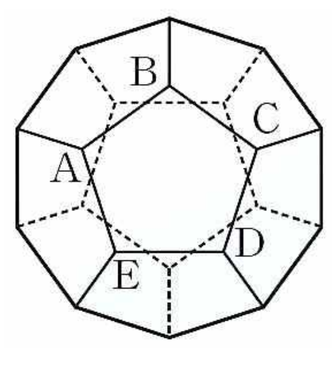
(2) 정육면체



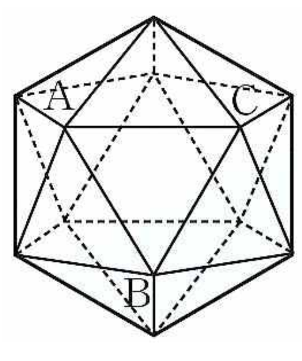
(3) 정팔면체



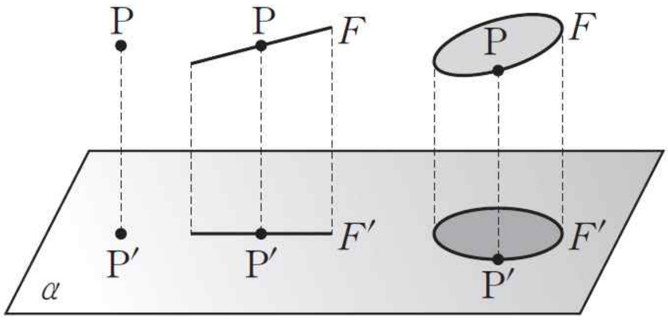
(4) 정십이면체



(5) 정이십면체



$\boxed{8}$ 정사영 ❶



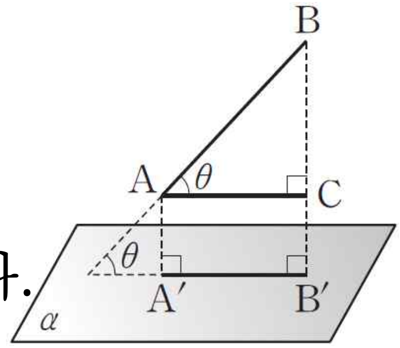
(1) 정사영

한 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발 P′을 '점 P의 평면 α 위로의 정사영'이라 한다. 또 도형 F에 속하는 각 점의 평면 α 위로의 정사영 전체로 이루어진 도형 F'을 '도형 F의 평면 α 위로의 정사영'이라 한다.

(2) 정사영의 길이

선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 A′B′이라 하고, 직선 AB와 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ $\left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$라 하면 $\overline{\mathrm{A'B'}} = \overline{\mathrm{AB}}\cos\theta$

$\boxed{8}$ 정사영 ❷

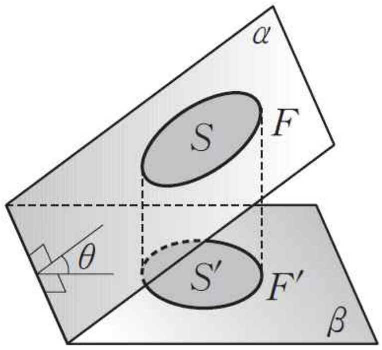


☑ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$일 때, 선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 A′B′이라 하면 $\overline{\mathrm{AA'}} \perp \alpha$, $\overline{\mathrm{BB'}} \perp \alpha$이므로 $\overline{\mathrm{AA'}} \,/\!/\, \overline{\mathrm{BB'}}$이다. 점 A에서 직선 BB′에 내린 수선의 발을 C라 하면 사각형 AA′B′C는 직사각형이므로 $\overline{\mathrm{A'B'}} = \overline{\mathrm{AC}}$, $\overline{\mathrm{A'B'}} \,/\!/\, \overline{\mathrm{AC}}$이다. 따라서 $\angle\mathrm{BAC} = \theta$이고 직각삼각형 BAC에서 $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{AB}}\cos\theta$이므로 $\overline{\mathrm{A'B'}} = \overline{\mathrm{AB}}\cos\theta$가 성립한다.

한편, $\theta = 0$ 또는 $\theta = \frac{\pi}{2}$일 때에도 $\overline{\mathrm{A'B'}} = \overline{\mathrm{AB}}\cos\theta$가 성립한다.

8 정사영 ❸

(3) 정사영의 넓이



평면 α 위의 도형 F의 평면 β 위로의 정사영을 F'이라 하고, 두 도형 F, F'의 넓이를 각각 S, S'이라 할 때, 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기가 θ $\left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$이면

$$S' = S\cos\theta$$

8 정사영 ❹

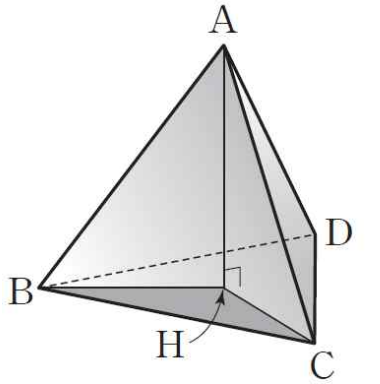
(4) 정사영의 넓이를 이용하여 이면각의 크기 구하기

등식 $S' = S\cos\theta$ $\left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$는 $\cos\theta = \frac{S'}{S}$으로 변형하여 사용할 수 있다. 즉, 넓이가 S인 평면 α 위의 도형 F의 평면 β 위로의 정사영 F'의 넓이가 S'일 때, 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$\cos\theta = \frac{S'}{S}$$

8 정사영 ❺

예 그림과 같이 정사면체 ABCD에 대하여 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 삼각형 BCD의 무게중심과 같다. 삼각형 HBC의 넓이는 삼각형 BCD의 넓이의 $\frac{1}{3}$이고 두 삼각형 ABC, BCD의 넓이가 서로 같으므로 두 평면 ABC, BCD가 이루는 각의 크기를 θ $\left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$라 하면



$$\cos\theta = \frac{(\text{삼각형 HBC의 넓이})}{(\text{삼각형 ABC의 넓이})} = \frac{1}{3}$$