정답 및 해설

수학 영역

정답

1	②	2	③	3	①	4	②	5	④
6	①	7	②	8	④	9	⑤	10	③
11	⑤	12	③	13	④	14	①	15	①
16	②	17	④	18	③	19	⑤	20	③
21	④	22	10	23	21	24	7	25	2
26	140	27	12	28	80	29	6	30	35

해설

1. [출제의도] 다항식 계산하기

$A+B=(x^2-2xy+y^2)+(x^2+2xy+y^2)$
$=2x^2+2y^2$

2. [출제의도] 복소수 계산하기

$(3+i)+(1-3i)=(3+1)+\{1+(-3)\}i$
$=4-2i$

3. [출제의도] 항등식의 성질 이해하기

$x(x+1)+2(x+1)=x^2+3x+2=x^2+ax+b$
$a=3$, $b=2$
따라서 $a-b=3-2=1$

4. [출제의도] 두 점 사이의 거리 계산하기

$\overline{OA}=\sqrt{(5-0)^2+\{(-5)-0\}^2}=\sqrt{50}$
$\overline{OB}=\sqrt{(1-0)^2+(a-0)^2}=\sqrt{1+a^2}$
$50=1+a^2$, a는 양수이므로 $a=7$

5. [출제의도] 선분의 내분점 계산하기

선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표가 (a, b)이므로
$a=\frac{2\times5+1\times(-4)}{2+1}=2$,
$b=\frac{2\times3+1\times0}{2+1}=2$
따라서 $a+b=2+2=4$

6. [출제의도] 절댓값을 포함한 일차부등식 이해하기

$-7<2x+1<7$, $-4<x<3$이므로
$a=-4$, $b=3$
따라서 $ab=-4\times3=-12$

7. [출제의도] 다항식의 인수분해 이해하기

$x^4-x^2-12=(x-2)(x+2)(x^2+3)$
a가 양수이므로 $a=2$, $b=3$
따라서 $a+b=2+3=5$

8. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계 이해하기

이차방정식 $x^2+2x+k=0$의 서로 다른 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=k$
$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-2)^2-2k=8$
$k=-2$

9. [출제의도] 두 직선의 평행 조건 이해하기

두 직선 $3x+2y-5=0$, $3x+y-1=0$의 교점의 좌표는 $(-1, 4)$
직선 $2x-y+4=0$의 기울기는 2이므로
이 직선과 평행한 직선의 기울기도 2이다.
따라서 구하는 직선의 방정식은
$y=2\{x-(-1)\}+4=2x+6$이므로
y절편은 6

10. [출제의도] 연립이차방정식 이해하기

$\begin{cases} x-y+1=0 & \cdots ㉠ \\ x^2-2y^2-2=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$
㉠에서 $y=x+1$을 ㉡에 대입하면
$x^2-2(x+1)^2-2=0$, $(x+2)^2=0$
$x=-2$, $y=-1$에서
$\alpha=-2$, $\beta=-1$
따라서 $\alpha+\beta=(-2)+(-1)=-3$

11. [출제의도] 연립이차부등식 이해하기

$x^2-3x-18\le0$에서
$-3\le x\le6$ $\cdots$ ㉠
$x^2-8x+15\ge0$에서
$x\le3$ 또는 $x\ge5$ $\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서
$-3\le x\le3$ 또는 $5\le x\le6$
정수 x는 -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 5, 6
따라서 모든 정수 x의 값의 합은
$(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2+3+5+6=11$

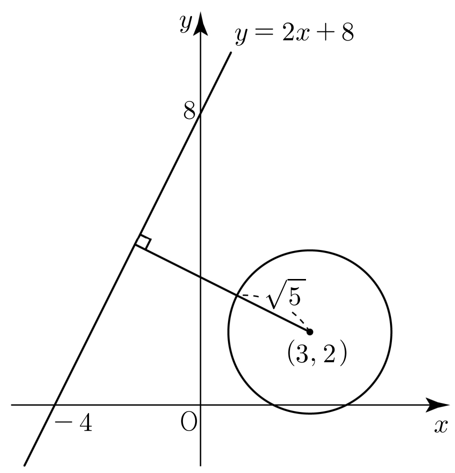
12. [출제의도] 이차방정식과 이차함수의 관계 이해하기

이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프가
점 $(1, 0)$에서 x축과 접하므로
이차방정식 $x^2+ax+b=0$은 중근 $x=1$을 갖는다.
$y=x^2+ax+b=(x-1)^2=x^2-2x+1$이므로
$a=-2$, $b=1$
그러므로 이차함수
$y=x^2+x-2=(x+2)(x-1)$의 그래프가
x축과 만나는 두 점은 $(-2, 0)$, $(1, 0)$
따라서 두 점 사이의 거리는
$\sqrt{\{1-(-2)\}^2+(0-0)^2}=3$

13. [출제의도] 점의 평행이동과 대칭이동을 활용하여 문제 해결하기

점 $A(-3, 4)$를 직선 $y=x$에 대하여
대칭이동한 점 B의 좌표는 $(4, -3)$
점 $B(4, -3)$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 점 C의 좌표는 $(6, -3+k)$
두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은
$y-4=\frac{-3-4}{4-(-3)}\{x-(-3)\}$
$y=-x+1$
세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로
$-3+k=-5$, $k=-2$

14. [출제의도] 점과 직선 사이의 거리 이해하기

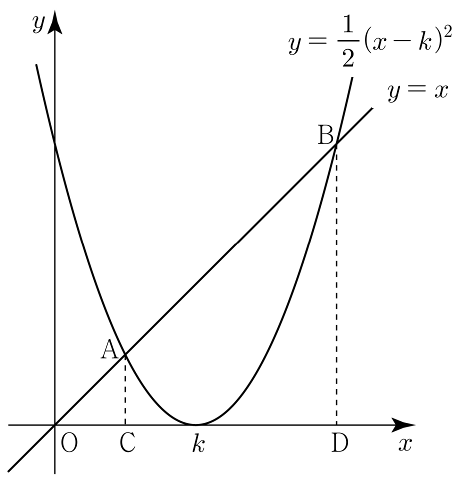


점 $(3, 2)$와 직선 $2x-y+8=0$ 사이의 거리는
$\frac{|2\times3+(-1)\times2+8|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{12\sqrt{5}}{5}$
원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이므로
원 위의 점과 직선 $2x-y+8=0$ 사이의 거리의
최솟값은 $\frac{12\sqrt{5}}{5}-\sqrt{5}=\frac{7\sqrt{5}}{5}$

15. [출제의도] 선분의 내분과 외분 이해하기

점 A의 좌표를 (x_1, y_1), 점 B의 좌표를 (x_2, y_2)라 하면
점 P는 선분 OA를 $2:1$로 외분하는 점이므로
$\frac{2\times x_1-1\times0}{2-1}=2x_1$, $\frac{2\times y_1-1\times0}{2-1}=2y_1$
점 P의 좌표는 $(2x_1, 2y_1)$
점 Q는 선분 OB를 $2:1$로 외분하는 점이므로
$\frac{2\times x_2-1\times0}{2-1}=2x_2$, $\frac{2\times y_2-1\times0}{2-1}=2y_2$
점 Q의 좌표는 $(2x_2, 2y_2)$
선분 PQ의 중점의 좌표가 $(4, 5)$이므로
$\frac{2x_1+2x_2}{2}=x_1+x_2=4$,
$\frac{2y_1+2y_2}{2}=y_1+y_2=5$
삼각형 OAB의 무게중심의 좌표 (a, b)는
$a=\frac{0+x_1+x_2}{3}=\frac{4}{3}$, $b=\frac{0+y_1+y_2}{3}=\frac{5}{3}$
따라서 $a+b=\frac{4}{3}+\frac{5}{3}=3$

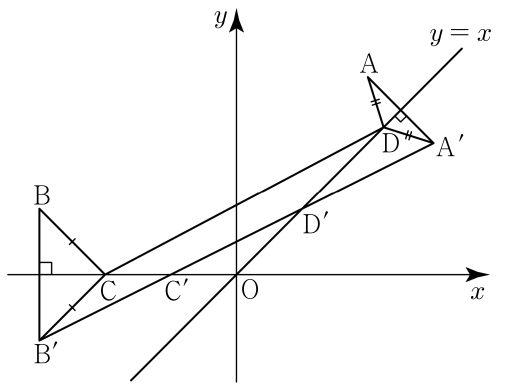
16. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 활용하여 문제 해결하기



점 C의 좌표를 $(\alpha, 0)$이라 하면 선분 CD의 길이는 6이므로 점 D의 좌표는 $(\alpha+6, 0)$

직선 $y=x$ 위의 두 점
$\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha)$, $\mathrm{B}(\alpha+6,\ \alpha+6)$은
이차함수 $y=\frac{1}{2}(x-k)^2$의 그래프와
직선 $y=x$의 교점이므로 $\frac{1}{2}(x-k)^2=x$
이차방정식 $x^2-2(k+1)x+k^2=0$의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+(\alpha+6)=2(k+1)$, $\alpha=k-2$ ⋯ ㉠
$\alpha(\alpha+6)=k^2$ ⋯ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$(k-2)(k+4)=k^2$, $2k-8=0$, $k=4$

17. [출제의도] 점의 대칭이동을 활용하여 문제 해결하기



점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면 점 A′의 좌표는 $(3,\ 2)$
점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면 점 B′의 좌표는 $(-3,\ -1)$
$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{A'D}}$, $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{B'C}}$이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AD}}+\overline{\mathrm{CD}}+\overline{\mathrm{BC}}&=\overline{\mathrm{A'D}}+\overline{\mathrm{DC}}+\overline{\mathrm{CB'}}\\&\geq\overline{\mathrm{A'D'}}+\overline{\mathrm{D'C'}}+\overline{\mathrm{C'B'}}\\&=\overline{\mathrm{A'B'}}\\&=\sqrt{\{(-3)-3\}^2+\{(-1)-2\}^2}\\&=3\sqrt{5}\end{aligned}$$

따라서 $\overline{\mathrm{AD}}+\overline{\mathrm{CD}}+\overline{\mathrm{BC}}$의 최솟값은 $3\sqrt{5}$

18. [출제의도] 이차방정식의 판별식을 활용하여 문제 해결하기

두 이차방정식 $f(x)=0$, $g(x)=0$의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하면

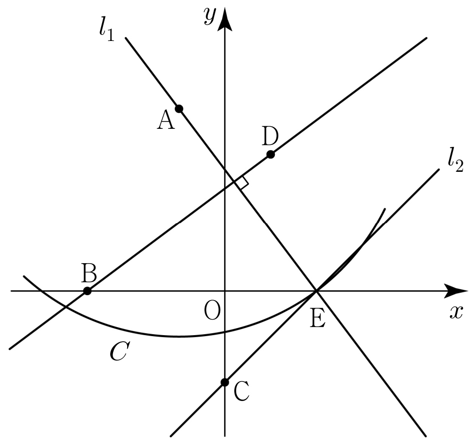
$$\begin{aligned}D_1&=4^2-4(-3k^2-12k+40)\\&=12(k-2)(k+6)\ \cdots\ ㉠\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_2&=(-12)^2-4(3k^2-36k+96)\\&=-12(k-10)(k-2)\ \cdots\ ㉡\end{aligned}$$

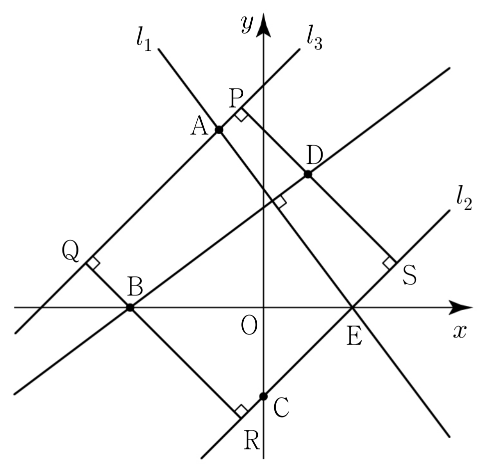
(i) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 개수가 0으로 같은 경우
㉠, ㉡에서 $\begin{cases}12(k-2)(k+6)<0\\-12(k-10)(k-2)<0\end{cases}$의 해가
$-6<k<2$이므로 정수 k는 -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1이고 그 개수는 7
(ii) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 개수가 1로 같은 경우
㉠, ㉡에서 $\begin{cases}12(k-2)(k+6)=0\\-12(k-10)(k-2)=0\end{cases}$의 해가
$k=2$이므로 정수 k의 개수는 1
(iii) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 개수가 2로 같은 경우
㉠, ㉡에서 $\begin{cases}12(k-2)(k+6)>0\\-12(k-10)(k-2)>0\end{cases}$의 해가
$2<k<10$이므로 정수 k는 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9이고 그 개수는 7
따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여 모든 정수 k의 개수는 15

19. [출제의도] 직선의 방정식을 활용하여 추론하기

두 점 $\mathrm{B}(-3,\ 0)$과 $\mathrm{D}(1,\ 3)$을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{3}{4}$이므로 점 $\mathrm{A}(-1,\ 4)$를 지나고 두 점 B와 D를 지나는 직선에 수직인
직선 l_1의 방정식은 $y=\boxed{-\frac{4}{3}x+\frac{8}{3}}$이다.
점 $\mathrm{A}(-1,\ 4)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{BD}}=5$인 원을 C라 하면
$C:(x+1)^2+(y-4)^2=25$



연립방정식 $\begin{cases}y=-\frac{4}{3}x+\frac{8}{3}\\(x+1)^2+(y-4)^2=25\end{cases}$의 해는
$\begin{cases}x=2\\y=0\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-4\\y=8\end{cases}$ 이므로
원 C와 직선 l_1이 만나는 두 점의 좌표는 $(2,\ 0)$, $(-4,\ 8)$
두 점 중 점 $\mathrm{C}(0,\ -2)$와의 거리가 더 작은 점이 E이므로 점 E의 좌표는 $(2,\ 0)$
두 점 $\mathrm{C}(0,\ -2)$와 $\mathrm{E}(2,\ 0)$을 지나는 직선을 l_2라 하면 직선 l_2의 방정식은 $y=\boxed{x-2}$이다.



두 점 B와 D에서 직선 l_2에 내린 수선의 발을 각각 R, S라 하자.
직선 l_2 : $y=x-2$의 기울기가 1이므로
점 $\mathrm{B}(-3,\ 0)$을 지나고 직선 l_2에 수직인 직선의 방정식은
$y=-x-3$
이를 직선 l_2의 방정식과 연립하여 풀면
$\mathrm{R}\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{5}{2}\right)$
점 $\mathrm{D}(1,\ 3)$을 지나고 직선 l_2에 수직인 직선의 방정식은
$y=-x+4$
이를 직선 l_2의 방정식과 연립하여 풀면
$\mathrm{S}(3,\ 1)$
점 $\mathrm{A}(-1,\ 4)$를 지나고 직선 l_2와 평행한 직선을 l_3이라 하면 직선 l_3의 방정식은
$y=x+5$
두 점 B와 D에서 직선 l_3에 내린 수선의 발을 각각 Q, P라 하자.
직선 l_3 : $y=x+5$의 기울기가 1이므로
점 $\mathrm{B}(-3,\ 0)$을 지나고 직선 l_3에 수직인 직선의 방정식은
$y=-x-3$
이를 직선 l_3의 방정식과 연립하여 풀면
$\mathrm{Q}(-4,\ 1)$
점 $\mathrm{D}(1,\ 3)$을 지나고 직선 l_3에 수직인 직선의 방정식은
$y=-x+4$
이를 직선 l_3의 방정식과 연립하여 풀면
$\mathrm{P}\left(-\frac{1}{2},\ \frac{9}{2}\right)$
사각형 PQRS는 네 점 A, B, C, D가 각각 네 변 PQ, QR, RS, SP 위에 있고 한 변의 길이가 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QR}}=\boxed{\frac{7\sqrt{2}}{2}}$ 인 정사각형이다.
$f(x)=-\frac{4}{3}x+\frac{8}{3}$, $g(x)=x-2$, $\alpha=\frac{7\sqrt{2}}{2}$
따라서 $\frac{3}{4}f(\alpha)-g(\alpha)=4-7\sqrt{2}$

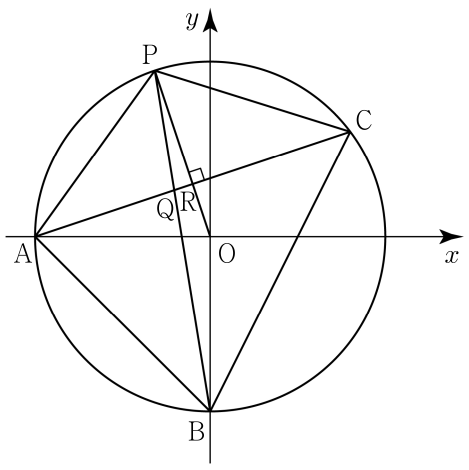
20. [출제의도] 나머지정리를 활용하여 문제 해결하기

$f(x)$를 $x+1$, x^2-3으로 나눈 몫을 각각 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, 나눈 나머지를 R라 하자.
$f(x)=(x+1)Q_1(x)+R$에서
$f(x)-R=(x+1)Q_1(x)$
$f(x)=(x^2-3)Q_2(x)+R$에서
$f(x)-R=(x^2-3)Q_2(x)$이므로
$f(x)-R=(x+1)(x^2-3)(x+a)$ ⋯ ㉠
$f(x+1)-5$를 x^2+x로 나눈 몫을 $Q_3(x)$라 하면 $f(x+1)-5=(x^2+x)Q_3(x)$ ⋯ ㉡
㉡에서 $x=-1$, $x=0$을 대입하면
$f(0)=5$, $f(1)=5$
㉠에서 $x=0$, $x=1$을 대입하면
$f(0)=-3a+R=5$, $f(1)=-4-4a+R=5$
$R=-7$, $a=-4$
따라서 $f(x)=(x+1)(x^2-3)(x-4)-7$이고
$f(4)=-7$

21. [출제의도] 직선의 방정식과 원의 방정식을 활용하여 추론하기

ㄱ. 직선 AC의 방정식은 $x-3y+5=0$이므로 점 B와 직선 AC 사이의 거리는 $2\sqrt{10}$ (참)
ㄴ. 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 P에서의 접선이 직선 AC와 평행할 때, 사각형 PABC의 넓이가 최대가 된다. ⋯ (＊)
선분 AC와 두 선분 PB, PO가 만나는 점을

각각 Q, R라 하자.
원 위의 점 P에서의 접선과 직선 AC는 평행하고, 원의 반지름 OP와 각각 서로 수직이다.
삼각형 PQR에서 $\angle R = 90^\circ$, $\angle Q < 90^\circ$이므로 직선 PB와 직선 AC는 서로 수직이 아니다.
(거짓)



ㄷ. 사각형 PABC의 넓이는
삼각형 ABC의 넓이와 삼각형 ACP의 넓이의 합과 같다.
삼각형 ABC의 넓이는
$\overline{AC} = 3\sqrt{10}$이고 ㄱ에 의하여
$\frac{1}{2} \times 3\sqrt{10} \times 2\sqrt{10} = 30$ … ㉠
삼각형 ACP의 넓이의 최댓값은 $(*)$에 의하여
$\overline{OR} = \frac{|1 \times 0 + (-3) \times 0 + 5|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$
$\overline{PR} = 5 - \overline{OR} = 5 - \frac{\sqrt{10}}{2}$
$\frac{1}{2} \times 3\sqrt{10} \times \left(5 - \frac{\sqrt{10}}{2}\right) = \frac{15(\sqrt{10} - 1)}{2}$ … ㉡
사각형 PABC의 넓이의 최댓값은 ㉠, ㉡에 의하여 $\frac{15(3 + \sqrt{10})}{2}$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

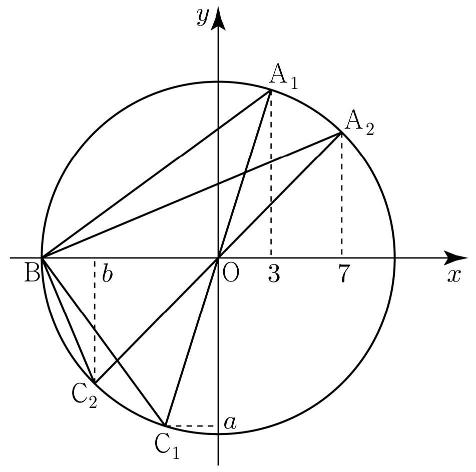
22. [출제의도] 나머지정리 이해하기
$f(x) = x^3 - x^2 - 10x + a$라 하면
$f(x)$가 $x - 1$로 나누어떨어지므로 나머지정리에 의하여 $f(1) = 1^3 - 1^2 - 10 \times 1 + a = 0$
따라서 $a = 10$

23. [출제의도] 연립부등식 계산하기
$x - 1 > 8$에서 $x > 9$ … ㉠
$2x - 16 \le x + a$에서 $x \le a + 16$ … ㉡
㉠, ㉡에서 $9 < x \le a + 16$
$a + 16 = 28$, $a = 12$, $b = 9$
따라서 $a + b = 12 + 9 = 21$

24. [출제의도] 이차방정식의 판별식 이해하기
이차방정식 $x^2 - (k+2)x + k + 5 = 0$의 판별식을 D라 하자.
이차방정식이 서로 다른 두 허근을 가지기 위해서는 $D = \{-(k+2)\}^2 - 4(k+5) < 0$
$k^2 - 16 < 0$, $-4 < k < 4$
따라서 모든 정수 k는
$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$이고
그 개수는 7

25. [출제의도] 이차함수의 최대, 최소를 활용하여 문제 해결하기
두 점 $A(2t, -3)$과 $B(-1, 2t)$에 대하여
$l = \sqrt{(-1-2t)^2 + \{2t - (-3)\}^2}$
$= \sqrt{8t^2 + 16t + 10}$
$l^2 = 8t^2 + 16t + 10 = 8(t+1)^2 + 2$
따라서 $t = -1$일 때, l^2의 최솟값은 2

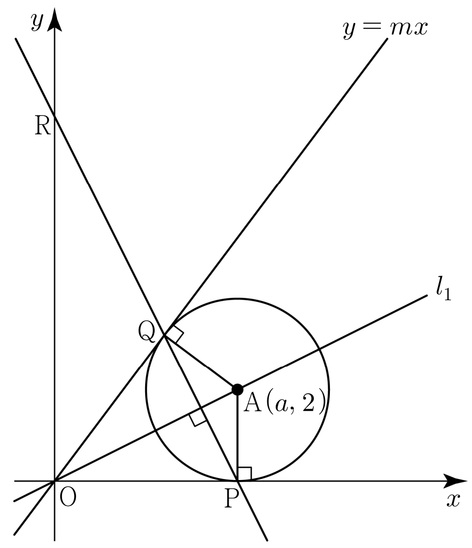
26. [출제의도] 점의 대칭이동을 활용하여 문제 해결하기



$\angle A_1BC_1 = 90^\circ$, $\angle A_2BC_2 = 90^\circ$
두 선분 A_1C_1, A_2C_2는 원의 지름이고
$\overline{OA_1} = \overline{OC_1}$, $\overline{OA_2} = \overline{OC_2}$이므로
두 점 A_1, A_2를 원점에 대하여 대칭이동한 점은 각각 C_1, C_2이다.
점 A_1의 좌표는 $(3, \sqrt{91})$
점 A_2의 좌표는 $(7, \sqrt{51})$이므로
점 C_1의 좌표는 $(-3, -\sqrt{91})$
점 C_2의 좌표는 $(-7, -\sqrt{51})$
$a = -\sqrt{91}$, $b = -7$
따라서 $a^2 + b^2 = (-\sqrt{91})^2 + (-7)^2 = 140$

27. [출제의도] 사차방정식을 활용하여 문제 해결하기
$x^4 + (2a+1)x^3 + (3a+2)x^2 + (a+2)x = 0$
$x(x+1)(x^2 + 2ax + a + 2) = 0$
이므로 사차방정식의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되기 위해서는 주어진 사차방정식이 한 개의 중근을 가져야 한다.
(i) $x = 0$이 사차방정식의 중근인 경우
$x = 0$은 이차방정식 $x^2 + 2ax + a + 2 = 0$의 해이므로
$0^2 + 2a \times 0 + a + 2 = 0$, $a = -2$
사차방정식의 서로 다른 세 실근은
$x = -1$, $x = 0$(중근), $x = 4$
(ii) $x = -1$이 사차방정식의 중근인 경우
$x = -1$은 이차방정식 $x^2 + 2ax + a + 2 = 0$의 해이므로
$(-1)^2 + 2a \times (-1) + a + 2 = 0$, $a = 3$
사차방정식의 서로 다른 세 실근은
$x = -5$, $x = -1$(중근), $x = 0$
(iii) 사차방정식이 $x \ne 0$이고 $x \ne -1$인 중근을 갖는 경우
이차방정식 $x^2 + 2ax + a + 2 = 0$이 중근을 가져야 하므로
이차방정식 $x^2 + 2ax + a + 2 = 0$의 판별식을 D라 하면 $D = (2a)^2 - 4(a+2) = 0$
$a = -1$ 또는 $a = 2$
ⓐ $a = -1$인 경우
사차방정식의 서로 다른 세 실근은
$x = -1$, $x = 0$, $x = 1$(중근)
ⓑ $a = 2$인 경우
사차방정식의 서로 다른 세 실근은
$x = -2$(중근), $x = -1$, $x = 0$
(i), (ii), (iii)에 의하여 실수 a는
$-2, -1, 2, 3$
따라서 모든 실수 a의 값의 곱은 12

28. [출제의도] 원과 직선의 위치 관계를 활용하여 문제 해결하기



원의 중심을 A라 하자.
점 P의 좌표를 $(a, 0)$이라 하면 점 A의 좌표는 $(a, 2)$
원점 O와 점 A를 지나는 직선을 l_1이라 하면
직선 l_1의 방정식은 $y = \frac{2}{a}x$
직선 PQ는 점 P를 지나고 직선 l_1과 수직이므로
직선 PQ의 방정식은 $y = -\frac{a}{2}(x - a)$
직선 PQ가 y축과 만나는 점 R의 좌표는
$\left(0, \frac{a^2}{2}\right)$
삼각형 ROP의 넓이가 16이므로
$\frac{1}{2} \times a \times \frac{a^2}{2} = \frac{a^3}{4} = 16$, $a = 4$
점 $A(4, 2)$와 직선 $mx - y = 0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 2와 같으므로
$\frac{|4m - 2|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 2$
$m = 0$ 또는 $m = \frac{4}{3}$
$m > 0$이므로 $m = \frac{4}{3}$
따라서 $60m = 60 \times \frac{4}{3} = 80$

[다른 풀이]
원의 중심을 $A(a, 2)$라 하자.
삼각형 ROP와 삼각형 OPA에서
$\angle ROP = \angle OPA = 90^\circ$,
$\angle PRO = \angle AOP = 90^\circ - \angle RPO$이므로

삼각형 ROP와 삼각형 OPA는 닮음이다.
따라서 $\overline{\mathrm{RO}}:\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OP}}:\overline{\mathrm{PA}}$
삼각형 ROP의 넓이는
$\frac{1}{2}\times a\times\overline{\mathrm{RO}}=16$, $\overline{\mathrm{RO}}=\frac{32}{a}$ 이므로
$\frac{32}{a}:a=a:2$, $a=4$
점 A$(4, 2)$와 직선 $mx-y=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 2와 같으므로
$\frac{|4m-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$
$m=0$ 또는 $m=\frac{4}{3}$
$m>0$ 이므로 $m=\frac{4}{3}$
따라서 $60m=60\times\frac{4}{3}=80$

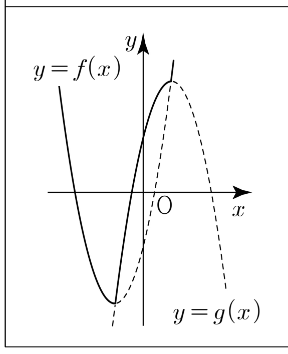
29. [출제의도] 이차방정식의 실근과 허근을 활용하여 문제 해결하기

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 서로 다른 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-a$ ⋯ ㉠, $\alpha\beta=b$ ⋯ ㉡
이차방정식 $x^2+3ax+3b=0$의 서로 다른 두 근이 $\alpha+2$, $\beta+2$이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$(\alpha+2)+(\beta+2)=-3a$ ⋯ ㉢
$(\alpha+2)(\beta+2)=3b$ ⋯ ㉣
㉠, ㉢에서
$-a+4=-3a$, $a=-2$
㉠, ㉡을 ㉣에 대입하면
$b+2\times2+4=3b$, $b=4$
$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=4$
$\alpha^2-2\alpha+4=0$에서 $\alpha^3=-8$
$\beta^2-2\beta+4=0$에서 $\beta^3=-8$이므로
$\alpha+\beta=2$
$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2^2-2\times4=-4$
$\alpha^3+\beta^3=(-8)+(-8)=-16$
$\alpha^4+\beta^4=\alpha^3\times\alpha+\beta^3\times\beta=-8(\alpha+\beta)=-16$
$\alpha^5+\beta^5=\alpha^3\times\alpha^2+\beta^3\times\beta^2=-8(\alpha^2+\beta^2)=32$
$\alpha^6+\beta^6=(\alpha^3)^2+(\beta^3)^2=(-8)^2+(-8)^2=128$
$\alpha^7+\beta^7=(\alpha^3)^2\times\alpha+(\beta^3)^2\times\beta=64(\alpha+\beta)$
$=128$
따라서 $\alpha^6+\beta^6=\alpha^7+\beta^7=128$이므로
조건을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 6

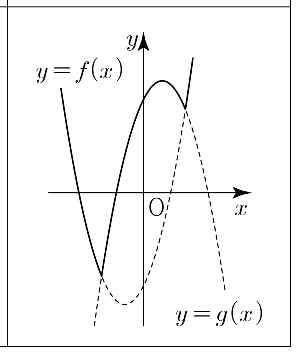
30. [출제의도] 이차함수의 그래프를 활용하여 추론하기

함수 $f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
함수 $g(x)=-x^2+ax-b$
곡선 $y=f(x)$의 꼭짓점의 x좌표는 $-\frac{a}{2}$
곡선 $y=g(x)$의 꼭짓점의 x좌표는 $\frac{a}{2}$
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표
α, β와 $-\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}$의 대소 관계에 의하여 방정식 $f(x)=g(x)$가 서로 다른 두 실근을 갖는 경우는 다음과 같다.

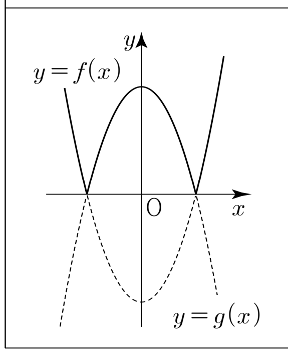
ⓐ $-\frac{a}{2}\le\alpha<\beta\le\frac{a}{2}$



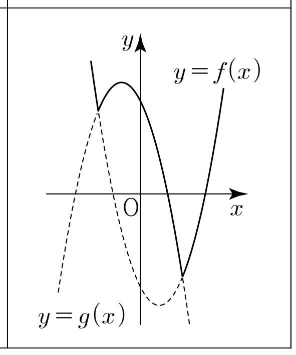
ⓑ $\alpha<-\frac{a}{2}<\frac{a}{2}<\beta$



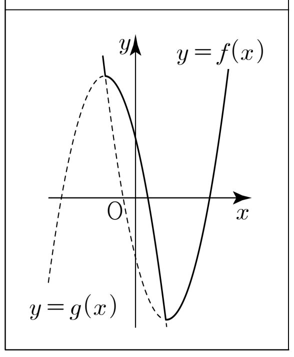
ⓒ $\alpha<-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}<\beta$



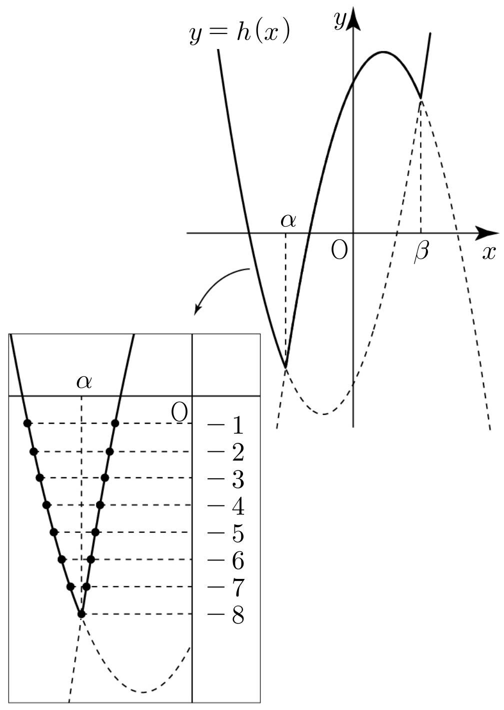
ⓓ $\alpha<\frac{a}{2}<-\frac{a}{2}<\beta$



ⓔ $\frac{a}{2}\le\alpha<\beta\le-\frac{a}{2}$



(i) ⓐ, ⓒ인 경우
방정식 $h(x)=h(\beta)$의
서로 다른 실근의 개수는 2
(ii) ⓑ인 경우
방정식 $h(x)=h(\beta)$의
서로 다른 실근의 개수는 3
(iii) ⓓ인 경우
방정식 $h(x)=h(\beta)$의
서로 다른 실근의 개수는 1
(iv) ⓔ인 경우
방정식 $h(x)=h(\beta)$의
서로 다른 실근의 개수는 1 또는 2
(i), (ii), (iii), (iv)에 의하여 ⓑ인 경우만 서로 다른 실근의 개수가 3이다.
방정식 $f(x)=g(x)$의 두 실근이 α, β이므로
$f(\alpha)=g(\alpha)$, $f(\beta)=g(\beta)$이고
$f(x)-g(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)=2x^2+2b$
$\alpha=-\beta$, $b=\alpha\beta$ ⋯ ㉠
(ㄱ) $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$일 때,
방정식 $h(x)=h(\beta)$는 $f(x)=h(\beta)$이고
$x^2+ax+b-h(\beta)=0$의 한 근이 β이므로
근과 계수의 관계에 의하여 나머지 한 근은
$-a-\beta$
(ㄴ) $\alpha\le x\le\beta$일 때,
방정식 $h(x)=h(\beta)$는 $g(x)=h(\beta)$이고
$-x^2+ax-b-h(\beta)=0$의 한 근이 β이므로
근과 계수의 관계에 의하여 나머지 한 근은
$a-\beta$
(ㄱ), (ㄴ)에 의하여 방정식 $h(x)=h(\beta)$의 서로 다른 세 실근은
$-a-\beta$, $a-\beta$, β
조건 (가)에 의하여
$(-a-\beta)+(a-\beta)+\beta=-4$
$\beta=4$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡에 의하여
$\alpha=-4$, $b=-16$ ⋯ ㉢



$\alpha\le x\le\beta$에서 함수 $g(x)$의 최솟값은
$g(\alpha)$이고 조건 (나)에 의하여
$g(\alpha)=g(-4)=-16-4a+16=-8$
$a=2$ ⋯ ㉣
㉡, ㉢, ㉣에 의하여
$f(x)=x^2+2x-16$
$g(x)=-x^2+2x+16$
$h(x)=\begin{cases} x^2+2x-16 & (x<-4 \text{ 또는 } x>4) \\ -x^2+2x+16 & (-4\le x\le 4) \end{cases}$
따라서 $h(2)+h(5)=35$