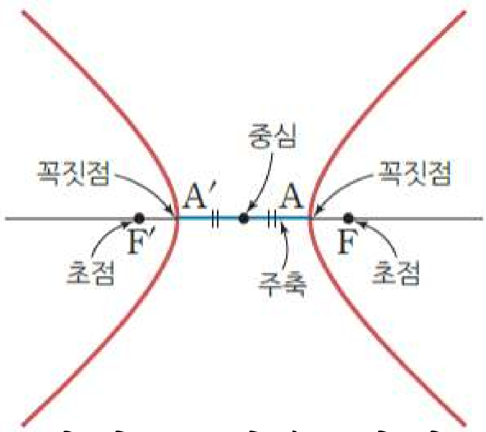
Ⅰ_3. 쌍곡선

[12기하01-03] 쌍곡선의 뜻을 알고, 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있다.

[12기하01-04] 이차곡선과 직선의 위치 관계를 이해하고, 접선의 방정식을 구할 수 있다.

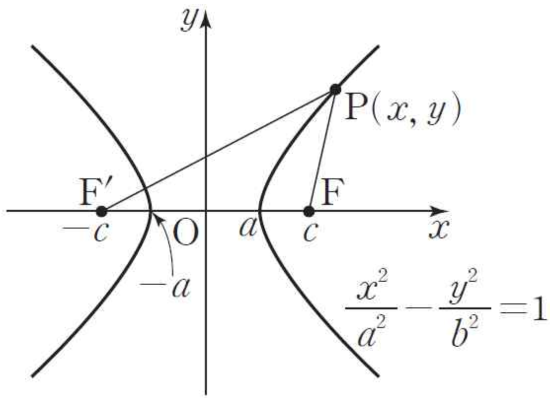
1 쌍곡선(hyperbole)의 뜻



(1) 평면 위의 서로 다른 두 점 F, F′으로부터의 거리의 차가 일정한 점들의 집합을 ‘쌍곡선’이라 한다.

(2) 두 점 F, F′을 쌍곡선의 ‘초점’이라 한다. 두 초점을 잇는 직선이 쌍곡선과 만나는 점을 각각 A, A′이라 할 때, 두 점 A, A′을 쌍곡선의 ‘꼭짓점’, 선분 AA′을 쌍곡선의 ‘주축’이라 하고, 주축의 중점을 쌍곡선의 ‘중심’이라 한다.

② 쌍곡선의 방정식 ❶



(1) 두 초점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$으로부터의 거리의 차가 $2a$인 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

(단, $c>a>0$, $c^2=a^2+b^2$)

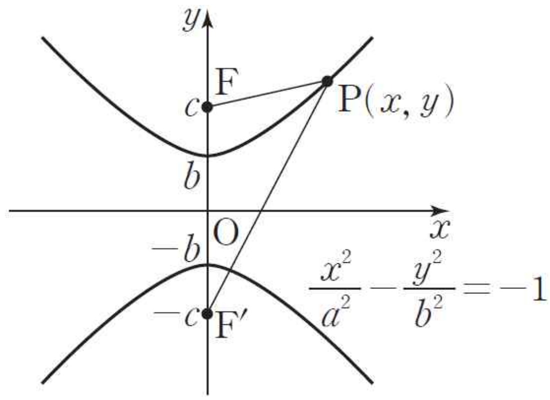
① 초점의 좌표 : $\left(\sqrt{a^2+b^2},\ 0\right)$, $\left(-\sqrt{a^2+b^2},\ 0\right)$

② 꼭짓점의 좌표 : $(a,\ 0)$, $(-a,\ 0)$

③ 주축의 길이 : $2a$

④ 중심의 좌표 : $(0,\ 0)$

② 쌍곡선의 방정식 ❷



(2) 두 초점 $\mathrm{F}(0,\ c)$, $\mathrm{F}'(0,\ -c)$으로부터의 거리의 차가 $2b$인 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

(단, $c>b>0$, $c^2=a^2+b^2$)

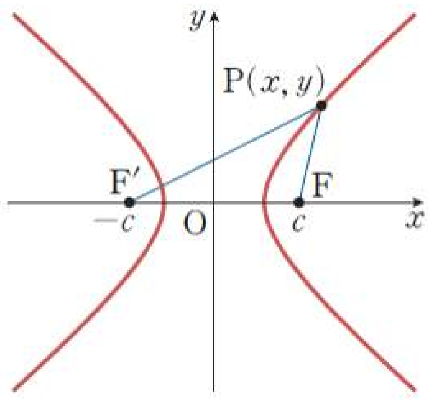
① 초점의 좌표 : $\left(0,\ \sqrt{a^2+b^2}\right)$, $\left(0,\ -\sqrt{a^2+b^2}\right)$

② 꼭짓점의 좌표 : $(0,\ b)$, $(0,\ -b)$

③ 주축의 길이 : $2b$

④ 중심의 좌표 : $(0,\ 0)$

2 쌍곡선의 방정식 ❸



☑ 두 초점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$으로부터의 거리의 차이 $2a$ $(c>a>0)$인 쌍곡선의 방정식을 구해 보자.

Let 쌍곡선 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$

$$\overline{\mathrm{PF}}=\sqrt{(x-c)^2+y^2},\ \overline{\mathrm{PF'}}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

이고, $\left|\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}\right|=2a$이므로

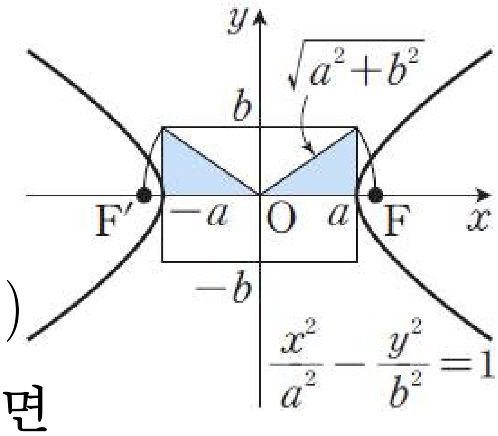
$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}\pm 2a$$

양변을 제곱하여 정리하면

2 쌍곡선의 방정식 ❹



$$cx-a^2=\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

다시 양변을 제곱하여 정리하면

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$

$c>a>0$이므로 $c^2-a^2=b^2$이라 하면

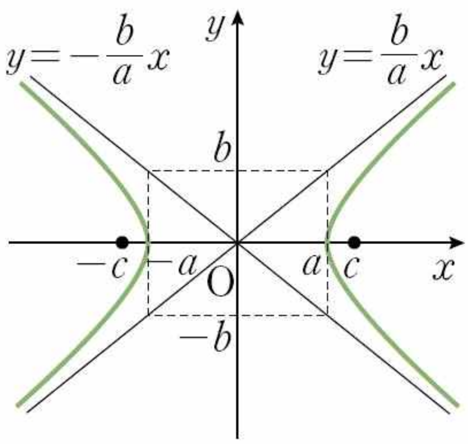
$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

이 식의 양변을 a^2b^2으로 나누면

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

☑ 곡선 위의 점이 어떤 직선에 한없이 가까워질 때, 이 직선을 그 곡선의 '점근선(漸近線)'이라 한다.

$\boxed{3}$ 쌍곡선의 점근선

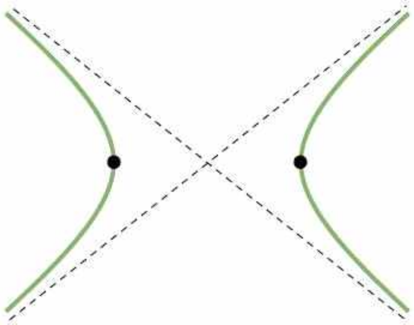


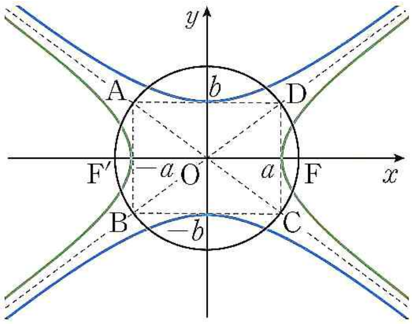
쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$과 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$

의 점근선의 방정식은

$$y=\frac{b}{a}x,\ y=-\frac{b}{a}x$$

✡ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1$ 초점의 위치

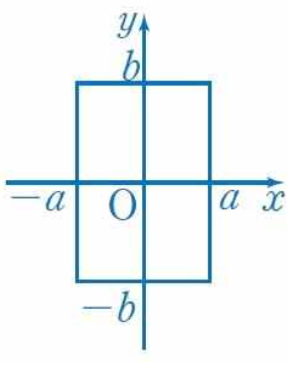




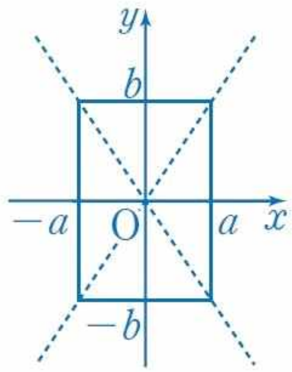
$x=\pm a$, $y=\pm b$로 둘러싸인 □ABCD의 두 대각선을 지름으로 하는 원과 x축, y축과의 교점

✡ 쌍곡선의 작도 방법

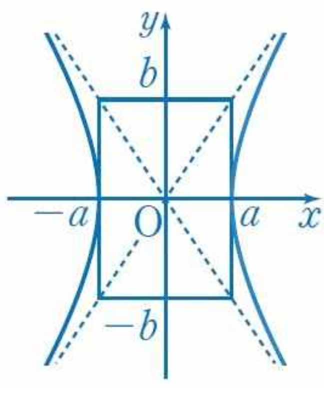
① 직선 $x=\pm a$, $y=\pm b$를 이용하여 각 변이 좌표축과 평행한 직사각형을 그린다.



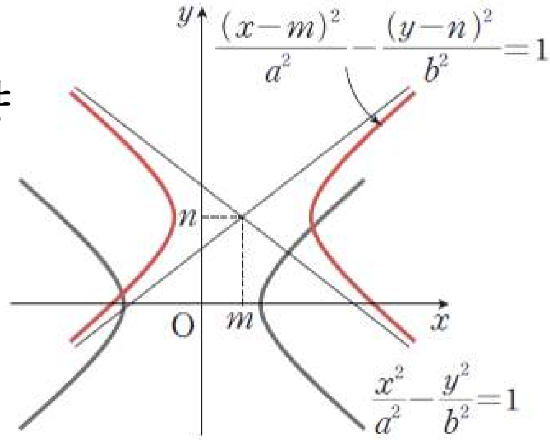
② 대각선을 연장하여 점근선을 그린다.



③ 꼭짓점 $(a,\ 0)$ 또는 $(-a,\ 0)$을 지나면서 점근선에 가까워지도록 쌍곡선의 호를 그린다.



4 쌍곡선의 평행이동 ❶



쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$

이때 두 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$의 초점의 좌표, 꼭짓점의 좌표, 중심의 좌표와 점근선의 방정식은 다음과 같다.

4 쌍곡선의 평행이동 ❷

방정식	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$
초점의 좌표	$(\sqrt{a^2+b^2}, 0)$, $(-\sqrt{a^2+b^2}, 0)$	$(\sqrt{a^2+b^2}+m, n)$, $(-\sqrt{a^2+b^2}+m, n)$
꼭짓점의 좌표	$(a, 0)$, $(-a, 0)$	$(a+m, n)$, $(-a+m, n)$
중심의 좌표	$(0, 0)$	(m, n)
점근선의 방정식	$y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$	$y-n=\frac{b}{a}(x-m)$, $y-n=-\frac{b}{a}(x-m)$

☑ (1) 쌍곡선 $\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=-1$의 초점, 꼭짓점, 중심의 좌표와 점근선의 방정식도 평행이동을 이용하여 구할 수 있다.

4 쌍곡선의 평행이동 ❸

(2) 쌍곡선을 평행이동하여도 그 모양과 크기는 변하지 않으므로 주축의 길이는 변하지 않는다. 즉, 쌍곡선 $\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$의 추축의 길이는 $2a$이고, 쌍곡선 $\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=-1$의 주축의 길이는 $2b$이다.

5 쌍곡선과 직선의 위치 관계 ❶

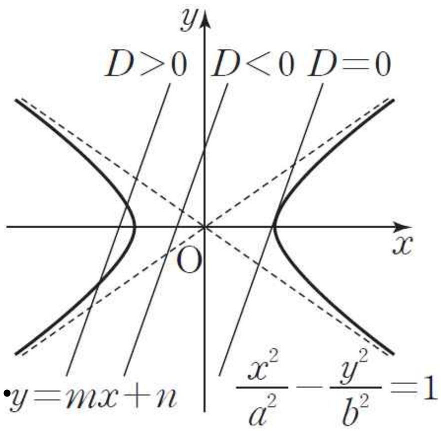
쌍곡선과 직선의 방정식을 각각 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $y=mx+n$이라 할 때, $y=mx+n$을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에 대입하여 정리하면

$$\left(a^2m^2-b^2\right)x^2+2a^2mnx+a^2\left(n^2+b^2\right)=0 \quad \cdots \text{㉠}$$

$a^2m^2-b^2\neq 0$일 때, 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$과 직선 $y=mx+n$의 교점의 개수는 x에 대한 이차방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수와 같으므로

5 쌍곡선과 직선의 위치 관계 ❷

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면,
쌍곡선과 직선의 위치 관계는
다음과 같다.



(1) $D > 0$ $\Leftrightarrow$ 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $D = 0$ $\Leftrightarrow$ 한 점에서 만난다(접한다).

(3) $D < 0$ $\Leftrightarrow$ 만나지 않는다.

$a^2m^2-b^2\neq0$인 경우			$a^2m^2-b^2=0$인 경우
판별식 D	근	쌍곡선과 직선의 위치 관계	$m=\pm\frac{b}{a}$
$D>0$	서로 다른 두 실근	서로 다른 두 점에서 만난다.	$n\neq0$이면 접하지 않고, 한 점에서 만난다.
$D=0$	중근	접한다.	$n=0$이면 주어진 직선은 점근선이다.
$D<0$	허근	만나지 않는다.	

6 쌍곡선의 접선 ❶

(1) 기울기가 주어진 쌍곡선의 접선의 방정식

① 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

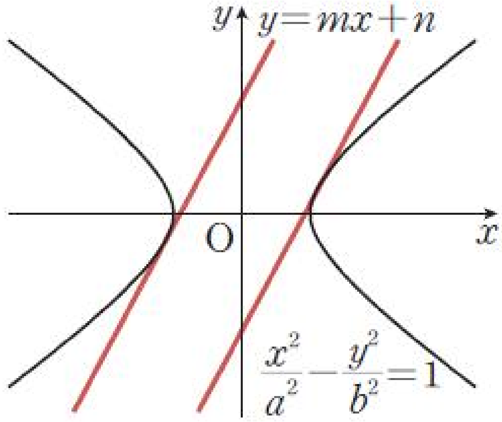
$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}\ \text{(단, } a^2m^2-b^2>0\text{)}$$

② 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$$y=mx\pm\sqrt{b^2-a^2m^2}\ \text{(단, } b^2-a^2m^2>0\text{)}$$

6 쌍곡선의 접선 ❷

☑ 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식을 구해 보자. 구하는 접선의 방정식을 $y = mx + n$이라 하고,



쌍곡선의 방정식 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$에 대입하여 정리하면

$$(a^2m^2 - b^2)x^2 + 2a^2mnx + a^2(n^2 + b^2) = 0$$

위의 x에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D = 4a^2b^2(-a^2m^2 + n^2 + b^2) = 0$$

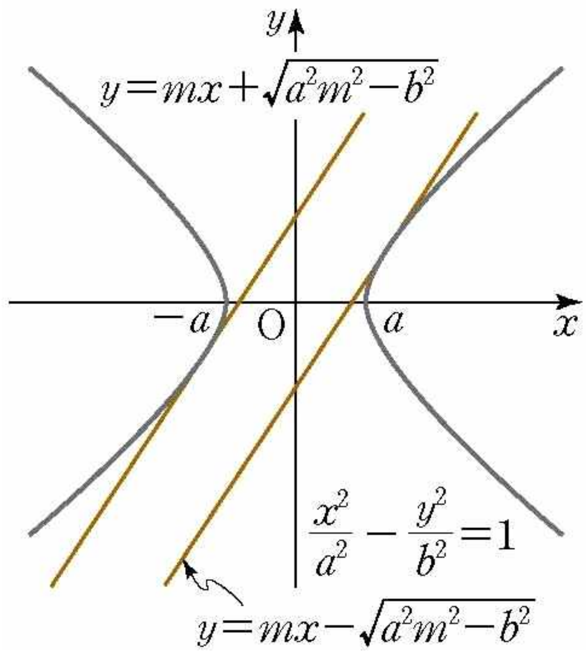
6 쌍곡선의 접선 ❸

이때 $a \neq 0$, $b \neq 0$이므로 $n^2 = a^2m^2 - b^2$에서

$a^2m^2 - b^2 > 0$이면 $n = \pm\sqrt{a^2m^2 - b^2}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$$



6 쌍곡선의 접선 ❹

(2) 쌍곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

① 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의

접선의 방정식은

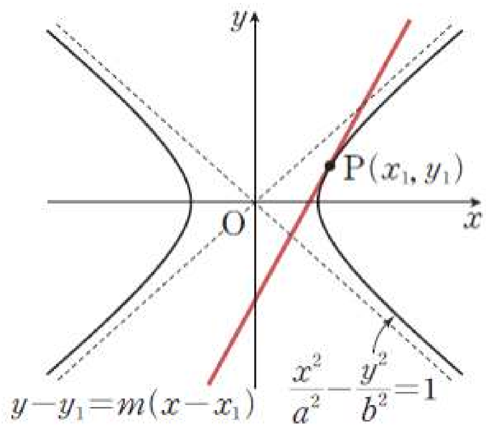
$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$$

② 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의

접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=-1$$

6 쌍곡선의 접선 ❺



☑ 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점

$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식을

구해 보자. $y_1\neq 0$일 때 접선의

기울기를 m $(m\neq 0)$이라 하면 직선의 방정식은

$$y-y_1=m(x-x_1) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 기울기가 m인 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 접선의 방정식은

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡의 2개의 직선 중 하나가 ㉠과 같은 직선이므로

6 쌍곡선의 접선 ❻

y절편의 제곱이 같다. 즉,

$$(-mx_1+y_1)^2=a^2m^2-b^2$$

$$\left(x_1{}^2-a^2\right)m^2-2x_1y_1m+\left(y_1{}^2+b^2\right)=0 \quad \cdots\cdots ㉢$$

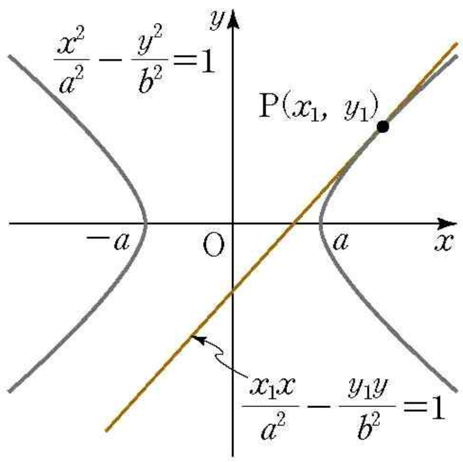
$\dfrac{x_1{}^2}{a^2}-\dfrac{y_1{}^2}{b^2}=1$에서 $x_1{}^2-a^2=\dfrac{a^2y_1{}^2}{b^2}$, $y_1{}^2+b^2=\dfrac{b^2x_1{}^2}{a^2}$

이므로 이를 ㉢에 대입하여 정리하면

$$\left(\frac{a}{b}y_1m-\frac{b}{a}x_1\right)^2=0, \text{ 즉 } m=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$$

이를 ㉠에 대입하고 $\dfrac{x_1{}^2}{a^2}-\dfrac{y_1{}^2}{b^2}=1$임을 이용하여

6 쌍곡선의 접선 ❼



이 직선의 방정식을 정리하면

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1 \quad \cdots\cdots ㉣$$

한편, $y_1=0$일 때 $x_1=a$, $x_1=-a$

이므로 이를 ㉣에 대입하면 접선의

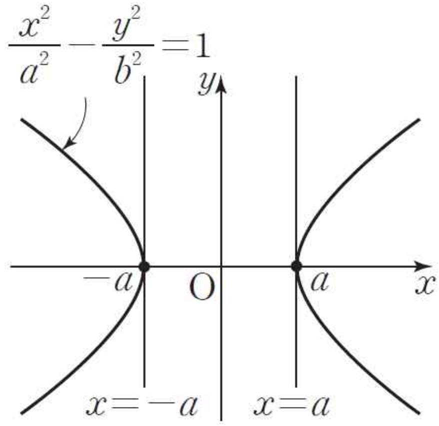
방정식은 각각 $x=a$, $x=-a$이고,

그림과 같이 쌍곡선 위의 두 점

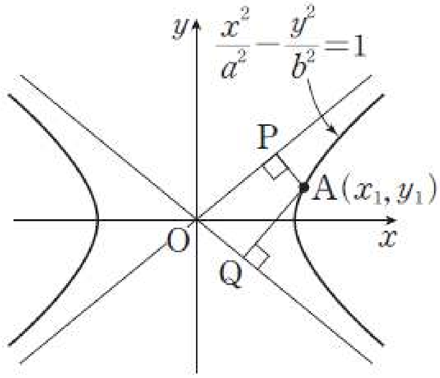
$(a, 0)$, $(-a, 0)$에서의 접선이 각각

직선 $x=a$, $x=-a$이므로

$y_1=0$일 때에도 ㉣이 성립한다.



✡ 쌍곡선의 성질



(1) 쌍곡선 위의 임의 점에서 두 점근선에 각각 내린 두 수선의 길이의 곱은

$\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ 으로 일정하다.

(2) 임의의 접선과 두 점근선으로 만들어지는 삼각형의 넓이는 $|ab|$로 일정하다.

(3) 초점에서 임의의 접선에 내린 수선의 발은 원 $x^2+y^2=a^2$ 위에 있다.

(4) 두 초점을 공유하는 타원과 쌍곡선은 서로 직교한다. 즉, 교점에서 두 곡선에 대한 접선의 기울기의 곱은 -1이다.

7 이차곡선(quadratic curve) ❶

(1) 이차곡선의 뜻 – 원, 포물선, 타원, 쌍곡선

두 일차식의 곱으로 인수분해되지 않는 x, y에 대한 이차방정식

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$$

(2) 이차곡선의 일반형 : $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$

$$\left(\text{단, } k=\frac{C^2}{A}+\frac{D^2}{B}-4E\right)$$

⓪ 두 일차식의 곱으로 인수분해 ⇔ 두 직선

① $A=B(\neq 0)$, $k>0$ ⇔ 원

② $A=0\ (BC\neq 0)$ 또는 $B=0\ (AD\neq 0)$ ⇔ 포물선

③ $A\neq B$, $AB>0$, $k>0$ ⇔ 타원

④ $AB<0$, $k\neq 0$ ⇔ 쌍곡선

7 이차곡선(quadratic curve) ❷

$ax^2+by^2+cx+dy+e=0$이 이차곡선을 나타낼 때,

(1) 이차항의 계수 사이의 관계에 따른 분류

이차곡선	원	포물선	타원	쌍곡선
계수 사이의 관계	$a=b$ $(a\neq0,\ b\neq0)$	$a=0,\ b\neq0$ 또는 $a\neq0,\ b=0$	$ab>0,\ a\neq b$	$ab<0$

☑ 초점이 좌표축에 평행한 직선 위에 있는 이차곡선의 방정식에는 xy항이 없다.

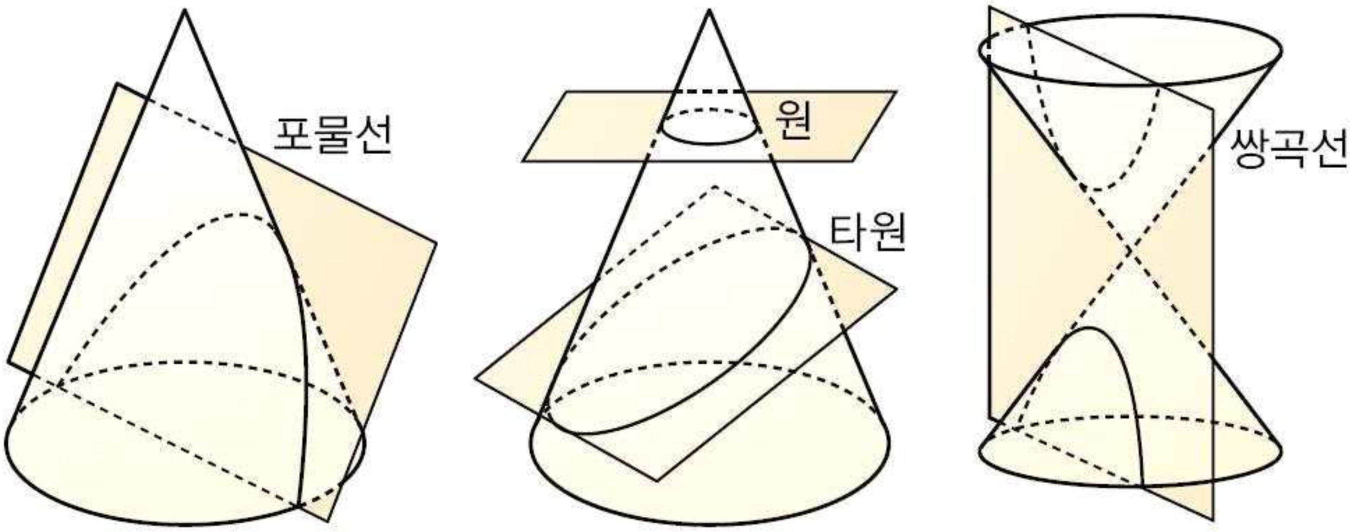
(2) 상수의 조건에 따른 분류

이차곡선	원	포물선	타원	쌍곡선
조건	$a=b,$ $ak>0$	$a=0,\ bc\neq0$ 또는 $b=0,\ ad\neq0$	$a\neq b,$ $ab>0,$ $k>0$	$ab<0,$ $k\neq0$

$\left(\text{단, } k=\dfrac{c^2}{a}+\dfrac{d^2}{b}-4e\right)$

7 이차곡선(quadratic curve) ❻

앞에서 배운 포물선, 타원, 쌍곡선은 원뿔을 자르는 평면의 기울기를 모선의 기울기와 비교할 때 '일치한다(parabole)', '부족하다(ellipsis)', '초과한다(hyperbole)'라는 뜻의 그리스어에서 나온 것이다.



✡ 이차곡선의 매개변수를 이용한 표현

(1) 원 $x^2+y^2=r^2$ ⇨ $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $(0 \le \theta < 2\pi)$

(2) 포물선 : $y^2=4px$ ⇨ $\begin{cases} x = pt^2 \\ y = 2pt \end{cases}$ (t는 실수)

(3) 타원 : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ⇨ $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$ $(0 \le \theta < 2\pi)$

(4) 쌍곡선 : $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ⇨ $\begin{cases} x = a\sec\theta \\ y = b\tan\theta \end{cases}$

$\left(0 \le \theta < 2\pi,\ \theta \ne \dfrac{\pi}{2},\ \theta \ne \dfrac{3}{2}\pi\right)$

✡ 이차곡선 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식

(1) x^2 대신에 ⇨ x_1x, x 대신에 ⇨ $\dfrac{x_1+x}{2}$

(2) y^2 대신에 ⇨ y_1y, y 대신에 ⇨ $\dfrac{y_1+y}{2}$

✡ 이차곡선 밖의 점 $(x_0,\ y_0)$에서의 극선의 방정식

☑ 극선의 방정식 : 밖의 점에서 이차곡선에 그은 두 접선의 접점을 연결한 직선.

(1) x^2 대신에 ⇨ x_0x, x 대신에 ⇨ $\dfrac{x_0+x}{2}$

(2) y^2 대신에 ⇨ y_0y, y 대신에 ⇨ $\dfrac{y_0+y}{2}$

✡ 이차곡선에 그은 기울기가 m인 접선의 방정식

(1) 포물선 $y^2 = 4px$ ⇨ $y = mx + \dfrac{p}{m}$

$x^2 = 4py$ ⇨ $y = mx - m^2 p$

(2) 타원 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ⇨ $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$

(3) 원 $x^2 + y^2 = r^2$ ⇨ $y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$

(4) 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ⇨ $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ ⇨ $y = mx \pm \sqrt{b^2 - a^2m^2}$

✡ 직경(diameter)

☑ 직경 : 이차곡선에 그은 기울기가 m인 현(직선)들의 중점이 그리는 도형

(1) 포물선 $y^2 = 4px$ ⇨ $y = \dfrac{2p}{m}$

(2) 타원 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ⇨ $y = -\dfrac{b^2}{a^2m}x$

(3) 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \pm 1$ ⇨ $y = \dfrac{b^2}{a^2m}x$

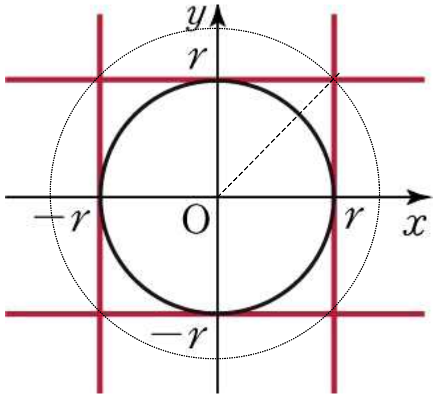
(4) 쌍곡선 $xy = a$ ⇨ $y = -mx$

✡ 이차곡선에 수직으로 접하는 두 접선의 교점이 그리는 도형

(1) 포물선 $y^2 = 4px$ ⇨ $x = -p$ (준선)

(2) 타원 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ⇨ $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

(3) 원 $x^2 + y^2 = r^2$ ⇨ $x^2 + y^2 = 2r^2$



(4) 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

⇨ $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$