Ⅰ_1. 지수와 로그

[12수학Ⅰ01-01] 거듭제곱과 거듭제곱근의 뜻을 알고,
그 성질을 이해한다.
[12수학Ⅰ01-02] 지수가 유리수, 실수까지 확장될 수 있음을
이해한다.
[12수학Ⅰ01-03] 지수법칙을 이해하고,
이를 이용하여 식을 간단히 나타낼 수 있다.
[12수학Ⅰ01-04] 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.
[12수학Ⅰ01-05] 상용로그를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

1 거듭제곱근 ❶

(1) a의 n제곱근

실수 a와 2이상의 자연수 n에 대하여
n제곱하여 a가 되는 수, 즉 방정식 $x^n = a$의 근을
'a의 n제곱근'이라 한다.
이때 a의 제곱근, 세제곱근, 네제곱근, $\cdots$ 을 통틀어
'a의 거듭제곱근'이라고 한다.

☑ 실수 $a\,(a \neq 0)$의 n제곱근은 복소수의 범위에서
n개가 있음이 알려져 있다.

1 거듭제곱근 ❷

(2) $\sqrt[n]{a}$ (n제곱근 a)

n이 2이상의 자연수일 때,

실수 a의 n제곱근 중 실수인 것은

기호 $\sqrt[n]{a}$를 이용하여 다음과 같이 나타낸다.

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다.

☑ ① n이 짝수이고 $a>0$일 때,

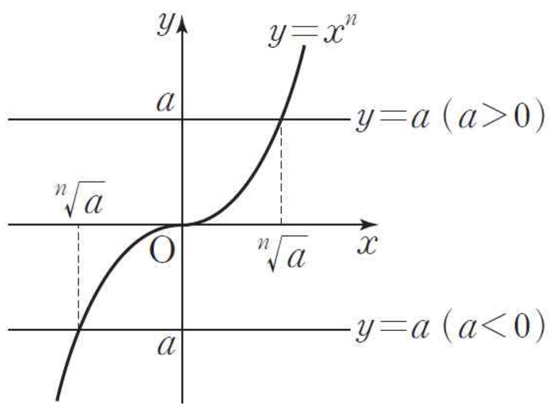
$\sqrt[n]{a}$은 a의 양수인 n제곱근이다.

② $x^n=0$의 근은 0이므로 $\sqrt[n]{0}=0$이다.

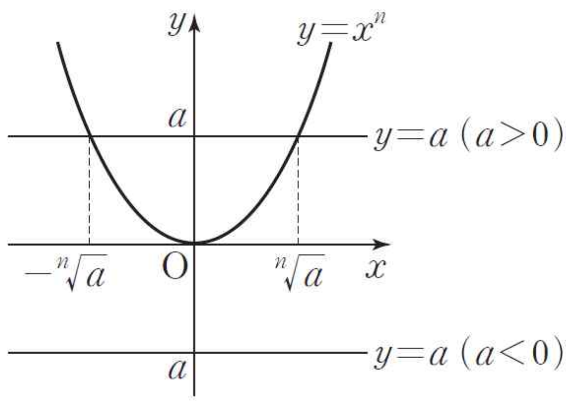
1 거듭제곱근 ❸

☑ n이 2이상의 자연수일 때, 실수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 방정식 $x^n=a$의 근 중에서 실수인 것이므로 이는 함수 $y=x^n$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표와 같다. 이때 이 실수를 기호 $\sqrt[n]{a}$를 이용하여 나타낸다.

(i) n이 홀수일 때



(ii) n이 짝수일 때



1 거듭제곱근 ❹

예 ① 8의 세제곱근 중에서 실수인 것은 방정식 $x^3=8$의 근 중에서 실수인 것으로 2이다. ∴ $\sqrt[3]{8}=2$

② 16의 네제곱근 중에서 실수인 것은 방정식 $x^4=16$의 근 중에서 실수인 것으로 ± 2이다. ∴ $\sqrt[4]{16}=\pm 2$

1 거듭제곱근 ❺

(3) 거듭제곱근의 성질

$a>0$, $b>0$이고 m, n이 2이상의 자연수일 때,

① $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$ ② $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ ③ $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

④ $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$ ⑤ $\sqrt[m]{a\sqrt[n]{b}}=\sqrt[mn]{ab}$

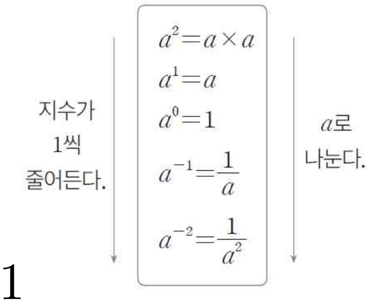
⑥ $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ (단, p는 자연수)

예 ① $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3=2$ ② $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2\times 4}=\sqrt[3]{2^3}=2$

③ $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{\dfrac{16}{2}}=\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2$

④ $\left(\sqrt[6]{9}\right)^3=\sqrt[6]{9^3}=\sqrt[6]{3^6}=3$ ⑤ $\sqrt{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[6]{2}$

2 지수가 정수일 때의 정의와 성질 ❶



(1) 지수가 0 또는 음의 정수일 때의 정의

$a \neq 0$이고 n이 자연수일 때,

① $a^0 = 1$ ② $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$

☑ 다음 지수법칙이 모든 정수 m, n에 대하여 성립한다고 가정하자. $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (단, $a \neq 0$)

① $m=0$일 때는 $a^0 \times a^n = a^{0+n} = a^n$이어야 하므로 $a^0 = 1$로 정의한다.

② $m = -n$일 때는 $a^{-n} \times a^n = a^{(-n)+n} = a^0 = 1$이어야 하므로 $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$로 정의한다. (단, n은 자연수)

2 지수가 정수일 때의 정의와 성질 ❷

(2) 지수가 정수일 때의 지수법칙

$a \neq 0$, $b \neq 0$이고, m, n이 정수일 때,

① $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ② $a^m \div a^n = a^{m-n}$

③ $(a^m)^n = a^{mn}$ ④ $(a \times b)^n = a^n \times b^n$

3 지수가 유리수일 때의 정의와 성질

(1) 지수가 유리수일 때의 정의

$a > 0$이고 m은 정수, n은 2이상의 자연수일 때,

① $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$　　② $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

☑ 지수가 유리수일 때는 밑 a가 양수, 즉 $a > 0$임에 유의해야 한다.

(2) 지수가 유리수일 때의 지수법칙

$a > 0$, $b > 0$이고 r, s가 유리수일 때,

① $a^r \times a^s = a^{r+s}$　　② $a^r \div a^s = a^{r-s}$

③ $\left(a^r\right)^s = a^{rs}$　　④ $(a \times b)^r = a^r \times b^r$

4 지수가 실수일 때의 정의와 성질

(1) 지수가 실수일 때의 정의

지수가 무리수인 경우는 $3^{\sqrt{2}}$을 예로 생각해 보자. 무리수 $\sqrt{2} = 1.414\cdots$ 에서 $\sqrt{2}$에 가까워지는 유리수 $1, 1.4, 1.41, 1.414, \cdots$ 를 지수로 가지는 수 $3^1, 3^{1.4}, 3^{1.41}, 3^{1.414}, \cdots$ 은 일정한 수에 한없이 가까워진다는 사실이 알려져 있다.

이 일정한 수를 $3^{\sqrt{2}}$로 정의한다. 이와 같은 방법으로 $a > 0$일 때, 임의의 실수 x에 대하여 a^x을 정의한다.

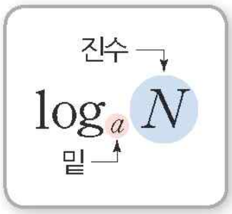
(2) 지수가 실수일 때의 지수법칙

$a > 0$, $b > 0$이고 x, y가 실수일 때, ① $a^x \times a^y = a^{x+y}$

② $a^x \div a^y = a^{x-y}$ ③ $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$ ④ $(a \times b)^x = a^x \times b^x$

5 로그의 정의 ❶

$a \neq 1$, $a > 0$, $N > 0$일 때, $a^x = N$을 만족시키는 실수 x를 기호로 '$\log_a N$'으로 나타낸다. 즉,



$$a^x = N \Leftrightarrow x = \log_a N$$

이때 $\log_a N$에서 a를 '밑', N을 '진수'라 하고, $\log_a N$을 'a를 밑으로 하는 N의 로그'라고 한다.

☑ 기호 log는 logarithm의 약자이다.

(1) $a \neq 1$, $a > 0$, $N > 0$일 때, $a^x = N$을 만족시키는 실수 x는 오직 하나 존재한다.

(2) $\log_a N$으로 쓸 때는 $a \neq 1$, $a > 0$, $N > 0$임을 의미한다.

5 로그의 정의 ❷

(3) $a \neq 1$, $a > 0$일 때, $a^0 = 1$, $a^1 = a$이므로

$$\log_a 1 = 0, \ \log_a a = 1$$

예 ① $2^3 = 8 \Leftrightarrow \log_2 8 = 3$

② $\log_2 1 = 0$, $\log_2 2 = 1$

$\boxed{6}$ 로그의 성질 ❶

$a \neq 1$, $a > 0$이고 $M > 0$, $N > 0$일 때,

(1) $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

(2) $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

(3) $\log_a M^k = k \log_a M$ (단, k은 실수)

☑ $\log_a M = m$, $\log_a N = n$이라 하면 $a^m = M$, $a^n = N$

(1) $MN = a^m \times a^n = a^{m+n}$이므로

$\log_a MN = m + n = \log_a M + \log_a N$

$\boxed{6}$ 로그의 성질 ❷

(2) $\dfrac{M}{N} = a^m \div a^n = a^{m-n}$ 이므로

$\log_a \dfrac{M}{N} = m - n = \log_a M - \log_a N$

(3) $M^k = \left(a^m\right)^k = a^{mk}$이므로

$\log_a M^k = mk = k \log_a M$

$\boxed{\text{예}}$ ① $\log_2 6 = \log_2(2 \times 3) = \log_2 2 + \log_2 3 = 1 + \log_2 3$

② $\log_2 \dfrac{3}{2} = \log_2 3 - \log_2 2 = \log_2 3 - 1$

③ $\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5\log_2 2 = 5$

7 로그의 밑의 변환 ❶

(1) 로그의 밑의 변환

$a \neq 1$, $a > 0$, $b > 0$, $c \neq 1$, $c > 0$일 때,

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

☑ $\log_a b = x$, $\log_c a = y$로 놓으면 $a^x = b$, $c^y = a$이므로

지수법칙에 의하여 $b = a^x = (c^y)^x = c^{xy}$이다. 이때

로그의 정의에 의하여 $xy = \log_c b$이므로

$\log_a b \times \log_c a = \log_c b$ $\cdots$ ㉠ 한편 $a \neq 1$에서 $\log_c a \neq 0$

이므로 ㉠의 양변을 $\log_c a$로 나누면 $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

7 로그의 밑의 변환 ❷

예 ① $\log_2 3 = \dfrac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}$

② $\log_8 2 = \dfrac{\log_2 2}{\log_2 8} = \dfrac{1}{\log_2 2^3} = \dfrac{1}{3\log_2 2} = \dfrac{1}{3}$

(2) 로그의 밑의 변환의 활용

$a \neq 1$, $a > 0$, $b > 0$일 때,

① $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ (단, $b \neq 1$)

② $\log_a b \times \log_b c = \log_a c$ (단, $b \neq 1$, $c > 0$)

③ $\log_{a^m} b^n = \dfrac{n}{m}\log_a b$ (단, m, n은 실수이고 $m \neq 0$)

7 로그의 밑의 변환 ❸

④ $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ (단, $b \neq 1$, $c > 0$)

☑ ① $\log_a b = \dfrac{\log_b b}{\log_b a} = \dfrac{1}{\log_b a}$

② $\log_a b \times \log_b c = \log_a b \times \dfrac{\log_a c}{\log_a b} = \log_a c$

③ $\log_{a^m} b^n = \dfrac{\log_a b^n}{\log_a a^m} = \dfrac{n \log_a b}{m \log a_a} = \dfrac{n}{m} \log_a b$

④ $c \neq 1$일 때, $a = c^x$이라 하면 $x = \log_c a$이므로

$$a^{\log_b c} = \left(c^{\log_c a}\right)^{\log_b c} = c^{\log_c a \times \log_b c} = c^{\log_b a}$$

7 로그의 밑의 변환 ❹

예 ① $\log_2 3 = \dfrac{\log_3 3}{\log_3 2} = \dfrac{1}{\log_3 2}$

② $\log_2 3 \times \log_3 5 = \log_2 3 \times \dfrac{\log_2 5}{\log_2 3} = \log_2 5$

③ $\log_4 8 = \log_{2^2} 2^3 = \dfrac{3}{2} \log_2 2 = \dfrac{3}{2}$

④ $2^{\log_2 3} = 3^{\log_2 2} = 3$

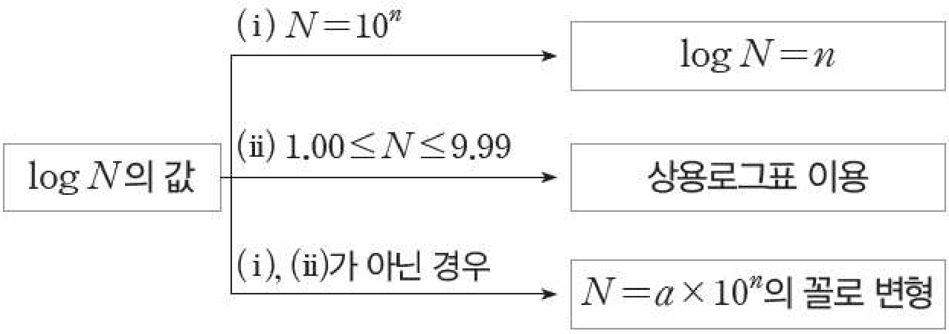
[8] 상용(常用)로그 ❶

(1) 상용로그의 뜻

밑을 10으로 하는 로그를 상용로그라고 한다. 이때 상용로그 $\log_{10} N$은 보통 밑 10을 생략하여 ‘$\log N$’과 같이 나타낸다.

[예] ① $\log 10 = \log_{10} 10 = 1$ ② $\log \frac{1}{100} = \log_{10} 10^{-2} = -2$

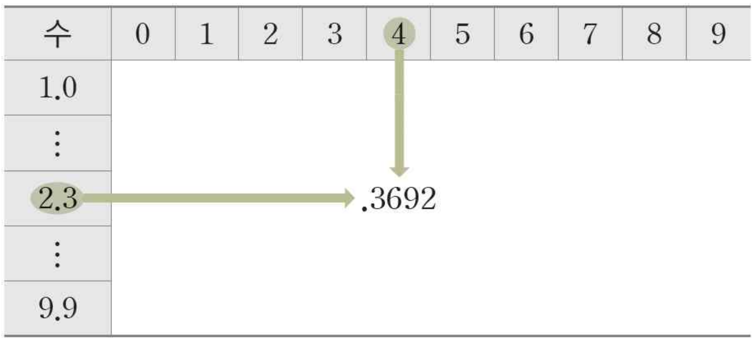
③ $\log \sqrt{10} = \log_{10} 10^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$



[8] 상용(常用)로그 ❷

(2) 상용로그의 값 구하기

① 상용로그표를 이용한 상용로그의 값 구하기



상용로그표에는 0.01의 간격으로 1.00부터 9.99까지의 수에 대한 상용로그의 값이 주어져 있으므로 이 값에 대한 상용로그의 값은 상용로그표를 이용하여 구할 수 있다. 예를 들어 상용로그표를 이용하여 $\log 2.34$의 값을 구하면 2.3의 가로행과 4의 세로열이 만나는 곳의 수 .3692를 찾으면 된다. 즉, $\log 2.34 = 0.3692$이다.

8 상용(常用)로그 ❸

② 일반적인 양의 상용로그의 값 구하기

양수 N은

$$N = a \times 10^{n} \ (\text{단, } 1 \le a < 10,\ n\text{은 정수})$$

의 꼴로 나타낼 수 있다. 그러므로 N의 상용로그의 값은 ①을 이용하여

$$\log N = \log\left(a \times 10^{n}\right) = n + \log a \ (0 \le \log a < 1)$$

로 구한다.

(3) 상용로그의 활용

상용로그를 이용하면 2^{30}, $\sqrt[3]{2}$ 등과 같은 수를 10진법으로 나타내어 어림한 값을 구할 수 있다.

8 상용(常用)로그 ❹

예 2^{30}의 어림한 값을 구하면 다음과 같다.

① 상용로그 $\log 2^{30}$의 값 구하기

상용로그표에서 $\log 2 = 0.3010$이므로

$$\log 2^{30} = 30 \log 2 = 30 \times 0.3010 = 9.03 = 9 + 0.03$$

② 상용로그의 값으로부터 진수 구하기

상용로그표를 이용하여 $\log 1.07 = 0.03$으로 계산하면

$$9 + 0.03 = \log 10^{9} + \log 1.07 = \log\left(1.07 \times 10^{9}\right)$$

③ 어림한 값 구하기

위의 ①과 ②로부터 $\log 2^{30} = \log\left(1.07 \times 10^{9}\right)$이므로

2^{30}은 어림잡아 1.07×10^{9}과 같다.