



www.ebsi.co.kr

수능특강 수학영역 수학 II



정답과 풀이

01 함수의 극한

유제

본문 5~11쪽

1 ③ 2 ④ 3 ① 4 6 5 ④
6 ② 7 ③ 8 2

Level 1 기초 연습

본문 12쪽

1 ④ 2 2 3 ③ 4 ① 5 ①

Level 2 기본 연습

본문 13~14쪽

1 ① 2 ③ 3 ③ 4 ④ 5 ②
6 ⑤ 7 20 8 ④

Level 3 실력 완성

본문 15쪽

1 ① 2 ② 3 ③

03 미분계수와 도함수

유제

본문 31~37쪽

1 ② 2 ③ 3 ② 4 3 5 ③
6 990 7 ④ 8 ①

Level 1 기초 연습

본문 38~39쪽

1 ④ 2 ③ 3 ② 4 ① 5 ⑤
6 21 7 ② 8 ① 9 ④ 10 ①

Level 2 기본 연습

본문 40~41쪽

1 ⑤ 2 ① 3 ② 4 ④ 5 ③
6 ⑤ 7 17 8 ③

Level 3 실력 완성

본문 42~43쪽

1 ⑤ 2 ④ 3 ④ 4 10 5 ④
6 ③

02 함수의 연속

유제

본문 19~23쪽

1 ④ 2 5 3 ② 4 ③ 5 ④

Level 1 기초 연습

본문 24쪽

1 ④ 2 ② 3 ③ 4 ②

Level 2 기본 연습

본문 25~26쪽

1 ③ 2 ④ 3 ④ 4 3 5 ④
6 ③ 7 9 8 3

Level 3 실력 완성

본문 27쪽

1 ④ 2 ② 3 ①

04 도함수의 활용 (1)

유제

본문 47~53쪽

1 ③ 2 ② 3 ③ 4 ⑤ 5 ⑤
6 ② 7 ⑤

Level 1 기초 연습

본문 54쪽

1 ③ 2 ④ 3 ① 4 ②

Level 2 기본 연습

본문 55~56쪽

1 ③ 2 ④ 3 23 4 ④ 5 21
6 ① 7 ④ 8 20

Level 3 실력 완성

본문 57쪽

1 191 2 ⑤ 3 ②

05 도함수의 활용 (2)

유제

본문 61~65쪽

- 1 16 2 ③ 3 ② 4 ④ 5 ⑤
6 ①

Level 1 기초 연습

본문 66쪽

- 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4 ③

Level 2 기본 연습

본문 67~68쪽

- 1 ⑤ 2 ③ 3 ④ 4 ④ 5 ⑤
6 ③ 7 ③ 8 70

Level 3 실력 완성

본문 69쪽

- 1 ⑤ 2 ⑤ 3 75

07 정적분의 활용

유제

본문 89~97쪽

- 1 ④ 2 ⑤ 3 24 4 ① 5 ②
6 8 7 ④ 8 10

Level 1 기초 연습

본문 98~99쪽

- 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4 ② 5 ③
6 ② 7 ④ 8 ② 9 ④

Level 2 기본 연습

본문 100~101쪽

- 1 ③ 2 ③ 3 ④ 4 ④ 5 ②
6 ③ 7 ② 8 ⑤

Level 3 실력 완성

본문 102쪽

- 1 ② 2 ③ 3 ③

06 부정적분과 정적분

유제

본문 73~81쪽

- 1 ④ 2 ③ 3 ② 4 ④ 5 ①
6 ④ 7 ② 8 ③ 9 ③ 10 ①

Level 1 기초 연습

본문 82~83쪽

- 1 ① 2 ③ 3 ④ 4 ① 5 ⑤
6 ⑤ 7 ② 8 ⑤ 9 ① 10 ⑤

Level 2 기본 연습

본문 84~85쪽

- 1 ② 2 ② 3 ③ 4 ③ 5 ④
6 ④ 7 ③ 8 ④

Level 3 실력 완성

본문 86쪽

- 1 ① 2 ③ 3 ①



01 함수의 극한

유제

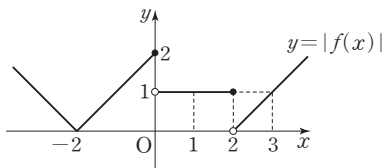
본문 5~11쪽

- 1 ③ 2 ④ 3 ① 4 6 5 ④
6 ② 7 ③ 8 2

- 1 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax-3) = 2a-3$
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x+a) = -2+a$
 3 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) - 4 \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$ 에서
 $3(2a-3) - 4(-2+a) = 2$
 $6a-9+8-4a=2, 2a=3$
 따라서 $a = \frac{3}{2}$

답 ③

- 2 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} |f(x)| &= 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} |f(x)| &= 1, \lim_{x \rightarrow 1^+} |f(x)| = 1 \text{ 이므로} \\ \lim_{x \rightarrow 1} |f(x)| &= 1 \\ |f(2)| &= 1 \\ \text{따라서} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} |f(x)| + \lim_{x \rightarrow 1} |f(x)| + |f(2)| &= 2 + 1 + 1 = 4 \end{aligned}$$

답 ④

- 3 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x-1} = \frac{2+2}{2-1} = 4$
 $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2+x) = 2^2+2=6$
 따라서
 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2+1)g(x)}{4f(x)-3x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2+1) \times \lim_{x \rightarrow 2} g(x)}{4 \lim_{x \rightarrow 2} f(x) - 3 \lim_{x \rightarrow 2} x}$

$$\begin{aligned} &= \frac{(2^2+1) \times 6}{4 \times 4 - 3 \times 2} \\ &= \frac{30}{10} = 3 \end{aligned}$$

답 ①

- 4 조건 (나)에서 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x(x-2)} = 1$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{g(x)}{x(x-2)} \times (x-2) \right\}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x(x-2)} \times \lim_{x \rightarrow 0} (x-2)$
 $= 1 \times (-2) = -2$
 조건 (가)에서 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 8$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2+5f(x)}{x^2-3xg(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x^2+5f(x)}{x^2}}{\frac{x^2-3xg(x)}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + \frac{5f(x)}{x^2}}{1 - \frac{3g(x)}{x}} \\ &= \frac{2 + 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}}{1 - 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x}} \\ &= \frac{2 + 5 \times 8}{1 - 3 \times (-2)} = 6 \end{aligned}$$

답 6

- 5 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-\sqrt{3x^2-2}}{x^3+1}$
 $= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(1-\sqrt{3x^2-2})(1+\sqrt{3x^2-2})}{(x^3+1)(1+\sqrt{3x^2-2})}$
 $= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-(3x^2-2)}{(x^3+1)(1+\sqrt{3x^2-2})}$
 $= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-3(x+1)(x-1)}{(x+1)(x^2-x+1)(1+\sqrt{3x^2-2})}$
 $= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-3(x-1)}{(x^2-x+1)(1+\sqrt{3x^2-2})}$
 $= \frac{-3 \times (-2)}{3 \times 2} = 1$

답 ④

$$\begin{aligned}
 6 \quad & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{x^2-4} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2}{x^2-4} \times \frac{2-x}{2x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{x^2}{(x+2)(x-2)} \times \frac{-(x-2)}{2x} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x}{2(x+2)} \\
 &= \frac{-2}{2 \times 4} = -\frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

답 ②

$$\begin{aligned}
 7 \quad & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax-2a}{x^2-x+b} = 3 \text{에서} \\
 & x \rightarrow 2 \text{일 때 (분자)} \rightarrow 0 \text{이고 } 0 \text{이 아닌 극한값이 존재하므로} \\
 & \text{(분모)} \rightarrow 0 \text{이어야 한다.} \\
 & \text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} (x^2-x+b) = 4-2+b=0 \text{에서} \\
 & b = -2 \text{이므로}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax-2a}{x^2-x+b} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(x-2)}{x^2-x-2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(x-2)}{(x+1)(x-2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a}{x+1} = \frac{a}{3}
 \end{aligned}$$

따라서 $\frac{a}{3} = 3$ 에서 $a = 9$ 이므로

$$a+b = 9 + (-2) = 7$$

답 ③

$$\begin{aligned}
 8 \quad & \text{모든 양수 } x \text{에 대하여 } x^2(x+1) > 0 \text{이므로} \\
 & \text{주어진 부등식의 각 변을 } x^2(x+1) \text{로 나누면} \\
 & \frac{2x^3-3}{x^2(x+1)} \leq \frac{f(x)}{x^2} \leq \frac{2x^3+1}{x^2(x+1)} \\
 & \text{이때 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3-3}{x^2(x+1)} = 2, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3+1}{x^2(x+1)} = 2 \text{이므로 함수} \\
 & \text{의 극한의 대소 관계에 의하여}
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 2$$

따라서

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)+4x^2}{3x^2-x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{f(x)}{x^2}+4}{3-\frac{1}{x}} \\
 &= \frac{2+4}{3-0} = 2
 \end{aligned}$$

답 2

Level 1 기초 연습

본문 12쪽

1 ④ 2 2 3 ③ 4 ① 5 ①

$$1 \quad f(x) = \begin{cases} x+1 & (x \leq a) \\ 3x^2-x & (x > a) \end{cases} \text{에서}$$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 의 값이 존재하려면

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) \text{이어야 하므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} (x+1) = a+1$$

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} (3x^2-x) = 3a^2-a$$

$$\text{에서 } a+1 = 3a^2-a$$

$$3a^2-2a-1=0, (3a+1)(a-1)=0$$

$$a = -\frac{1}{3} \text{ 또는 } a = 1$$

따라서 구하는 모든 실수 a 의 값의 합은

$$-\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$$

답 ④

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{20}{x+3} = \frac{20}{5} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{4x+1} = \sqrt{9} = 3$$

따라서

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)+2g(x)}{2f(x)-g(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} f(x) + 2 \lim_{x \rightarrow 2} g(x)}{2 \lim_{x \rightarrow 2} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2} g(x)} \\
 &= \frac{4 + 2 \times 3}{2 \times 4 - 3} = 2
 \end{aligned}$$

답 2

$$\begin{aligned}
 3 \quad & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2+16}-5}{x-3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x^2+16}-5)(\sqrt{x^2+16}+5)}{(x-3)(\sqrt{x^2+16}+5)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+16-25}{(x-3)(\sqrt{x^2+16}+5)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(\sqrt{x^2+16}+5)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{\sqrt{x^2+16}+5} \\
 &= \frac{3+3}{\sqrt{25+16}} = \frac{3}{5}
 \end{aligned}$$

답 ③



- 4 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{2x^2 + ax + 4} = b$ 에서
 $x \rightarrow -1$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하
 므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow -1} (2x^2 + ax + 4) = 2 - a + 4 = 0$ 에서
 $a = 6$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{2x^2 + ax + 4} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{2x^2 + 6x + 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-5)}{2(x+1)(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-5}{2(x+2)} \\ &= \frac{-6}{2 \times 1} = -3 \end{aligned}$$

따라서 $b = -3$ 이므로
 $a + b = 6 + (-3) = 3$

답 ①

- 5 $f(x)$ 는 다항함수이므로 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^2}{x+1} = 3$ 에서
 $f(x) - x^2 = 3x + a$ (a 는 상수)로 놓을 수 있다.
 $f(x) = x^2 + 3x + a$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{f(x)} = 2$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2 + 3x + a} = \frac{2}{4+a}$$

즉, $\frac{2}{4+a} = 2$ 이므로

$$8 + 2a = 2, a = -3$$

따라서 $f(x) = x^2 + 3x - 3$ 이므로

$$f(-1) = 1 - 3 - 3 = -5$$

답 ①

Level 2 기본 연습

본문 13~14쪽

- 1 ① 2 ③ 3 ③ 4 ④ 5 ②
 6 ⑤ 7 20 8 ④

- 1 $f(x) = \begin{cases} -x + 4a & (x \leq 0) \\ 2x + 3 & (x > 0) \end{cases}$,
 $g(x) = f(x) \{f(-x) + a\}$ 에서

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 의 값이 존재하려면

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) \text{이어야 한다.}$$

$t = -x$ 라 하면 $x \rightarrow 0-$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) \{f(-x) + a\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 0-} \{f(-x) + a\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) \times \left\{ \lim_{x \rightarrow 0-} f(-x) + a \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) \times \left\{ \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) + a \right\} \\ &= 4a \times (3 + a) \\ &= 4a^2 + 12a \end{aligned}$$

$t = -x$ 라 하면 $x \rightarrow 0+$ 일 때 $t \rightarrow 0-$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \{f(-x) + a\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 0+} \{f(-x) + a\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \times \left\{ \lim_{x \rightarrow 0+} f(-x) + a \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \times \left\{ \lim_{t \rightarrow 0-} f(t) + a \right\} \\ &= 3 \times (4a + a) \\ &= 15a \end{aligned}$$

$$\text{즉, } 4a^2 + 12a = 15a \text{에서}$$

$$4a^2 - 3a = 0, a(4a - 3) = 0$$

$$a = 0 \text{ 또는 } a = \frac{3}{4}$$

따라서 구하는 양수 a 의 값은 $\frac{3}{4}$ 이다.

답 ①

다른 풀이

$$f(x) = \begin{cases} -x + 4a & (x \leq 0) \\ 2x + 3 & (x > 0) \end{cases} \text{에서}$$

$$f(-x) = \begin{cases} -2x + 3 & (x < 0) \\ x + 4a & (x \geq 0) \end{cases}$$

$$g(x) = f(x) \{f(-x) + a\} \text{에서}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 의 값이 존재하려면

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) \text{이어야 한다.}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) \{f(-x) + a\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-} (-x + 4a)(-2x + 3 + a) \\ &= 4a(3 + a) \\ &= 4a^2 + 12a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \{f(-x) + a\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} (2x + 3)(x + 4a + a) \\ &= 3 \times 5a \\ &= 15a \end{aligned}$$

$$\text{즉, } 4a^2 + 12a = 15a \text{에서}$$

$$4a^2 - 3a = 0, a(4a - 3) = 0$$

$$a = 0 \text{ 또는 } a = \frac{3}{4}$$

따라서 구하는 양수 a 의 값은 $\frac{3}{4}$ 이다.

2 \neg . $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 와 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)}$ 의 값이 각각 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = \beta \quad (\alpha, \beta \text{는 실수}) \text{라 하면}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} g(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \left\{ f(x) \times \frac{g(x)}{f(x)} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} \\ &= \alpha\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \{ f(x) + g(x) \} &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) \\ &= \alpha + \alpha\beta \end{aligned}$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow a} \{ f(x) + g(x) \}$ 의 값이 존재한다. (참)

⊥. [반례] $f(x) = x - a, g(x) = \frac{1}{x - a}$ 로 놓으면

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} 1 = 1$$

이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

그러나 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x - a}$ 의 값은 존재하지 않는다.
(거짓)

⊃. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 의 값이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha \quad (\alpha \text{는 실수}) \text{라 하고}$$

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{로 놓으면}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \infty, \text{ 즉 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{h(x)} = 0 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} g(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \left\{ f(x) \times \frac{g(x)}{f(x)} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left\{ f(x) \times \frac{1}{h(x)} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{h(x)} \\ &= \alpha \times 0 = 0 \end{aligned}$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ 이다. (참)

이상에서 옳은 것은 \neg , \supset 이다.

답 ③

$$3 \quad f(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - 3x - a^2 + 3a}{x^2 + ax - 2a^2}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x+a-3)}{(x-a)(x+2a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x+a-3}{x+2a} \\ &= \frac{a+a-3}{a+2a} = \frac{2a-3}{3a} \end{aligned}$$

따라서 $f(a) = \frac{2}{3} - \frac{1}{a}$ 이므로

$1 \leq a \leq 3$ 에서 함수 $f(a)$ 는

$$a=3 \text{일 때 최대이고 최댓값은 } \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3},$$

$$a=1 \text{일 때 최소이고 최솟값은 } \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

$$\frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right) = 0$$

답 ③

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 2x + 13}{(x+3)(x-a)} = b \text{에서}$$

(i) $a \neq 1$ 일 때,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 2x + 13}{(x+3)(x-a)} &= \frac{16}{4(1-a)} \\ &= \frac{4}{1-a} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{4}{1-a} = b \text{이므로 } (1-a)b = 4$$

a, b 는 정수이므로

$$1-a=4, b=1 \text{ 또는 } 1-a=2, b=2 \text{ 또는}$$

$$1-a=1, b=4 \text{ 또는 } 1-a=-1, b=-4 \text{ 또는}$$

$$1-a=-2, b=-2 \text{ 또는 } 1-a=-4, b=-1$$

따라서 구하는 정수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는

$$(-3, 1), (-1, 2), (0, 4), (2, -4), (3, -2),$$

$$(5, -1) \text{이고, 그 개수는 6이다.}$$

(ii) $a=1$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 2x + 13}{(x+3)(x-a)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 2x + 13}{(x+3)(x-1)} \text{에서}$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이지만 (분자) $\rightarrow 16$ 이므로 극한값이 존재하지 않는다.

따라서 조건을 만족시키는 정수 a, b 가 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 구하는 정수 a, b 의 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수는 6이다.

답 ④



5 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+3+ax}}{\sqrt{9x^2+4x+1}-3x} = \frac{1}{2}$ 에서
 $t = -x$ 라 하면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+3+ax}}{\sqrt{9x^2+4x+1}-3x} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t^2+3-at}}{\sqrt{9t^2-4t+1}+3t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{3}{t^2}-a}}{\sqrt{9-\frac{4}{t}+\frac{1}{t^2}}+3} \\ &= \frac{1-a}{3+3} = \frac{1-a}{6} \end{aligned}$$

즉, $\frac{1-a}{6} = \frac{1}{2}$ 이므로 $1-a=3$
 따라서 $a = -2$

답 ②

6 $\sqrt{4x^2-2x+1} \leq f(x) \leq \sqrt{4x^2-2x+5}$ 에서
 $2x - \sqrt{4x^2-2x+5} \leq 2x - f(x) \leq 2x - \sqrt{4x^2-2x+1}$
 이때

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} (2x - \sqrt{4x^2-2x+5}) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x - \sqrt{4x^2-2x+5})(2x + \sqrt{4x^2-2x+5})}{2x + \sqrt{4x^2-2x+5}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-5}{2x + \sqrt{4x^2-2x+5}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{5}{x}}{2 + \sqrt{4 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}}} \\ &= \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} (2x - \sqrt{4x^2-2x+1}) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x - \sqrt{4x^2-2x+1})(2x + \sqrt{4x^2-2x+1})}{2x + \sqrt{4x^2-2x+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{2x + \sqrt{4x^2-2x+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{2 + \sqrt{4 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}} \\ &= \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

따라서 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{2x - f(x)\} = \frac{1}{2}$$

답 ⑤

7 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(2x)+8x^3}{4x^2+1} = 3$ 에서
 $t = -2x$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(2x)+8x^3}{4x^2+1} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(2x) - (-2x)^3}{(-2x)^2+1} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(-t) - t^3}{t^2+1} = 3 \end{aligned}$$

이때 $f(-t) - t^3$ 은 최고차항의 계수가 3인 이차함수이어야
 하므로

$$f(-t) - t^3 = 3t^2 + at + b \quad (a, b \text{는 상수})$$

$$\text{로 놓으면 } f(-t) = t^3 + 3t^2 + at + b$$

$$\text{즉, } f(x) = -x^3 + 3x^2 - ax + b$$

$$\text{한편, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2+2x} = 4 \text{에서}$$

 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로
 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-x^3 + 3x^2 - ax + b) = b \text{에서}$$

$$b = 0 \text{이므로 } f(x) = -x^3 + 3x^2 - ax$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2+2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(-x^2+3x-a)}{x(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2+3x-a}{x+2} \\ &= -\frac{a}{2} \end{aligned}$$

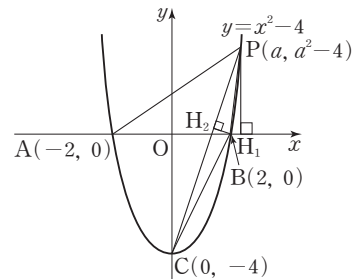
$$\text{즉, } -\frac{a}{2} = 4 \text{이므로 } a = -8$$

$$\text{따라서 } f(x) = -x^3 + 3x^2 + 8x \text{이므로}$$

$$f(2) = -8 + 12 + 16 = 20$$

답 20

8



두 점 A, B는 곡선 $y=x^2-4$ 가 x 축과 만나는 점이므로
 $x^2-4=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

A(-2, 0), B(2, 0)

점 P에서 x 축에 내린 수선의 발을 H_1 이라 하면

$H_1(a, 0)$

이때 $a>2$ 이므로 삼각형 PAB의 넓이 $S(a)$ 는

$$\begin{aligned} S(a) &= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{PH_1} \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times (a^2 - 4) = 2(a^2 - 4) \end{aligned}$$

점 C는 곡선 $y=x^2-4$ 가 y 축과 만나는 점이므로
 $C(0, -4)$

점 B에서 선분 PC에 내린 수선의 발을 H_2 라 하면

두 점 $P(a, a^2-4)$, $C(0, -4)$ 를 지나는 직선 PC의 방정식
 은 $y=ax-4$, 즉 $ax-y-4=0$ 이므로

점 B(2, 0)과 직선 $ax-y-4=0$ 사이의 거리는

$$\overline{BH_2} = \frac{|2a-4|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}} = \frac{2(a-2)}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$\overline{PC} = \sqrt{a^2 + (a^2-4+4)^2} = \sqrt{a^2(a^2+1)} = a\sqrt{a^2+1}$$

삼각형 PCB의 넓이 $T(a)$ 는

$$\begin{aligned} T(a) &= \frac{1}{2} \times \overline{PC} \times \overline{BH_2} \\ &= \frac{1}{2} \times a\sqrt{a^2+1} \times \frac{2(a-2)}{\sqrt{a^2+1}} \\ &= a(a-2) \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 2+} \frac{S(a)}{T(a)} &= \lim_{a \rightarrow 2+} \frac{2(a^2-4)}{a(a-2)} \\ &= \lim_{a \rightarrow 2+} \frac{2(a-2)(a+2)}{a(a-2)} \\ &= \lim_{a \rightarrow 2+} \frac{2(a+2)}{a} = \frac{2 \times (2+2)}{2} = 4 \end{aligned}$$

답 ④

Level 3 실력 완성

본문 15쪽

1 ① 2 ② 3 ③

1 $t=x+1$ 이라 하면 $x \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow 1$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x+1) &= \lim_{t \rightarrow 1} f(t) \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} (t^2 - t) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{조건 (가)에서 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x+1)} = 2$$

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로
 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ 이고 $g(x)$ 는 다항함수이므로

$$g(0) = 0$$

이차함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = x(ax+b) \quad (a \neq 0, a, b \text{는 상수})$$

로 놓으면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x+1)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(ax+b)}{(x+1)^2 - (x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(ax+b)}{x(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax+b}{x+1} = b \end{aligned}$$

에서 $b=2$ 이므로

$$g(x) = x(ax+2)$$

$s=1-x$ 라 하면 $x \rightarrow -1$ 일 때 $s \rightarrow 2$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1+} f(1-x) &= \lim_{s \rightarrow 2-} f(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 2-} (s^2 - s) = 2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(1-x)g(x) = 2 \times g(-1) = 2(a-2)$$

$u=x+1$ 이라 하면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $u \rightarrow 2$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} f(x+1) &= \lim_{u \rightarrow 2+} f(u) \\ &= \lim_{u \rightarrow 2+} (u^2 + u) = 6 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x+1)g(x) = 6 \times g(1) = 6(a+2)$$

조건 (나)에 의하여

$$2(a-2) = 6(a+2), 4a = -16$$

$$a = -4$$

따라서

$$g(x) = x(-4x+2) = -4x^2 + 2x$$

이므로

$$g(1) = -4 + 2 = -2$$

답 ①

2 조건 (가)에서 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 의 값이 존재하고 $x \rightarrow 0$ 일 때

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 이고 $f(x)$ 는 다항함수이므로

$$f(0) = 0$$

조건 (나)에서 다항식 $f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 몫이
 $g(x)$ 이고 나머지가 4이므로

$$f(x) = (x-2)g(x) + 4 \quad \dots\dots ㉠$$



이때 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차다항식이므로 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 이차다항식이다.

㉠의 양변에 $x=0$ 을 대입하면 $f(0)=0$ 이므로

$$f(0) = -2g(0) + 4 = 0, \quad g(0) = 2$$

즉, $g(x) = x^2 + ax + 2$ (a 는 상수)로 놓을 수 있다.

$$\text{한편, } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\{f(x)-4\}g(x)}{x^2-4} = 4 \text{이고}$$

㉠에서 $f(x)-4 = (x-2)g(x)$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\{f(x)-4\}g(x)}{x^2-4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)\{g(x)\}^2}{(x-2)(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\{g(x)\}^2}{x+2} \\ &= \frac{\{g(2)\}^2}{4} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{\{g(2)\}^2}{4} = 4 \text{이므로 } \{g(2)\}^2 = 16$$

$$g(2) = -4 \text{ 또는 } g(2) = 4$$

(i) $g(2) = -4$ 일 때,

$$g(2) = 4 + 2a + 2 = -4 \text{에서 } a = -5$$

$$g(x) = x^2 - 5x + 2 \text{이므로 ㉠에서}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-2)(x^2 - 5x + 2) + 4 \\ &= x^3 - 7x^2 + 12x \end{aligned}$$

$$f(1) = 1 - 7 + 12 = 6$$

(ii) $g(2) = 4$ 일 때,

$$g(2) = 4 + 2a + 2 = 4 \text{에서 } a = -1$$

$$g(x) = x^2 - x + 2 \text{이므로 ㉠에서}$$

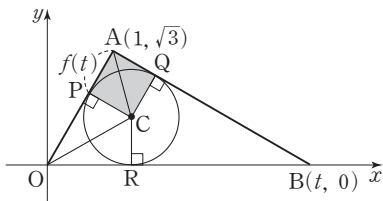
$$\begin{aligned} f(x) &= (x-2)(x^2 - x + 2) + 4 \\ &= x^3 - 3x^2 + 4x \end{aligned}$$

$$f(1) = 1 - 3 + 4 = 2$$

(i), (ii)에서 구하는 $f(1)$ 의 최댓값은 6이다.

㉡ ②

3



삼각형 AOB에 내접하는 원의 반지름의 길이를 $r(t)$ 라 하고, 이 원이 변 OB와 접하는 점을 R, $\overline{AP} = f(t)$ 라 하면

$$\overline{OA} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\overline{OP} = \overline{OA} - \overline{AP} = 2 - f(t)$$

점 A의 좌표가 $(1, \sqrt{3})$ 이므로 $\angle AOR = 60^\circ$ 이고

$\angle CPO = \angle CRO = 90^\circ$ 인 두 직각삼각형 CPO, CRO는 서로 합동이므로

$$\angle POC = \frac{1}{2} \times \angle POR = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$$

$$\overline{PC} = r(t) = \overline{OP} \times \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \{2 - f(t)\}$$

$\angle APC = \angle AQC = 90^\circ$ 인 두 직각삼각형 APC, AQC는 서로 합동이므로 사각형 APCQ의 넓이 $S(t)$ 는

$$\begin{aligned} S(t) &= 2 \times \left(\frac{1}{2} \times \overline{PC} \times \overline{AP} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \{2 - f(t)\} f(t) \end{aligned}$$

한편, 삼각형 AOB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times t \times \sqrt{3} = \frac{1}{2} \times r(t) \times (\overline{AO} + \overline{OB} + \overline{AB})$$

이므로

$$\sqrt{3}t = r(t) \{2 + t + \sqrt{(t-1)^2 + (-\sqrt{3})^2}\}$$

$$\sqrt{3}t = \frac{\sqrt{3}}{3} \{2 - f(t)\} (2 + t + \sqrt{t^2 - 2t + 4})$$

$$2 - f(t) = \frac{3t}{t + 2 + \sqrt{t^2 - 2t + 4}}$$

$$f(t) = 2 - \frac{3t}{t + 2 + \sqrt{t^2 - 2t + 4}}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{3t}{t + 2 + \sqrt{t^2 - 2t + 4}} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{3}{1 + \frac{2}{t} + \sqrt{1 - \frac{2}{t} + \frac{4}{t^2}}} \right) \\ &= 2 - \frac{3}{1+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} S(t) &= \frac{\sqrt{3}}{3} \lim_{t \rightarrow \infty} \{2 - f(t)\} f(t) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \times \lim_{t \rightarrow \infty} \{2 - f(t)\} \times \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \times \left(2 - \frac{1}{2} \right) \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

㉢ ③

02 함수의 연속

유제

본문 19~23쪽

1 ④ 2 5 3 ② 4 ③ 5 ④

- 1 함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

이다.

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4 \end{aligned}$$

답 ④

- 2 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이려면

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

이어야 한다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a^-} (x^2 - 4) = a^2 - 4 \\ \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a^+} (4x + 1) = 4a + 1 \\ f(a) &= 4a + 1 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} a^2 - 4 &= 4a + 1 \\ a^2 - 4a - 5 &= 0, (a+1)(a-5) = 0 \\ a > 0 &\text{이므로 } a = 5 \end{aligned}$$

답 5

- 3 함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이려면

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)g(x) = f(1)g(1)$$

이어야 한다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x)(x^2 + k) = -1 \times (1+k) \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x+1)(x^2 + k) = 3 \times (1+k) \\ f(1)g(1) &= 3 \times (1+k) \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} -(1+k) &= 3(1+k), 4(1+k) = 0 \\ \text{따라서 } k &= -1 \end{aligned}$$

답 ②

- 4 함수 $\frac{1}{g(x)}$ 이 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=2$ 에서도 연속이고, 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \neq 0$ 이어야 한다.

- (i) 함수 $\frac{1}{g(x)}$ 이 $x=2$ 에서 연속이려면

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{g(2)}$$

이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{f(x-2)} = \frac{1}{f(0)}$$

$$\frac{1}{g(2)} = \frac{1}{6}$$

이므로

$$\frac{1}{f(2)} = \frac{1}{f(0)} = \frac{1}{6}$$

$$f(2) = f(0) = 6$$

최고차항의 계수가 자연수인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여

$$f(x) - 6 = kx(x-2) \quad (k \text{는 자연수})$$

로 놓을 수 있으므로

$$f(x) = kx(x-2) + 6 = k(x-1)^2 - k + 6$$

- (ii) 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \neq 0$ 이어야 하므로

$x < 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) = k(x-1)^2 - k + 6 > 0, \text{ 즉 } k < 6$$

$x > 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x-2) = k(x-3)^2 - k + 6 > 0, \text{ 즉 } k < 6$$

따라서 $k < 6$ 에서 자연수 k 의 값은 1, 2, 3, 4, 5이다.

- (i), (ii)에서 $f(4) = 8k + 6$ 이고 $f(4)$ 의 최댓값은 $k=5$ 일 때 $8 \times 5 + 6 = 46$

답 ③

- 5 $f(x) = x^3 + x - 12$ 라 하면 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$$f(-1) = -1 + (-1) - 12 = -14 < 0$$

$$f(0) = 0 + 0 - 12 = -12 < 0$$

$$f(1) = 1 + 1 - 12 = -10 < 0$$

$$f(2) = 8 + 2 - 12 = -2 < 0$$

$$f(3) = 27 + 3 - 12 = 18 > 0$$

$$f(4) = 64 + 4 - 12 = 56 > 0$$

따라서 $f(2)f(3) < 0$ 이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x) = 0$ 은 열린구간 (2, 3)에서 실근 a 를 갖는다.

답 ④



Level 1 기초 연습

본문 24쪽

1 ④ 2 ② 3 ③ 4 ②

- 1 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=3$ 에서도 연속이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$$

따라서

$$\lim_{x \rightarrow 3} \{3f(x) - 2\} = 3 \lim_{x \rightarrow 3} f(x) - 2 = 3f(3) - 2 = 6$$

$$\text{이므로 } f(3) = \frac{8}{3}$$

답 ④

- 2 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ 이고, $f(1) = 0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$ 이다.

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 0 \text{에서}$$

$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ 의 값이 존재하지 않는다.

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 불연속이다.

한편, 주어진 함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서 함수 $f(x)$ 가 열린구간 $(0, 1)$ 과 열린구간 $(1, 3)$ 과 열린구간 $(3, 5)$ 에서 연속임을 알 수 있다.

따라서 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ ($0 < a < 5$)에서 불연속인 모든 실수 a 의 값은 1, 3이고, 그 개수는 2이다.

답 ②

- 3 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$ 에서도 연속이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x + a) = 3 + a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - a) = 1 - a$$

$$f(1) = 1 - a$$

이므로

$$3 + a = 1 - a, a = -1$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} 3x-1 & (x < 1) \\ x^2+1 & (x \geq 1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(2) = 4 + 1 = 5$$

답 ③

- 4 $f(x) = x^2 - 6x + a$ 라 하면 곡선 $y=f(x)$ 는 직선 $x=3$ 에 대하여 대칭이고, 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 연속이다.

닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 감소하므로 x 에 대한 방정식 $f(x)=0$ 이 열린구간 $(0, 2)$ 에서 오직 하나의 실근을 가지려면 $f(0)f(2) < 0$ 이어야 한다.

$$f(0) = a$$

$$f(2) = 4 - 12 + a = a - 8$$

이므로

$$f(0)f(2) = a(a-8) < 0$$

따라서 $0 < a < 8$ 이므로 구하는 정수 a 의 최댓값은 7이다.

답 ②

Level 2 기본 연습

본문 25~26쪽

1 ③ 2 ④ 3 ④ 4 3 5 ④
6 ③ 7 9 8 3

- 1 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$ 에서도 연속이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2-1)f(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)f(x)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+1)f(x) \\ &= 2f(1) = 24 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } f(1) = 12$$

답 ③

- 2 함수 $f(x)$ 가 $x=k$ 에서 연속이면 $\lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = f(k)$ 이므로 $f(k) - \lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = 0$

함수 $f(x)$ 는 $x=1, x=4, x=5$ 에서 연속이고, $x=2, x=3$ 에서 불연속이므로

$$f(2) - \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1 - 1 = 0$$

$$f(3) - \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2 - 1 = 1$$

따라서

$$\sum_{k=1}^5 \left\{ f(k) - \lim_{x \rightarrow k^-} f(x) \right\} = 0 + 0 + 1 + 0 + 0 = 1$$

답 ④

- 3 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=2$ 에서도 연속이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

$$x \neq 2 \text{ 일 때, } f(x) = \frac{(x+a)|x-2|}{x-2}$$

이때

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x+a)|x-2|}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x+a)(x-2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x-a) \\ &= -2-a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x+a)|x-2|}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x+a)(x-2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+a) \\ &= 2+a \end{aligned}$$

이므로

$$-2-a=2+a, a=-2$$

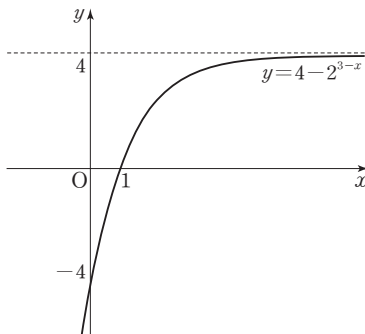
이때 $(x-2)f(x)=(x-2)|x-2|$ 의 양변에 $x=4$ 를 대입하면

$$2f(4)=2 \times 2$$

$$\text{따라서 } f(4)=2$$

답 ④

- 4 함수 $y=4-2^{3-x}$ 의 그래프는 그림과 같다.



곡선 $y=4-2^{3-x}$ 의 점근선의 방정식은 $y=4$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $4-2^{3-x} < 4$ 이다.

이때 $4-2^{3-x} \geq 3$ 에서

$$2^{3-x} \leq 1, 2^{3-x} \leq 2^0$$

밑이 1보다 크므로

$$3-x \leq 0, x \geq 3$$

즉, $x \geq 3$ 에서 $3 \leq 4-2^{3-x} < 4$ 이므로 $f(x)=3$ 이다.

$$2 \leq 4-2^{3-x} < 3 \text{에서}$$

$$1 < 2^{3-x} \leq 2$$

밑이 1보다 크므로

$$0 < 3-x \leq 1, 2 \leq x < 3$$

즉, $2 \leq x < 3$ 에서 $2 \leq 4-2^{3-x} < 3$ 이므로 $f(x)=2$ 이다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(3, \infty)$ 에서 연속이므로 함수 $f(x)$ 가 구간 (a, ∞) 에서 연속이 되도록 하는 실수 a 의 최솟값은 3이다.

답 3

- 5 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$ 에서도 연속이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+a) = 1+a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2+bx) = 1+b$$

$$f(1) = 1+b$$

이므로

$$1+a=1+b, a=b \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

조건 (가)에 의하여 $f(2)=f(0)$ 이므로

$$4+2b=a \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

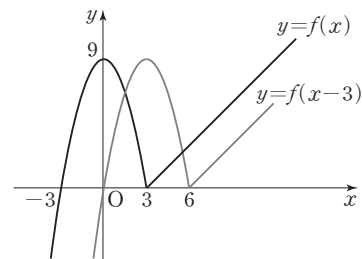
$$a=-4, b=-4$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} x-4 & (0 \leq x < 1) \\ x^2-4x & (1 \leq x \leq 2) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f\left(\frac{9}{2}\right) = f\left(\frac{5}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 4 = -\frac{7}{2}$$

답 ④

- 6 함수 $y=f(x-3)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f(x-3)$ 의 그래프는 그림과 같다.





두 함수 $f(x)$, $f(x-3)$ 은 각각 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속하려면 $x=a$ 에서 연속이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow a-} g(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = g(a)$$

(i) $a < 3$ 일 때,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow a-} f(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow a-} (9-x^2) \\ &= 9-a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow a+} f(x-3) \\ &= \lim_{x \rightarrow a+} \{9-(x-3)^2\} \\ &= -a^2+6a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a-3) \\ &= 9-(a-3)^2 \\ &= -a^2+6a \end{aligned}$$

이므로

$$9-a^2 = -a^2+6a$$

$$a < 3 \text{ 이므로 } a = \frac{3}{2}$$

(ii) $a = 3$ 일 때,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 3-} f(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3-} (9-x^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 3+} f(x-3) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3+} \{9-(x-3)^2\} \\ &= 9 \end{aligned}$$

에서 $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $g(x)$ 는 $x=3$ 에서 불연속이다.

(i), (ii)에서 구하는 a 의 값은 $\frac{3}{2}$ 이다.

답 ③

7 함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) = f(1)g(1)$$

이다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$$

$$f(1)g(1) = 3f(1)$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 3f(1) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ 이고 $f(x)$ 는 다항함수이므로

$$f(1) = 0$$

$f(x) = (x-1)(x-a)$ (a 는 상수)라 하면

$$\textcircled{7} \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-a)}{x-1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-a)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-a) = 1-a = 0$$

이므로 $a = 1$

따라서 $f(x) = (x-1)^2$ 이므로

$$f(4) = 9$$

답 9

8 $g(x) = f(x) - kx$ 라 하면 함수 $g(x)$ 는 닫힌구간 $[1, 2]$ 에서 연속이다.

조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$ 에 대하여 x 에 대한 방정식 $g(x) = 0$ 이 열린구간 $(1, 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 가지려면 사잇값의 정리에 의하여 $g(1)g(2) < 0$ 이어야 한다.

$$g(1) = f(1) - k = 4 - k$$

$$g(2) = f(2) - 2k = -1 - 2k$$

이므로

$$g(1)g(2) = (4-k)(-1-2k) < 0 \text{에서}$$

$$(k-4)(2k+1) < 0$$

$$-\frac{1}{2} < k < 4$$

$k \geq 4$ 일 때, $f(x) = -5x + 9$ 이면 $f(x) = kx$ 에서

$$-5x + 9 = kx, \text{ 즉 } x = \frac{9}{k+5} \leq 1$$

이므로 방정식 $f(x) = kx$ 는 열린구간 $(1, 2)$ 에서 실근을 갖지 않는다.

따라서 정수 k 의 최댓값은 3이다.

답 3

Level 3 실력 완성

본문 27쪽

1 ④

2 ②

3 ①

1 원 $(x-t)^2+y^2=4$ 는 점 $(t, 0)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2이다.

두 직선 $3x+4y-8=0$, $4x-3y+6=0$ 은 서로 수직이고 점 $(0, 2)$ 에서 만난다.

(i) [그림 1]과 같이 원 $(x-t)^2+y^2=4$ 가 직선

$4x-3y+6=0$ 에 접하는 경우

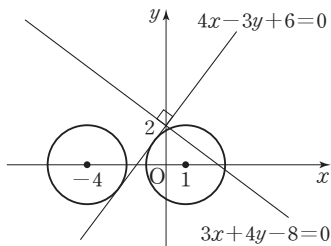
원의 중심 $(t, 0)$ 과 직선 $4x-3y+6=0$ 사이의 거리가 2이므로

$$\frac{|4t-0+6|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=2$$

$$|4t+6|=10$$

$$4t+6=10 \text{ 또는 } 4t+6=-10$$

$$t=1 \text{ 또는 } t=-4$$



[그림 1]

(ii) [그림 2]와 같이 원 $(x-t)^2+y^2=4$ 가 직선

$3x+4y-8=0$ 에 접하는 경우

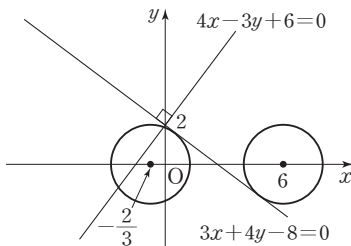
원의 중심 $(t, 0)$ 과 직선 $3x+4y-8=0$ 사이의 거리가 2이므로

$$\frac{|3t+0-8|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$$

$$|3t-8|=10$$

$$3t-8=10 \text{ 또는 } 3t-8=-10$$

$$t=6 \text{ 또는 } t=-\frac{2}{3}$$

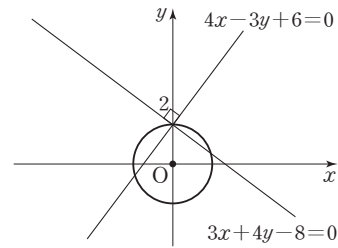


[그림 2]

(iii) [그림 3]과 같이 원 $(x-t)^2+y^2=4$ 가 점 $(0, 2)$ 를 지나는 경우

$$t^2+4=4$$

$$t=0$$

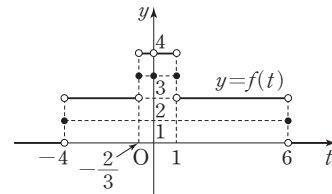


[그림 3]

(i), (ii), (iii)에 의하여 함수 $f(t)$ 는

$$f(t)=\begin{cases} 0 & (t < -4 \text{ 또는 } t > 6) \\ 1 & (t = -4 \text{ 또는 } t = 6) \\ 2 & (-4 < t < -\frac{2}{3} \text{ 또는 } 1 < t < 6) \\ 3 & (t = -\frac{2}{3} \text{ 또는 } t = 0 \text{ 또는 } t = 1) \\ 4 & (-\frac{2}{3} < t < 0 \text{ 또는 } 0 < t < 1) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(t)$ 의 그래프는 [그림 4]와 같다.



[그림 4]

따라서 함수 $f(t)$ 가 $t=a$ 에서 불연속인 모든 실수 a 의 값은 $-4, -\frac{2}{3}, 0, 1, 6$ 이고, 그 개수는 5이다.

답 ④

2 $f(2)=2$ 라 가정하면

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3-f(x)}{x-f(2)}=4$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한

값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \{3-f(x)\} = 3 - \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$$

그런데 $f(2) \neq \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

즉, $f(2) \neq 2$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3-f(x)}{x-f(2)} &= \frac{3 - \lim_{x \rightarrow 2} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x-f(2))} \\ &= \frac{3 - \lim_{x \rightarrow 2} f(x)}{2-f(2)} = 4 \end{aligned}$$



에서

$$3 - \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 8 - 4f(2)$$

조건 (나)에서 $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 이므로

$$3 - f(2) = 8 - 4f(2)$$

$$\text{따라서 } f(2) = \frac{5}{3}$$

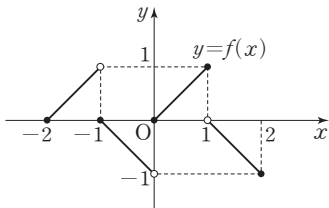
②

$$\begin{aligned} 3 \quad \neg. \lim_{x \rightarrow 0-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) + f(-x)}{2} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)}{2} \\ &= \frac{-1 + 0}{2} = -\frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) + f(-x)}{2} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)}{2} \\ &= \frac{0 + (-1)}{2} = -\frac{1}{2} \\ g(0) &= \frac{f(0) + f(0)}{2} = 0 \end{aligned}$$

이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \neq g(0)$

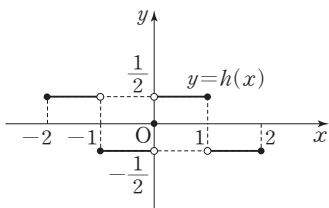
따라서 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다. (거짓)

ㄴ. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 [그림 1]과 같다.



[그림 1]

함수 $y=-f(-x)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이므로 함수 $y=h(x)$ 의 그래프는 [그림 2]와 같다.

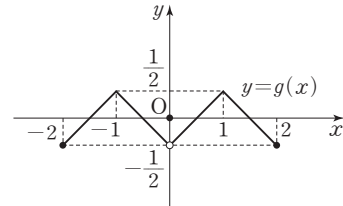


[그림 2]

[그림 2]에서 $-2 < a < 0$ 인 모든 실수 a 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow a+} h(x) = h(a) \text{이다. (참)}$$

ㄷ. 함수 $y=f(-x)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 [그림 3]과 같다.



[그림 3]

함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서만 불연속이고, 함수 $h(x)$ 는 $x=-1$, $x=0$, $x=1$ 에서만 불연속이다.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \lim_{x \rightarrow -1-} \{g(x) + k\}h(x) &= \left(\frac{1}{2} + k\right) \times \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow -1+} \{g(x) + k\}h(x) &= \left(\frac{1}{2} + k\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ \{g(-1) + k\}h(-1) &= \left(\frac{1}{2} + k\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ \text{이므로} \\ \left(\frac{1}{2} + k\right) \times \frac{1}{2} &= \left(\frac{1}{2} + k\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ k &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

즉, $k = -\frac{1}{2}$ 일 때 함수 $\{g(x) + k\}h(x)$ 는 $x=-1$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \lim_{x \rightarrow 0-} \{g(x) + k\}h(x) &= \left(-\frac{1}{2} + k\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ \lim_{x \rightarrow 0+} \{g(x) + k\}h(x) &= \left(-\frac{1}{2} + k\right) \times \frac{1}{2} \\ \{g(0) + k\}h(0) &= 0 \\ \text{이므로} \\ \left(-\frac{1}{2} + k\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) &= \left(-\frac{1}{2} + k\right) \times \frac{1}{2} = 0 \\ k &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

즉, $k = \frac{1}{2}$ 일 때 함수 $\{g(x) + k\}h(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad \lim_{x \rightarrow 1-} \{g(x) + k\}h(x) &= \left(\frac{1}{2} + k\right) \times \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 1+} \{g(x) + k\}h(x) &= \left(\frac{1}{2} + k\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ \{g(1) + k\}h(1) &= \left(\frac{1}{2} + k\right) \times \frac{1}{2} \\ \text{이므로} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{2}+k\right) \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}+k\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$k = -\frac{1}{2}$$

즉, $k = -\frac{1}{2}$ 일 때 함수 $\{g(x)+k\}h(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

(i), (ii), (iii)에서 함수 $\{g(x)+k\}h(x)$ 는

$k = -\frac{1}{2}$ 이면 $x=0$ 에서만 불연속,

$k = \frac{1}{2}$ 이면 $x=-1$, $x=1$ 에서만 불연속,

$k \neq -\frac{1}{2}$, $k \neq \frac{1}{2}$ 이면 $x=-1$, $x=0$, $x=1$ 에서만 불연속이다.

따라서 함수 $\{g(x)+k\}h(x)$ 가 $x=b$ ($-2 < b < 2$)에서 불연속인 실수 b 의 개수가 1이 되도록 하는 양수 k 의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ①

QR코드 앱을 사용해 추가 정보를 확인하세요.



수능특강 사용설명서

수능특강 지문·자료·문항 분석 능력 향상
연계교재를 위한 가장 친절함 가이드

03 미분계수와 도함수

유제

본문 31~37쪽

1 ② 2 ③ 3 ② 4 3 5 ③
6 990 7 ④ 8 ①

1 $f(x) = x^2 + ax$ 에서 x 의 값이 1에서 3까지 변할 때의 함수 $y = f(x)$ 의 평균변화율은

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{(9+3a)-(1+a)}{2} = 4+a$$

이고

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+ax-(1+a)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2-1)+a(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1+a)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+1+a) = 2+a \end{aligned}$$

$4+a = af'(1)$ 에서

$$4+a = a(2+a), a^2+a-4=0$$

이차방정식 $a^2+a-4=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$D = 1^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 17 > 0$ 이므로 이 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 구하는 모든 상수 a 의 값의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 -1 이다.

답 ②

$$\begin{aligned} 2 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\{f(x)\}^2 - x^2}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\{f(x)+x\}\{f(x)-x\}}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[\{f(x)+x\} \times \frac{f(x)-2-(x-2)}{x-2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[\{f(x)+x\} \times \left\{ \frac{f(x)-2}{x-2} - 1 \right\} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \{f(x)+x\} \times \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{f(x)-f(2)}{x-2} - 1 \right\} \\ &= \{f(2)+2\} \times \{f'(2)-1\} \\ &= (2+2) \times (3-1) = 8 \end{aligned}$$

답 ③



- 3 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$ 에서도 연속이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 + 2) = a + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} a^2 x = a^2$$

$$f(1) = a + 2$$

$$\text{이므로 } a + 2 = a^2$$

$$a^2 - a - 2 = 0, (a+1)(a-2) = 0$$

$$a = -1 \text{ 또는 } a = 2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

그런데 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하지 않으므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \text{이어야 한다.}$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(ax^2 + 2) - (a + 2)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{a(x-1)(x+1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} a(x+1) = 2a$$

$$f(1) = a + 2 = a^2 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{a^2 x - a^2}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{a^2(x-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} a^2 = a^2$$

따라서 $2a \neq a^2$ 이므로

$$a \neq 0 \text{이고 } a \neq 2 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{에서 } a = -1$$

답 ②

- 4 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $g(x)$ 는 $x=0$ 과 $x=2$ 에서도 미분가능하다.

$$(i) \text{ 함수 } g(x) \text{가 } \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0) = 1 \text{을 만}$$

족시키므로 $x=0$ 에서 연속이다.

함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - 1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x^3 + ax^2 + bx + 1) - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + ax + b) = b$$

이므로 $b=0$

- (ii) 함수 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = g(2)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^3 + ax^2 + 1) = 8 + 4a + 1 = 4a + 9$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} c = c$$

$$g(2) = c$$

$$\text{이므로 } c = 4a + 9 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

함수 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2}$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x^3 + ax^2 + 1) - c}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 + ax^2 - (4a + 8)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)\{x^2 + (a+2)x + 2a+4\}}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \{x^2 + (a+2)x + 2a+4\}$$

$$= 4a + 12$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{c - c}{x - 2} = 0$$

$$\text{이므로 } 4a + 12 = 0, a = -3$$

$$\textcircled{9} \text{에서 } c = 4 \times (-3) + 9 = -3$$

$$(i), (ii) \text{에서 } f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \text{이므로}$$

$$f(1) \times g(3) = (1 - 3 + 1) \times (-3) = 3$$

답 3

- 5 다항함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점 $(x, f(x))$ 에서의 접선의 기울기가 $3x^2 - 4x - 2$ 이므로 $f'(x) = 3x^2 - 4x - 2$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(1-2h) - f(1)}{-2h} \times (-2) \right\}$$

$$= -2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1)}{-2h}$$

$$= -2f'(1) = -2 \times (3 - 4 - 2) = 6$$

답 ③

- 6 $f(x) = x^{2n}$ 에서

$$f'(x) = 2nx^{2n-1} \text{이므로 } f'(1) = 2n$$

$$\begin{aligned}
 g(x) &= x^{n+2} \text{에서} \\
 g'(x) &= (n+2)x^{n+1} \text{이므로 } g'(1) = n+2 \\
 \sum_{n=1}^{10} f'(1)g'(1) &= \sum_{n=1}^{10} 2n(n+2) = 2 \sum_{n=1}^{10} n^2 + 4 \sum_{n=1}^{10} n \\
 &= 2 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + 4 \times \frac{10 \times 11}{2} \\
 &= 770 + 220 = 990
 \end{aligned}$$

답 990

7 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x$ 에서 $f'(x) = x^2 + 2x - 2$

함수 $f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 미분계수 $f'(a)$ 는

$$f'(a) = a^2 + 2a - 2$$

함수 $f(x)$ 의 $x=2a$ 에서의 미분계수 $f'(2a)$ 는

$$f'(2a) = 4a^2 + 4a - 2$$

이때 $f'(a) + f'(2a) = 28$ 이므로

$$a^2 + 2a - 2 + 4a^2 + 4a - 2 = 28$$

$$5a^2 + 6a - 32 = 0$$

$$(5a+16)(a-2) = 0$$

 $a > 0$ 이므로 $a = 2$

답 ④

8 $f(x) = (x-1)(x^3 + ax^2 + 2)$ 에서

$$f'(x) = (x^3 + ax^2 + 2) + (x-1)(3x^2 + 2ax)$$

$$f'(2) = 2 \text{에서}$$

$$(8 + 4a + 2) + (12 + 4a) = 2, \quad 8a = -20$$

$$a = -\frac{5}{2}$$

따라서 $f'(x) = (x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2) + (x-1)(3x^2 - 5x)$ 이므로

$$f'(1) = 1 - \frac{5}{2} + 2 = \frac{1}{2}$$

답 ①

Level 1 기초 연습

본문 38~39쪽

- | | | | | |
|------|-----|-----|-----|------|
| 1 ④ | 2 ③ | 3 ② | 4 ① | 5 ⑤ |
| 6 21 | 7 ② | 8 ① | 9 ④ | 10 ① |

1 $f(x) = x^3 + x^2 + 1$ 에서 x 의 값이 -1 에서 2 까지 변할 때의 함수 $y=f(x)$ 의 평균변화율은

$$\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{(8 + 4 + 1) - (-1 + 1 + 1)}{3} = 4$$

답 ④

2 점 $(2, 3)$ 은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점이므로

$$f(2) = 3$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점 $(2, 3)$ 에서의 접선의 기울기가 4 이므로

$$f'(2) = 4$$

따라서

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{f(x) - 3} &= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{x-2}{f(x) - f(2)} \times (x+2) \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{1}{\frac{f(x) - f(2)}{x-2}} \times (x+2) \right\} \\
 &= \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2}} \times \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) \\
 &= \frac{1}{f'(2)} \times 4 = 1
 \end{aligned}$$

답 ③

3 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2f(x) - 3}{x^2 + x} = f(-1)$ 에서

 $x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.즉, $\lim_{x \rightarrow -1} \{2f(x) - 3\} = 0$ 에서 $f(x)$ 는 다항함수이므로

$$2f(-1) - 3 = 0, \quad f(-1) = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2f(x) - 3}{x^2 + x} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2\{f(x) - f(-1)\}}{x(x+1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1} \left\{ \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} \times \frac{2}{x} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} \times \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2}{x} \\
 &= f'(-1) \times \frac{2}{-1} \\
 &= -2f'(-1)
 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } -2f'(-1) = f(-1), \quad -2f'(-1) = \frac{3}{2}$$

$$\text{따라서 } f'(-1) = -\frac{3}{4}$$

답 ②

4 $f(x) = \begin{cases} -(x-a)(2x-1) & (x \leq a) \\ (x-a)(2x-1) & (x > a) \end{cases}$

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



이때

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{-(x-a)(2x-1)-0}{x-a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a^-} \{-(2x-1)\} \\ &= -2a+1 \\ \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{(x-a)(2x-1)-0}{x-a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a^+} (2x-1) \\ &= 2a-1\end{aligned}$$

이므로 $-2a+1=2a-1$, $a=\frac{1}{2}$ 따라서 $f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|(2x-1)$ 이므로

$$f(1)=\frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

답 ①

5 함수 $f(x)$ 가 $x=3$ 에서 미분가능하므로 $x=3$ 에서 연속이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3)$$

이때

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} (ax+b) = 3a+b \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2-2x) = 9-6=3\end{aligned}$$

$$f(3)=3a+b$$

$$\text{이므로 } 3a+b=3, b=-3a+3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$

이때

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(ax+b)-(3a+b)}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{a(x-3)}{x-3} = a\end{aligned}$$

$$f(3)=3a+b=3 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x^2-2x)-3}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x-3)(x+1)}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} (x+1) = 4\end{aligned}$$

$$\text{즉, } a=4$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } b=-12+3=-9$$

$$\text{따라서 } f(x)=\begin{cases} 4x-9 & (x \leq 3) \\ x^2-2x & (x > 3) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(2)=8-9=-1$$

답 ⑤

$$\begin{aligned}\textcircled{6} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x+h)-f(x)\} - \{f(x-h)-f(x)\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h)-f(x)}{-h} \\ &= f'(x) + f'(x) = 2f'(x)\end{aligned}$$

이므로

$$2f'(x) = x^2 f'(2) - 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

 $\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$2f'(2) = 4f'(2) - 6, f'(2) = 3$$

$$\text{즉, } 2f'(x) = 3x^2 - 6$$

$$\text{따라서 } f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3 \text{이므로}$$

$$f'(4) = \frac{3}{2} \times 16 - 3 = 21$$

답 21

$$\textcircled{7} \quad f(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 5 \text{이므로 } f'(x) = 2x^3 + x^2$$

$$f'(a) + f'(2) = 19 \text{에서}$$

$$(2a^3 + a^2) + (16 + 4) = 19$$

$$2a^3 + a^2 + 1 = 0, (a+1)(2a^2 - a + 1) = 0$$

이때 이차방정식 $2a^2 - a + 1 = 0$ 을 만족시키는 실수 a 의 값은 존재하지 않으므로 $a = -1$

답 ②

8 삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수와 상수항이 모두 1이므로

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1 \quad (a, b \text{는 상수})$$

로 놓으면

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f'(1) = 0 \text{에서 } 3 + 2a + b = 0$$

$$2a + b = -3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f'(2) = 5 \text{에서 } 12 + 4a + b = 5$$

$$4a + b = -7 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a = -2, b = 1$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1 \text{이므로}$$

$$f(1) = 1 - 2 + 1 + 1 = 1$$

답 ①

$$\begin{aligned}\textcircled{9} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h)-f(-h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(2h)-f(0)\} - \{f(-h)-f(0)\}}{h}\end{aligned}$$

$$= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) - f(0)}{2h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-h) - f(0)}{-h}$$

$$= 2f'(0) + f'(0) = 3f'(0)$$

$$\text{이므로 } 3f'(0) = 2, f'(0) = \frac{2}{3}$$

$$f(x) = (ax^2 + 1)(x^3 + ax + 1) \text{에서}$$

$$f'(x) = 2ax(x^3 + ax + 1) + (ax^2 + 1)(3x^2 + a)$$

이므로

$$f'(0) = 0 \times 1 + 1 \times a = a$$

$$\text{따라서 } a = \frac{2}{3}$$

답 ④

10 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{x - 2} = a$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값

이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x) - 3\} = 0$ 이고 $f(x)$ 는 다항함수이므로

$$f(2) - 3 = 0, f(2) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) = a$$

다항식 $f(x)$ 를 $(x - 2)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 $5x + b$ 이므로

$$f(x) = (x - 2)^2 Q(x) + 5x + b$$

$$f(x) = (x^2 - 4x + 4)Q(x) + 5x + b \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

⑦의 양변에 $x = 2$ 를 대입하면

$$f(2) = 10 + b, 3 = 10 + b \text{에서 } b = -7$$

⑦의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = (2x - 4)Q(x) + (x^2 - 4x + 4)Q'(x) + 5 \dots\dots \textcircled{8}$$

⑧의 양변에 $x = 2$ 를 대입하면

$$f'(2) = 5, a = 5$$

$$\text{따라서 } a + b = 5 + (-7) = -2$$

답 ①

Level 2 기본 연습

본문 40~41쪽

- | | | | | |
|-----|------|-----|-----|-----|
| 1 ⑤ | 2 ① | 3 ② | 4 ④ | 5 ③ |
| 6 ⑤ | 7 17 | 8 ③ | | |

1 $\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x) - x\} \neq 0$, 즉 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq 0$ 이면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 2x^2}{f(x) - x} = \frac{f(0)}{f(0)} = 1 \text{이 되어 조건을 만족시키지 않는다.}$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 이고 $f(x)$ 는 다항함수이므로

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 2x^2}{f(x) - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x} + 2x}{\frac{f(x)}{x} - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x) - f(0)}{x} + 2x}{\frac{f(x) - f(0)}{x} - 1}$$

$$= \frac{f'(0) + 0}{f'(0) - 1} = \frac{f'(0)}{f'(0) - 1}$$

$$\text{이므로 } \frac{f'(0)}{f'(0) - 1} = 3 \text{에서}$$

$$3f'(0) - 3 = f'(0), 2f'(0) = 3$$

$$\text{따라서 } f'(0) = \frac{3}{2}$$

답 ⑤

2 $(x - 2)f'(x) = 3f(x) - 2x^2 + x$ 의 양변에 $x = 2$ 를 대입하면 $0 = 3f(2) - 8 + 2, f(2) = 2$

$$x \neq 2 \text{일 때, } f'(x) = \frac{3f(x) - 2x^2 + x}{x - 2}$$

다항함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 는 다항함수이므로 실수 전체의 집합에서 연속이다. 따라서 $x = 2$ 에서도 연속이므로

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f'(x)$$

가 성립한다.

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f'(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3f(x) - 2x^2 + x}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3\{f(x) - 2\} - (2x^2 - x - 6)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{3\{f(x) - f(2)\}}{x - 2} - \frac{(2x + 3)(x - 2)}{x - 2} \right]$$

$$= 3 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} - \lim_{x \rightarrow 2} (2x + 3)$$

$$= 3f'(2) - 7$$

$$\text{따라서 } f'(2) = \frac{7}{2}$$

답 ①

$$3 \neg. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(x) - 2f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x|x - 2| - 0}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(2 - x)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (-x) = -2$$



$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{xf(x) - 2f(2)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x|x-2| - 0}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x(x-2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} x = 2\end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{xf(x) - 2f(2)}{x-2} \neq \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{xf(x) - 2f(2)}{x-2}$$

이므로 함수 $xf(x)$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하지 않다.

$$\begin{aligned}\text{ㄴ. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(4-x)f(x) - \{f(2)\}^2}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|4-x-2| \times |x-2| - 0}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|^2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 0\end{aligned}$$

따라서 함수 $f(4-x)f(x)$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하다.

$$\begin{aligned}\text{ㄷ. } \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{f(x)f(-x) - f(2)f(-2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{|x-2| \times |x+2| - 0}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{-(x^2-4)}{x-2} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 2-} (x+2) = -4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x)f(-x) - f(2)f(-2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{|x-2| \times |x+2| - 0}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x^2-4}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} (x+2) = 4\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{f(x)f(-x) - f(2)f(-2)}{x-2} \\ \neq \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x)f(-x) - f(2)f(-2)}{x-2}\end{aligned}$$

이므로 함수 $f(x)f(-x)$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하지 않다.

이상에서 $x=2$ 에서 미분가능한 함수는 ㄴ 뿐이다.

답 ②

4 함수 $g(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하므로 $x=1$ 에서 연속이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) = g(1)$$

이때

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} af(x) \\ &= a \times (1^2 - 1) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+} (x^2 + bx - 3)f(x) \\ &= (1 + b - 3) \times (-1 + 2) = b - 2\end{aligned}$$

$$g(1) = af(1) = a \times (1^2 - 1) = 0$$

이므로 $b - 2 = 0$, $b = 2$

함수 $g(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{g(x) - g(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{g(x) - g(1)}{x-1}$$

이때

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{g(x) - g(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{af(x) - 0}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{a(x^2 - 1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} a(x+1) = 2a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{g(x) - g(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x^2 + bx - 3)f(x) - 0}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x^2 + 2x - 3)(-x + 2)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x-1)(x+3)(-x+2)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} (x+3)(-x+2) \\ &= 4 \times 1 = 4\end{aligned}$$

이므로 $2a = 4$, $a = 2$

따라서 $a + b = 2 + 2 = 4$

답 ④

5 $f(x+y) = f(x) + f(y) + x^2y + xy^2 - xy$ 의 양변에

$x=0$, $y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0) + 0 \text{에서 } f(0) = 0$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(h) + x^2h + xh^2 - xh - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) + x^2h + xh^2 - xh}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(h)}{h} + x^2 + xh - x \right\}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} (x^2 + xh - x)$$

$$= f'(0) + x^2 - x$$

$f'(2) = 3$ 에서

$$f'(2) = f'(0) + 4 - 2 = 3, \quad f'(0) = 1$$

따라서 $f'(x) = x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ 이므로

함수 $f'(x)$ 의 최솟값은 $\frac{3}{4}$ 이다.

답 ③

- 6 삼차함수 $f(x)$ 를
 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$, a, b, c, d 는 상수)
 로 놓으면 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$$\text{조건 (가)에서 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 6$$

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로
 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 이고 $f(x)$ 는 다항함수이므로

$$f(0) = 0 \text{에서 } d = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) \text{이므로}$$

$$f'(0) = 6 \text{에서 } c = 6$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 6$$

조건 (나)에서 함수 $y = f'(x)$ 의 그래프는 점 $(1, 0)$ 에서
 x 축에 접하므로

$$f'(x) = 3a(x-1)^2 = 3ax^2 - 6ax + 3a$$

$$b = -3a, 6 = 3a \text{에서 } a = 2, b = -6$$

$$\text{따라서 } f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x \text{이므로}$$

$$f(1) = 2 - 6 + 6 = 2$$

답 ⑤

- 7 조건 (가)에서 삼차방정식 $f(x) - (2x-1) = 0$ 의 세 실근
 이 각각 $-1, 0, 2$ 이므로

$$f(x) - (2x-1) = a(x+1)x(x-2) \quad (a \neq 0, a \text{는 상수})$$

로 놓으면

$$f(x) = a(x+1)x(x-2) + (2x-1)$$

$$\text{조건 (나)에서 } f(1) = -3 \text{이므로}$$

$$-2a + 1 = -3, a = 2$$

$$f(x) = 2(x+1)x(x-2) + (2x-1)$$

$$f'(x) = 2\{x(x-2) + (x+1)(x-2) + (x+1)x\} + 2$$

따라서

$$f(2) + f'(2) = 3 + 14 = 17$$

답 17

- 8 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - f(1)}{x^3 - 1} = 2$ 에서

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로
 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} \{g(x) - f(1)\} = 0$ 이고 $g(x)$ 는 다항함수이므로

$$g(1) - f(1) = 0, g(1) = f(1)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - f(1)}{x^3 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} \times \frac{1}{x^2 + x + 1} \right\} \\ &= \frac{1}{3} g'(1) \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \frac{1}{3} g'(1) = 2 \text{에서 } g'(1) = 6$$

$$g(x) = (ax^2 - 2ax + 2)f(x) \text{의 양변에 } x=1 \text{을 대입하면}$$

$$g(1) = (-a + 2)f(1)$$

$$f(1) = g(1) \neq 0 \text{이므로}$$

$$1 = -a + 2, a = 1$$

$$g(x) = (x^2 - 2x + 2)f(x) \text{이므로}$$

$$g'(x) = (2x - 2)f(x) + (x^2 - 2x + 2)f'(x) \text{의 양변에}$$

$$x=1 \text{을 대입하면}$$

$$g'(1) = 0 + f'(1) = 6 \text{에서 } f'(1) = 6$$

$$\text{따라서 } a + f'(1) = 1 + 6 = 7$$

답 ③

Level 3 실력 완성

본문 42~43쪽

1 ⑤

2 ④

3 ④

4 10

5 ④

6 ③

- 1 \neg . 실수 t ($t \neq a$)에 대하여

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{f(t) - f(a)}{t - a} \\ &= \frac{(t^2 - 2t + 2) - (a^2 - 2a + 2)}{t - a} \\ &= \frac{(t - a)(t + a) - 2(t - a)}{t - a} \\ &= t + a - 2 \end{aligned}$$

$$\text{이고, } g(a) = 2a - 2 \text{이므로}$$

$$\text{모든 실수 } t \text{에 대하여 } g(t) = t + a - 2$$

$$\text{이때 } t > 2 - a \text{이면}$$

$$g(t) = t + a - 2 > (2 - a) + a - 2 = 0 \text{ (참)}$$

$$\neg. \neg \text{에서 } g(t) = t + a - 2 \text{이므로}$$

$$g(b) = b + a - 2$$

$$g(b) = 0 \text{에서 } a = 2 - b$$

$$b > a \text{이므로 } b > 2 - b, 2b > 2$$

$$\text{따라서 } b > 1 \text{ (참)}$$

$$\neg. \neg \text{에서 } g(t) = t + a - 2 \text{이므로}$$

$$g(b) = b + a - 2$$

$$f'(x) = 2x - 2 \text{이므로 } f'(c) = 2c - 2$$

$$g(b) = f'(c) \text{에서 } b + a - 2 = 2c - 2$$

$$\text{따라서 } 2c = a + b, c = \frac{a + b}{2} \text{ (참)}$$



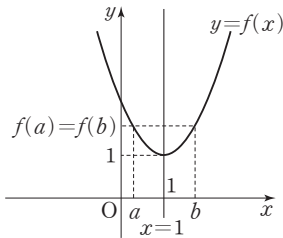
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

다른 풀이

ㄴ. 실수 t ($t \neq a$)에 대하여 $g(t) = \frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ 이므로

$$g(b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \text{이면 } f(a) = f(b) \text{이다.}$$



이때 함수 $f(x) = (x-1)^2 + 1$ 의 그래프가 직선 $x=1$ 에 대하여 대칭이고 $b > a$ 이므로 $f(a) = f(b)$ 이려면 $a < 1$ 이고 $b > 1$ 이어야 한다. (참)

2 조건 (가)에서 $x \neq 0$ 일 때 $f(x) > 0$ 이고, $f(0) = 0$ 이므로 $x < 0$ 일 때,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} < 0 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} \leq 0$$

$x > 0$ 일 때,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} > 0 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} \geq 0$$

이때 함수 $f(x)$ 는 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0, \text{ 즉 } f'(0) = 0$$

$g(0) = 3$ 이므로 조건 (나)에서 모든 실수 x 에 대하여

$$g(x) - g(0) \leq 2x + f(x)$$

(i) $x < 0$ 일 때,

$$\frac{2x+f(x)}{x} \leq \frac{g(x)-g(0)}{x}$$

함수 $f(x)$ 는 미분가능하고 $f'(0) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x+f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left\{ 2 + \frac{f(x)}{x} \right\} = 2 + f'(0) = 2$$

함수 $g(x)$ 는 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x} = g'(0)$$

따라서 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$2 \leq g'(0)$$

(ii) $x > 0$ 일 때,

$$\frac{g(x)-g(0)}{x} \leq \frac{2x+f(x)}{x}$$

함수 $f(x)$ 는 미분가능하고 $f'(0) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x+f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ 2 + \frac{f(x)}{x} \right\} = 2 + f'(0) = 2$$

함수 $g(x)$ 는 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x} = g'(0)$$

따라서 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$g'(0) \leq 2$$

(i), (ii)에서 $g'(0) = 2$

답 ④

3 $g(x) = x^3 + (2-a)x^2 + (1-2a)x - a$ 에서

$$g(a) = a^3 + (2-a)a^2 + (1-2a)a - a = 0$$

이므로

$$\begin{aligned} g(x) &= (x-a)(x^2+2x+1) \\ &= (x-a)(x+1)^2 \end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 함수

$|g(x)| = (x+1)^2|x-a|$ 는 $x < a$ 인 모든 실수 x 와 $x > a$ 인 모든 실수 x 에서 미분가능하므로 함수 $f(x)|g(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $x=a$ 에서 미분가능하여야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)|g(x)| - f(a)|g(a)|}{x-a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{(x-5)(x+1)^2|x-a| - 0}{x-a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{(x-5)(x+1)^2(a-x)}{x-a}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow a^-} (x-5)(x+1)^2$$

$$= -(a-5)(a+1)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)|g(x)| - f(a)|g(a)|}{x-a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{(x-5)(x+1)^2|x-a| - 0}{x-a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{(x-5)(x+1)^2(x-a)}{x-a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a^+} (x-5)(x+1)^2$$

$$= (a-5)(a+1)^2$$

이므로 $-(a-5)(a+1)^2 = (a-5)(a+1)^2$

$$(a-5)(a+1)^2 = 0$$

$$a = 5 \text{ 또는 } a = -1$$

따라서 구하는 모든 상수 a 의 값의 합은

$$5 + (-1) = 4$$

답 ④

4 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) + g(x) - 4}{x - 3} = 2$ 에서
 $x \rightarrow 3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로
 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.
 즉, $\lim_{x \rightarrow 3} \{f(x) + g(x) - 4\} = 0$ 에서
 $f(x) + g(x)$ 는 연속함수이므로
 $f(3) + g(3) - 4 = 0$
 $f(3) + g(3) = 4$ ㉠

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - g(x) - 2}{x - 3} = -6$ 에서
 $x \rightarrow 3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로
 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.
 즉, $\lim_{x \rightarrow 3} \{f(x) - g(x) - 2\} = 0$ 에서
 $f(x) - g(x)$ 는 연속함수이므로
 $f(3) - g(3) - 2 = 0$
 $f(3) - g(3) = 2$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면
 $f(3) = 3, g(3) = 1$

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) + g(x) - 4}{x - 3}$
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 3 + g(x) - 1}{x - 3}$
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\{f(x) - f(3)\} + \{g(x) - g(3)\}}{x - 3}$
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} + \lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x) - g(3)}{x - 3}$
 $= f'(3) + g'(3)$
 이므로 $f'(3) + g'(3) = 2$ ㉢

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - g(x) - 2}{x - 3}$
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 3 - \{g(x) - 1\}}{x - 3}$
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\{f(x) - f(3)\} - \{g(x) - g(3)\}}{x - 3}$
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} - \lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x) - g(3)}{x - 3}$
 $= f'(3) - g'(3)$
 이므로 $f'(3) - g'(3) = -6$ ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면
 $f'(3) = -2, g'(3) = 4$
 $h(x) = f(x)g(x)$ 가 미분가능하고
 $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ 이므로
 $h'(3) = f'(3)g(3) + f(3)g'(3)$
 $= (-2) \times 1 + 3 \times 4 = 10$

답 10

5 조건 (가)에서 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - g(x)}{x - 1} = 3f(1)$
 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로
 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.
 즉, $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) - g(x)\} = 0$ 에서
 $f(x) - g(x)$ 는 연속함수이므로
 $f(1) - g(1) = 0$
 $f(1) = g(1)$
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - g(x)}{x - 1}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{f(x) - f(1)\} - \{g(x) - g(1)\}}{x - 1}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1}$
 $= f'(1) - g'(1)$
 이므로
 $f'(1) - g'(1) = 3f(1)$
 $f(1) = \frac{f'(1) - g'(1)}{3}$ ㉠

조건 (나)에서
 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left\{ f\left(1 + \frac{3}{x}\right) - g\left(1 - \frac{1}{x}\right) \right\} = 5f(1)$
 $h = \frac{1}{x}$ 이라 하면 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $h \rightarrow 0+$ 이고
 $f(1) = g(1)$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left\{ f\left(1 + \frac{3}{x}\right) - g\left(1 - \frac{1}{x}\right) \right\}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(1 + 3h) - g(1 - h)}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\{f(1 + 3h) - f(1)\} - \{g(1 - h) - g(1)\}}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0+} \left\{ 3 \times \frac{f(1 + 3h) - f(1)}{3h} + \frac{g(1 - h) - g(1)}{-h} \right\}$
 $= 3 \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(1 + 3h) - f(1)}{3h} + \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{g(1 - h) - g(1)}{-h}$
 이때 $f(x), g(x)$ 가 미분가능하므로
 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left\{ f\left(1 + \frac{3}{x}\right) - g\left(1 - \frac{1}{x}\right) \right\} = 3f'(1) + g'(1)$
 즉, $3f'(1) + g'(1) = 5f(1)$
 이 식에 ㉠을 대입하면
 $3f'(1) + g'(1) = 5 \times \frac{f'(1) - g'(1)}{3}$
 $9f'(1) + 3g'(1) = 5f'(1) - 5g'(1)$
 따라서 $f'(1) = -2g'(1)$ 이고 $f'(1) \neq 0$ 이므로
 $\frac{g'(1)}{f'(1)} = -\frac{1}{2}$

답 ④



$$6 \quad \begin{cases} x^2 - 4 \leq f(x) \leq x - 2 & (2 - t < x < 2) & \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\ x - 2 \leq f(x) \leq x^2 - 4 & (2 < x < 2 + t) & \cdots \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 2^-} (x - 2) = 0$$

이때 $f(x)$ 는 다항함수이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \leq 0$$

$$\text{또한, } \textcircled{㉡} \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \geq 0$$

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$$

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수와 상수항이 모두 1이므로

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1 \quad (a, b \text{는 상수})$$

로 놓으면 $f(x)$ 는 연속함수이므로

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0 \text{에서}$$

$$8 + 4a + 2b + 1 = 0, \quad b = -2a - \frac{9}{2}$$

$$f(2) = 0 \text{이므로}$$

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } x < 2 \text{이면 } \frac{x-2}{x-2} \leq \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \leq \frac{x^2-4}{x-2}$$

$$\textcircled{㉡} \text{에서 } x > 2 \text{이면 } \frac{x-2}{x-2} \leq \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \leq \frac{x^2-4}{x-2}$$

$$\text{이때 } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-2} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4 \text{이므로}$$

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$1 \leq \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \leq 4, \quad \text{즉 } 1 \leq f'(2) \leq 4$$

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1 \text{에서 } f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f'(2) = 12 + 4a + b$$

$$\text{이때 } b = -2a - \frac{9}{2} \text{이므로}$$

$$f'(2) = 12 + 4a + \left(-2a - \frac{9}{2}\right) = 2a + \frac{15}{2}$$

$$\text{즉, } 1 \leq 2a + \frac{15}{2} \leq 4 \text{에서 } -\frac{13}{4} \leq a \leq -\frac{7}{4}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \{f'(0) - f'(x)\} &= \lim_{x \rightarrow 1} \{b - (3x^2 + 2ax + b)\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (-3x^2 - 2ax) = -3 - 2a \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \leq -2a - 3 \leq \frac{7}{2} \text{이고 } -2a - 3 \text{이 짝수이므로}$$

$$-2a - 3 = 2, \quad a = -\frac{5}{2}$$

$$b = -2a - \frac{9}{2} = (-2) \times \left(-\frac{5}{2}\right) - \frac{9}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 \text{이므로}$$

$$f(1) = 1 - \frac{5}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 0$$

답 ③

04 도함수의 활용 (1)

유제

본문 47~53쪽

1 ③	2 ②	3 ③	4 ⑤	5 ⑤
6 ②	7 ⑤			

$$1 \quad f(x) = 2x^3 - 2x^2 + a \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 4x$$

$$f'(1) = 2 \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y = 2(x - 1) + a, \quad \text{즉 } y = 2x - 2 + a$$

$$\text{이 직선이 점 } (0, 4) \text{를 지나므로 } 0 - 2 + a = 4$$

$$\text{따라서 } a = 6$$

답 ③

$$2 \quad g(x) = x^3 + 2x \text{라 하면}$$

$$g'(x) = 3x^2 + 2$$

$$g'(0) = 2 \text{이므로 곡선 } y = x^3 + 2x \text{ 위의 원점에서의 접선의 방정식은}$$

$$y = 2x$$

$$\text{점 } (1, f(1)) \text{이 직선 } y = 2x \text{ 위의 점이므로 } f(1) = 2$$

$$y = x^2 f(x) \text{에서 } y' = 2x f(x) + x^2 f'(x)$$

$$\text{곡선 } y = x^2 f(x) \text{ 위의 점 } (1, f(1)) \text{에서의 접선의 기울기는}$$

$$2f(1) + f'(1) = 4 + f'(1)$$

$$\text{따라서 } 4 + f'(1) = 2 \text{이므로 } f'(1) = -2$$

답 ②

$$3 \quad \text{다항함수 } f(x) \text{는 실수 전체의 집합에서 연속이고}$$

$$f(1)f(2) < 0, \quad f(2)f(3) < 0, \quad f(3)f(4) < 0$$

이므로 사잇값의 정리에 의하여

$$f(d_1) = 0 \quad (1 < d_1 < 2)$$

$$f(d_2) = 0 \quad (2 < d_2 < 3)$$

$$f(d_3) = 0 \quad (3 < d_3 < 4)$$

를 만족시키는 d_1, d_2, d_3 이 존재한다.

다항함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고

$$f(d_1) = f(d_2), \quad f(d_2) = f(d_3)$$

이므로 롤의 정리에 의하여

$$f'(c_1) = 0 \quad (d_1 < c_1 < d_2)$$

$$f'(c_2) = 0 \quad (d_2 < c_2 < d_3)$$

을 만족시키는 c_1, c_2 가 존재한다.
따라서 $n(S_f)$ 의 최솟값은 2이다.

답 ③

- 4 함수 $f(x)=x^3+ax^2+(a+6)x$ 가 일대일대응이 되려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 또는 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

$$f(x)=x^3+ax^2+(a+6)x \text{에서}$$

$$f'(x)=3x^2+2ax+a+6 \text{이므로 } f'(x) \geq 0 \text{이어야 한다.}$$

$$\text{즉, } 3x^2+2ax+a+6 \geq 0$$

이차방정식 $3x^2+2ax+a+6=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-3(a+6) \leq 0$$

$$a^2-3a-18 \leq 0, (a-6)(a+3) \leq 0$$

$$-3 \leq a \leq 6$$

따라서 모든 정수 a 의 값은 $-3, -2, -1, \dots, 6$ 이고, 그 개수는 10이다.

답 ⑤

- 5 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 a 가 아닌 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

$$f(x)=\begin{cases} 3x^3+4x-4a & (x < a) \\ 3x^3-4x+4a & (x \geq a) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f'(x)=\begin{cases} 9x^2+4 & (x < a) \\ 9x^2-4 & (x > a) \end{cases}$$

(i) $x < a$ 일 때,

$$f'(x)=9x^2+4 \text{에서 } x < a \text{인 모든 실수 } x \text{에 대하여}$$

$$f'(x) > 0 \text{이다.}$$

(ii) $x > a$ 일 때,

$$f'(x)=9x^2-4 \text{에서 } x > a \text{인 모든 실수 } x \text{에 대하여}$$

$$f'(x) \geq 0 \text{이라면}$$

$$f'(0)=-4 \text{에서 } a > 0 \text{이고}$$

$$f'(a)=9a^2-4 \geq 0 \text{이어야 한다.}$$

$$\text{즉, } a > 0 \text{이고 } (3a-2)(3a+2) \geq 0 \text{이므로 } a \geq \frac{2}{3}$$

(i), (ii)에서 a 의 최솟값은 $\frac{2}{3}$ 이다.

답 ⑤

- 6 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+4$ 에서

$$f'(x)=3x^2-3x-6=3(x+1)(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	\dots	-1	\dots	2	\dots
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	\nearrow	극대	\searrow	극소	\nearrow

함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극댓값을 갖고, $x=2$ 에서 극솟값을 갖는다.

$$f(-1)=-1-\frac{3}{2}+6+4=\frac{15}{2}$$

$$f(2)=8-6-12+4=-6$$

이므로 함수 $f(x)$ 의 모든 극값의 합은

$$\frac{15}{2}+(-6)=\frac{3}{2}$$

답 ②

- 7 $f(x)=3x^4+4x^3-12x^2+a$ 에서

$$f'(x)=12x^3+12x^2-24x=12x(x+2)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-2 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	\dots	-2	\dots	0	\dots	1	\dots
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	\searrow	극소	\nearrow	극대	\searrow	극소	\nearrow

함수 $f(x)$ 는 $x=-2$, $x=1$ 에서 극솟값을 갖고, $x=0$ 에서 극댓값을 갖는다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축에 접하려면 극댓값 또는 극솟값이 0이어야 하므로

$$f(-2)=48-32-48+a=0 \text{에서 } a=32$$

$$f(0)=0+a=0 \text{에서 } a=0$$

$$f(1)=3+4-12+a=0 \text{에서 } a=5$$

따라서 모든 상수 a 의 값의 합은

$$32+0+5=37$$

답 ⑤

Level 1 기초 연습

본문 54쪽

1 ③

2 ④

3 ①

4 ②

- 1 $f(x)=x^4+3x+4$ 라 하면

$$f'(x)=4x^3+3$$



곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, 2)$ 에서의 접선의 기울기가 $f'(-1)=-1$ 이므로 접선의 방정식은 $y=-(x+1)+2$, 즉 $y=-x+1$ 따라서 $a=-1$, $b=1$ 이므로 $a+b=0$

답 ③

2 $f(x)=x^3-x^2+3$ 이라 하면

$$f'(x)=3x^2-2x$$

$f'(1)=1$ 이므로 점 $(1, 3)$ 에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 -1 이다.

점 $(1, 3)$ 을 지나고 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 방정식은

$$y=-(x-1)+3, \text{ 즉 } y=-x+4$$

따라서 구하는 직선의 y 절편은 4 이다.

답 ④

3 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x$ 에서

$$f'(x)=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=1 \text{ 또는 } x=3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	극대	\searrow	극소	\nearrow

구간 $(-\infty, k]$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 한다.

따라서 $k \leq 1$ 이므로 실수 k 의 최댓값은 1 이다.

답 ①

4 $f(x)=x^3-12x$ 에서

$$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-2 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	극대	\searrow	극소	\nearrow

함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 극댓값을 가지므로

$$M=f(-2)=-8+24=16$$

$$\text{따라서 } a+M=-2+16=14$$

답 ②

Level 2 기본 연습

본문 55~56쪽

1 ③

2 ④

3 23

4 ④

5 21

6 ①

7 ④

8 20

1 점 $(1, 6)$ 이 곡선 $y=(x+1)f(x)$ 위에 있으므로

$$2f(1)=6, f(1)=3$$

$$g(x)=(x+1)f(x) \text{라 하면}$$

$$g'(x)=f(x)+(x+1)f'(x)$$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, 6)$ 에서의 접선의 기울기가

$$g'(1)=f(1)+2f'(1)=3+2f'(1)$$

이므로 접선의 방정식은

$$y=\{3+2f'(1)\}(x-1)+6$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$-3-2f'(1)+6=0$$

$$\text{따라서 } f'(1)=\frac{3}{2}$$

답 ③

2 $f(x)=x^3-6x$ 에서 $f'(x)=3x^2-6$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선의 방정식은

$$y=(3a^2-6)(x-a)+a^3-6a, \text{ 즉 } y=(3a^2-6)x-2a^3$$

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=(3a^2-6)x-2a^3$ 의 교점의 x 좌표는 x 에 대한 방정식 $x^3-6x=(3a^2-6)x-2a^3$ 의 근이다.

$$x^3-3a^2x+2a^3=0, (x-a)^2(x+2a)=0$$

$$x=a \text{ 또는 } x=-2a$$

$$\text{즉, } b=-2a$$

$$b-a=3 \text{에서 } -2a-a=3 \text{이므로 } a=-1$$

따라서 A $(-1, 5)$, B $(2, -4)$ 이므로

$$AB=\sqrt{\{2-(-1)\}^2+(-4-5)^2}=3\sqrt{10}$$

답 ④

3 $f(t)-mt=0$ 에서 $\frac{f(t)}{t}=m$ (단, $t \neq 0$)

$$\frac{f(t)}{t}=\frac{f(t)-0}{t-0} \text{이므로 } \frac{f(t)}{t} \text{의 값은 두 점 } (0, 0),$$

$(t, f(t))$ 를 지나는 직선의 기울기이다.

실수 m 의 최솟값이 4 이므로 직선 $y=4x$ 는 곡선 $y=f(x)$ 의 접선이다.

$$f(x)=(x-1)^4+a=(x^2-2x+1)(x^2-2x+1)+a$$

에서

$$f'(x)=(2x-2)(x^2-2x+1)+(x^2-2x+1)(2x-2) \\ =4(x-1)^3$$

기울기가 4인 접선의 접점의 좌표를 $(a, (a-1)^4+a)$ 라 하면
 $f'(a)=4(a-1)^3=4$

$$(a-1)^3=1, a=2$$

접점의 좌표가 $(2, 1+a)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y=4(x-2)+1+a, \text{ 즉 } y=4x-7+a$$

이 직선이 $y=4x$ 이므로

$$-7+a=0, a=7$$

따라서 $f(x)=(x-1)^4+7$ 이므로

$$f(3)=16+7=23$$

답 23

참고

t 에 대한 방정식 $f(t)-mt=0$ 을 만족시키는 t 의 값은 곡선 $y=f(t)$ 와 직선 $y=mt$ 의 교점의 t 좌표와 같다.

양수 t 가 존재하도록 하는 실수 m 의 최솟값이 4이므로 직선 $y=4t$ 는 곡선 $y=f(t)$ 의 접선이어야 한다.

- 4 $(x_1-x_2)\{f(x_1)-f(x_2)\}>0$ 에서 $x_1>x_2$ 이면
 $f(x_1)>f(x_2)$ 이고 $x_1<x_2$ 이면 $f(x_1)<f(x_2)$ 이므로 함수
 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

따라서 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x)\geq 0$ 이어야 하므로

$$f'(x)=3x^2-2ax+a\geq 0$$

$$3x^2-2ax+a\geq 0$$

이차방정식 $3x^2-2ax+a=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D\leq 0$
 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=a^2-3a\leq 0$$

$$a(a-3)\leq 0, 0\leq a\leq 3$$

따라서 구하는 모든 정수 a 의 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 개수는 4이다.

답 4

- 5 모든 실수 x 에 대하여 $(f\circ g)(x)=x$ 인 함수 $g(x)$ 가 존재
 하므로 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x)\geq 0$ 이어야 한다.

$$f(x)=x^3+ax^2+(a^2-1)x+3\text{에서}$$

$$f'(x)=3x^2+2ax+a^2-1\geq 0$$

이차방정식 $3x^2+2ax+a^2-1=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$D\leq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=a^2-3(a^2-1)\leq 0$$

$$2a^2-3\geq 0$$

$$a\leq -\frac{\sqrt{6}}{2} \text{ 또는 } a\geq \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

조건 (나)에서 $f(1)=1+a+a^2-1+3=5$ 이므로

$$a^2+a-2=0, (a+2)(a-1)=0$$

$$a=-2 \text{ 또는 } a=1$$

㉠에 의하여 $a=-2$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2+3x+3$ 이므로

$$f(3)=27-18+9+3=21$$

답 21

- 6 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	\cdots	-3	\cdots	-1	\cdots	1	\cdots	3	\cdots	4	\cdots	5	\cdots
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$
$f(x)$	\searrow	극소	\nearrow	극대	\searrow		\searrow	극소	\nearrow	극대	\searrow	극소	\nearrow

따라서 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극댓값을 갖는 모든 a 의 값은 $-1, 4$ 이므로 그 합은

$$-1+4=3$$

답 ①

- 7 $g(x)=x^2f(x)$ 에서

$$g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$$

함수 $g(x)$ 가 $x=3$ 에서 극댓값 18을 가지므로

$$g(3)=9f(3)=18, f(3)=2$$

함수 $g(x)$ 가 $x=3$ 에서 극값을 가지므로

$$g'(3)=6f(3)+9f'(3) \\ =6\times 2+9f'(3)=0$$

$$\text{따라서 } f'(3)=-\frac{4}{3}$$

답 ④

- 8 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=a$ 에서도 연속이다.

$$\text{즉, } \lim_{x\rightarrow a-} f(x)=\lim_{x\rightarrow a+} f(x)=f(a)$$

이때

$$\lim_{x\rightarrow a-} f(x)=\lim_{x\rightarrow a-} (-x^3+3x^2)=-a^3+3a^2$$

$$\lim_{x\rightarrow a+} f(x)=\lim_{x\rightarrow a+} (-x+b)=-a+b$$

$$f(a)=-a+b$$

$$\text{이므로 } -a^3+3a^2=-a+b$$

$$b=-a^3+3a^2+a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$g(x)=-x^3+3x^2$ 이라 하면

$$g'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$$

$$g'(x)=0\text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

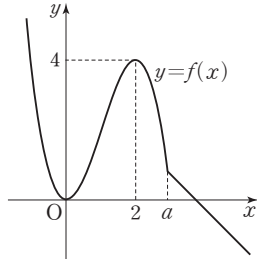
함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.



x	...	0	...	2	...
$g'(x)$	-	0	+	0	-
$g(x)$	\searrow	극소	\nearrow	극대	\searrow

(i) $a \geq 2$ 일 때,

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 [그림 1]과 같으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0, x=2$ 에서 극값을 갖는다.



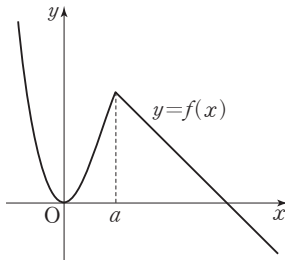
[그림 1]

$f(0)+f(2)=0+(-8+12)=4$ 이므로 모든 극값의 합은 4이다.

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $0 < a < 2$ 일 때,

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 [그림 2]와 같으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0, x=a$ 에서 극값을 갖는다.



[그림 2]

모든 극값의 합이 2이므로

$$f(0)+f(a)=0+(-a^3+3a^2)=2$$

$$a^3-3a^2+2=0$$

$$(a-1)(a^2-2a-2)=0$$

$$a=1 \text{ 또는 } a=1-\sqrt{3} \text{ 또는 } a=1+\sqrt{3}$$

$$0 < a < 2 \text{ 이므로 } a=1$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } b=-1+3+1=3$$

(i), (ii)에서 $a=1, b=3$

$$\text{따라서 } f(x)=\begin{cases} -x^3+3x^2 & (x<1) \\ -x+3 & (x\geq 1) \end{cases} \text{ 이므로}$$

$$f(a-b)=f(-2)=8+12=20$$

20

Level 3 실력 완성

본문 57쪽

1 191 2 ⑤ 3 ②

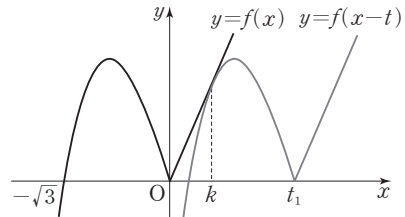
1 함수 $y=f(x-t)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 t 만큼 평행이동한 것이다.

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 a 의 값은 두 함수 $y=f(x), y=f(x-t)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표 중 하나이다.

두 곡선 $y=f(x), y=f(x-t)$ 가 서로 접할 때 t 의 값을 t_1 이라 하자.

(i) $t=t_1$ 일 때,

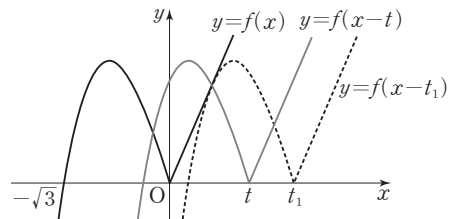
두 곡선 $y=f(x), y=f(x-t)$ 는 [그림 1]과 같으므로 $h(t)=1$



[그림 1]

(ii) $0 < t < t_1$ 일 때,

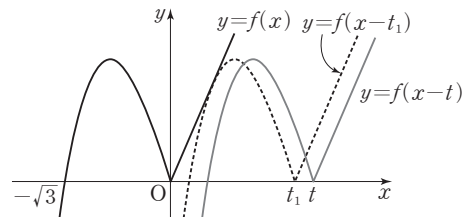
두 곡선 $y=f(x), y=f(x-t)$ 는 [그림 2]와 같으므로 $h(t)=2$



[그림 2]

(iii) $t > t_1$ 일 때,

두 곡선 $y=f(x), y=f(x-t)$ 는 [그림 3]과 같으므로 $h(t)=0$



[그림 3]

(i), (ii), (iii)에서 함수 $h(t)$ 는 $t=t_1$ 에서 불연속이다.

즉, $t=t_1$ 일 때 직선 $y=\frac{7}{3}x$ 가 곡선 $y=(x-t)^3-3(x-t)$

와 점 $(k, \frac{7}{3}k)$ ($0 < k < t_1$)에서 접한다고 하자.

$y=(x-t)^3-3(x-t)$ 에서 $y'=3(x-t)^2-3$

곡선 $y=(x-t_1)^3-3(x-t_1)$ 위의 점 $(k, \frac{7}{3}k)$ 에서의

접선의 기울기가 $\frac{7}{3}$ 이므로

$$3(k-t_1)^2-3=\frac{7}{3}, (k-t_1)^2=\frac{16}{9}$$

$$k-t_1=-\frac{4}{3} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

점 $(k, \frac{7}{3}k)$ 가 곡선 $y=(x-t_1)^3-3(x-t_1)$ 위의 점이므로

$$(k-t_1)^3-3(k-t_1)=\frac{7}{3}k \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에서

$$-\frac{64}{27}-3 \times \left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{7}{3}k, k=\frac{44}{63}$$

$$\textcircled{7} \text{에서 } t_1=\frac{44}{63}+\frac{4}{3}=\frac{128}{63}, \text{ 즉 } a=\frac{128}{63}$$

따라서 $p=63, q=128$ 이므로

$$p+q=63+128=191$$

답 191

참고

$$(x-t)^3=(x-t)(x^2-2xt+t^2) \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \{(x-t)^3\}' &= (x^2-2xt+t^2) + (x-t)(2x-2t) \\ &= (x-t)^2+2(x-t)^2 \\ &= 3(x-t)^2 \end{aligned}$$

2. $\neg, h(x)=g(x)-x$ 라 하면

함수 $h(x)$ 는 닫힌구간 $[1, 2]$ 에서 연속이고,

$$h(1)=g(1)-1=f(1)-1=1>0$$

$$h(2)=g(2)-2=f(2)-2=-2<0$$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $h(x)=0$ 은 열린구간 $(1, 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 $g(a)=a$ 인 실수 a 가 열린구간 $(1, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다. (참)

ㄴ. 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$ 에서도 연속이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \{-f(-x)\} = -f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

$$g(0)=f(0)$$

에서 $-f(0)=f(0)$ 이므로 $f(0)=0$

또한, $g(-2)=-f(2)=0$

함수 $g(x)$ 는 닫힌구간 $[-2, 0]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-2, 0)$ 에서 미분가능하며 $g(0)=g(-2)$ 이므로 롤의 정리에 의하여 $g'(b)=0$ 인 실수 b 가 열린구간 $(-2, 0)$ 에 적어도 하나 존재한다. (참)

$$\text{ㄷ. } g(-1)=-f(1)=-2$$

함수 $g(x)$ 는 닫힌구간 $[-1, 0]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-1, 0)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{g(0)-g(-1)}{0-(-1)}=g'(c_1), \text{ 즉 } g'(c_1)=2 \text{인 실수 } c_1 \text{이}$$

열린구간 $(-1, 0)$ 에 적어도 하나 존재한다.

또한, 함수 $g(x)$ 는 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, 1)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{g(1)-g(0)}{1-0}=g'(c_2), \text{ 즉 } g'(c_2)=2 \text{인 실수 } c_2 \text{가 열}$$

린구간 $(0, 1)$ 에 적어도 하나 존재한다.

따라서 $g'(c)=2$ 인 실수 c 가 열린구간 $(-1, 1)$ 에 적어도 두 개 존재한다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

3. 조건 (나)에서 $f(0)=3, f'(0)=-1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

(i) $a < 0$ 일 때,

$(x^2-a)^3=(x^2-a)(x^2-a)(x^2-a)$ 이고, $f(x)$ 가 삼차함수이므로 $f(x)g(x)=(x^2-a)^3$ 인 다항함수 $g(x)$ 가 존재하지 않는다.

즉, 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) $a=0$ 일 때,

$$f(x)g(x)=x^6 \text{에서}$$

$$f(x)=kx^3 \ (k>0, k \text{는 상수}) \text{이므로 } \textcircled{1} \text{을 만족시키지 않는다.}$$

(iii) $a > 0$ 일 때,

$$f(x)g(x)=(x^2-a)^3 \text{에서}$$

$$f(x)g(x)=(x-\sqrt{a})^3(x+\sqrt{a})^3$$

양의 상수 k 에 대하여

$$f(x)=k(x-\sqrt{a})^3 \text{이면}$$



$f'(x)=3k(x-\sqrt{a})^2$ 이고 $f'(0)=3ka>0$ 이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

$f(x)=k(x+\sqrt{a})^3$ 이면

$f'(x)=3k(x+\sqrt{a})^2$ 이고 $f'(0)=3ka>0$ 이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

$f(x)=k(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})^2$ 이면

$f(0)=-k\sqrt{a}\times(\sqrt{a})^2=-ka\sqrt{a}<0$ 이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

$f(x)=k(x-\sqrt{a})^2(x+\sqrt{a})$ 이면

$f(x)=k(x-\sqrt{a})(x^2-a)$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= k(x^2-a) + k(x-\sqrt{a}) \times 2x \\ &= k(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a}) + 2kx(x-\sqrt{a}) \\ &= k(x-\sqrt{a})(3x+\sqrt{a}) \end{aligned}$$

$f'(0)=-ka=-1$ 이므로 $ka=1$

$f(0)=ka\sqrt{a}=3$ 이므로 $\sqrt{a}=3, a=9$

따라서 $k=\frac{1}{9}$

(i), (ii), (iii)에서 $f(x)=\frac{1}{9}(x-3)^2(x+3)$ 이므로

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{9} \times 2(x-3)(x+3) + \frac{1}{9}(x-3)^2 \\ &= \frac{1}{9}(x-3)(3x+3) \\ &= \frac{1}{3}(x+1)(x-3) \end{aligned}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은

$$f(-1)=\frac{1}{9} \times 16 \times 2 = \frac{32}{9}$$

답 ②

참고

① $(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$ 이므로

$$\begin{aligned} \{(x-a)^2\}' &= 2x-2a \\ &= 2(x-a) \end{aligned}$$

② $(x-a)^3=(x-a)(x-a)^2$ 이므로

$$\begin{aligned} \{(x-a)^3\}' &= (x-a)^2 + (x-a) \times 2(x-a) \\ &= 3(x-a)^2 \end{aligned}$$

05 도함수의 활용 (2)

유제

본문 61~65쪽

1 16 2 ③ 3 ② 4 ④ 5 ⑤
6 ①

1 $f(x)=x^3-6x^2+9x+12$ 에서

$$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=1$ 또는 $x=3$

단한구간 $[0, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	3
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	12	↗	16	↘	12

단한구간 $[0, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최댓값 16을 갖는다.

답 16

2 $f(x)=3x^4-4x^3+a$ 에서

$$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=1$

단한구간 $[-1, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	0	...	1	...	2
$f'(x)$		-	0	-	0	+	
$f(x)$	$a+7$	↘	a	↘	$a-1$	↗	$a+16$

단한구간 $[-1, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최댓값 $a+16$ 을 갖고, $x=1$ 에서 최솟값 $a-1$ 을 갖는다.

즉, $M=a+16, m=a-1$

$$M+m=(a+16)+(a-1)=2a+15=18$$

따라서 $a=\frac{3}{2}$

답 ③

3 $f(x)=g(x)$, 즉 $x^3-9x=-3x^2+a$ 에서

$$x^3+3x^2-9x=a$$

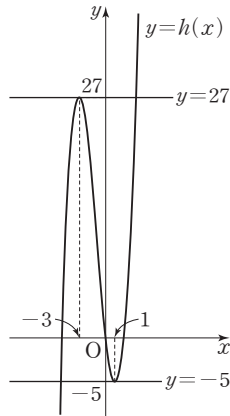
$h(x)=x^3+3x^2-9x$ 라 하면

$$h'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+3)(x-1)$$

$$h'(x) = 0 \text{에서 } x = -3 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-3	...	1	...
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	↗	27	↘	-5	↗



함수 $y = h(x)$ 의 그래프는 그림과 같고 방정식 $x^3 + 3x^2 - 9x = a$ 가 서로 다른 두 실근을 가지려면 함수 $y = h(x)$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

따라서 $a = -5$ 또는 $a = 27$ 이므로 구하는 모든 상수 a 의 값의 합은

$$-5 + 27 = 22$$

답 ②

- 4 $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 40$ 이라 하면
 $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x+1)(x-2)$
 $f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = 2$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	35	↗	40	↘	8	↗

함수 $f(x)$ 는 $x = 2$ 에서 최솟값 8을 갖는다.

따라서 모든 실수 x 에 대하여 부등식

$3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 40 > a$ 가 성립하려면 $a < 8$ 이어야 하므로 모든 자연수 a 의 값은 1, 2, 3, ..., 7이고, 그 개수는 7이다.

답 ④

- 5 점 P의 시각 t 에서의 위치 x 가 $x = t^3 - 3t^2 - 5t$ 이므로 속도 v 는

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 6t - 5$$

점 P의 속도가 4인 시각은

$$3t^2 - 6t - 5 = 4$$

$$3t^2 - 6t - 9 = 0, 3(t-3)(t+1) = 0$$

$$t \geq 0 \text{이므로 } t = 3$$

점 P의 시각 t 에서의 가속도 a 는

$$a = \frac{dv}{dt} = 6t - 6$$

이므로 $t = 3$ 일 때 점 P의 가속도는

$$6 \times 3 - 6 = 12$$

답 ⑤

- 6 두 점 P, Q가 만나는 시각은

$$f(t) = g(t) \text{에서}$$

$$t^3 - 3t^2 + t = 2t^2 - 3t$$

$$t^3 - 5t^2 + 4t = 0, t(t-1)(t-4) = 0$$

$$t = 0 \text{ 또는 } t = 1 \text{ 또는 } t = 4$$

$t > 0$ 에서 두 점 P, Q가 처음으로 만나는 시각은 $t = 1$ 일 때 이다.

점 P의 시각 t 에서의 속도는 $f'(t) = 3t^2 - 6t + 1$ 이므로

$t = 1$ 일 때 점 P의 속도는

$$3 - 6 + 1 = -2$$

답 ①

Level 1 기초 연습

본문 66쪽

1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4 ③

- 1 $f(x) = x^4 - 4x + 8$ 에서
 $f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x-1)(x^2 + x + 1)$
 $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ 이므로

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	5	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 최솟값 5를 갖는다.

답 ③



- 2 x 에 대한 방정식 $3f(x)=a$ 의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=3f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 의 교점의 개수와 같다. 함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으면 함수 $y=3f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 의 교점의 개수는 항상 1이므로 함수 $f(x)$ 는 극값을 가져야 한다.

함수 $f(x)$ 가 $x=a, x=\beta$ ($a<\beta$)에서 극값을 갖는다고 하면 방정식 $3f(x)=a$ 가 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 모든 실수 a 의 값의 합이 8이므로

$$3f(a)+3f(\beta)=8$$

따라서 $f(a)+f(\beta)=\frac{8}{3}$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 모든 극값의 합은 $\frac{8}{3}$ 이다.

답 ④

- 3 $f(x)=x^3-5x^2+3x+k$ 라 하면
 $f'(x)=3x^2-10x+3=(3x-1)(x-3)$
 $f'(x)=0$ 에서 $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=3$

$x>0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	...	$\frac{1}{3}$...	3	...
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	(k)	↗	$k+\frac{13}{27}$	↘	$k-9$	↗

$x>0$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $x^3-5x^2+3x+k>0$ 이 성립하려면

$$f(3)=k-9>0, \text{ 즉 } k>9$$

이어야 한다.

따라서 정수 k 의 최솟값은 10이다.

답 ⑤

- 4 점 P의 시간 t 에서의 위치 x 가 $x=-2t^3+6t^2+9$ 이므로 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=-6t^2+12t$$

$$a=\frac{dv}{dt}=-12t+12$$

점 P의 가속도가 0인 시각은 $-12t+12=0$ 에서 $t=1$

$t=1$ 일 때 점 P의 속도는

$$-6+12=6$$

답 ③

Level 2 기본 연습

본문 67~68쪽

- 1 ⑤ 2 ③ 3 ④ 4 ④ 5 ⑤
 6 ③ 7 ③ 8 70

- 1 삼차함수 $f(x)=ax^3-3ax^2$ ($a\neq 0$)에서

$$f'(x)=3ax^2-6ax=3ax(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

(i) $a>0$ 일 때,

단한구간 $[0, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	2	...	4
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	0	↘	$-4a$	↗	$16a$

단한구간 $[0, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최솟값 $-4a$ 를 갖고, $x=4$ 에서 최댓값 $16a$ 를 갖는다.

$16a=6$ 에서 $a=\frac{3}{8}$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 최솟값은

$$-4 \times \frac{3}{8} = -\frac{3}{2}$$

(ii) $a<0$ 일 때,

단한구간 $[0, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	2	...	4
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	$-4a$	↘	$16a$

단한구간 $[0, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최댓값 $-4a$ 를 갖고, $x=4$ 에서 최솟값 $16a$ 를 갖는다.

$-4a=6$ 에서 $a=-\frac{3}{2}$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 최솟값은

$$16 \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -24$$

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 정수이므로 $a=-\frac{3}{2}$

따라서 $f(x)=-\frac{3}{2}x^2(x-3)$ 이므로

$$f(1)=-\frac{3}{2} \times 1 \times (-2)=3$$

답 ⑤

- 2 점 P의 좌표를 $\left(t, t^4-\frac{3}{2}t^2-t+2\right)$ ($t>0$)이라 하면

$$y=t^4-\frac{3}{2}t^2-t+2 \text{에서}$$

$$y' = 4t^3 - 3t - 1 = (t-1)(2t+1)^2$$

이므로 함수 $y = t^4 - \frac{3}{2}t^2 - t + 2$ 는 $t=1$ 에서 최솟값 $\frac{1}{2}$ 을

갖는다. 즉, $t > 0$ 에서 $t^4 - \frac{3}{2}t^2 - t + 2 > 0$ 이다.

사각형 OQPR의 둘레의 길이를 $f(t)$ 라 하면

$$f(t) = 2t + 2\left(t^4 - \frac{3}{2}t^2 - t + 2\right) = 2t^4 - 3t^2 + 4$$

$$\text{에서 } f'(t) = 8t^3 - 6t = 2t(2t + \sqrt{3})(2t - \sqrt{3})$$

$$t > 0 \text{이므로 } f'(t) = 0 \text{에서 } t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$t > 0$ 에서 함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	...	$\frac{\sqrt{3}}{2}$...
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$		\	극소	/

$t > 0$ 에서 함수 $f(t)$ 는 $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 에서 최소이고 최솟값은

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 \times \frac{9}{16} - 3 \times \frac{3}{4} + 4 = \frac{23}{8}$$

답 ③

3 $x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x + a = 0$ 에서 $-x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x = a$

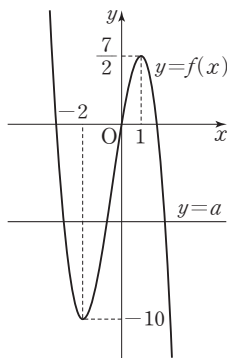
$$f(x) = -x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x \text{라 하면}$$

$$f'(x) = -3x^2 - 3x + 6 = -3(x+2)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -2 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\	-10	/	$\frac{7}{2}$	\



주어진 방정식이 서로 다른 두 개의 음의 실근과 한 개의 양

의 실근을 가지려면 그림과 같이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 의 세 교점의 x 좌표가 음수 2개와 양수 1개이어야 한다.

$$\text{즉, } -10 < a < 0$$

따라서 모든 정수 a 의 값은 $-9, -8, -7, \dots, -1$ 이고, 그 개수는 9이다.

답 ④

4 $f(x) = x^3 - 3x$ 라 하면 $|x^3 - 3x| = k^3 - 3k$ 에서

$$|f(x)| = f(k)$$

방정식 $|f(x)| = f(k)$ 의 서로 다른 실근의 개수는 함수

$y = |f(x)|$ 의 그래프와 직선 $y = f(k)$ 의 교점의 개수와 같다.

$$f(x) = x^3 - 3x \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$$

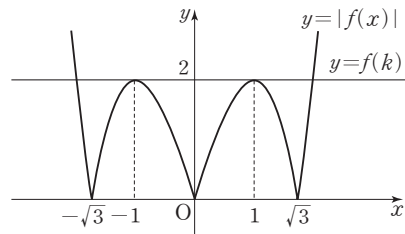
$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/	2	\	-2	/

함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프는 그림과 같으므로 방정식

$|x^3 - 3x| = k^3 - 3k$ 의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되려면 직선 $y = f(k)$ 는 그림과 같아야 한다.



즉, $f(k) = 2$ 이다.

$$k^3 - 3k = 2 \text{에서 } (k-2)(k+1)^2 = 0$$

따라서 $k = 2$ 또는 $k = -1$ 이므로 모든 실수 k 의 값의 합은 $2 + (-1) = 1$

답 ④

5 $x^3 + 3x^2 + 2x = 2x + t$ 에서

$$x^3 + 3x^2 = t$$

직선 $y = 2x + t$ 와 곡선 $y = x^3 + 3x^2 + 2x$ 의 교점의 개수는

직선 $y = t$ 와 곡선 $y = x^3 + 3x^2$ 의 교점의 개수와 같다.

$$g(x) = x^3 + 3x^2 \text{이라 하면}$$

$$g'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$$

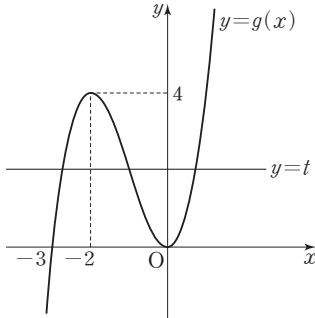
$$g'(x) = 0 \text{에서 } x = -2 \text{ 또는 } x = 0$$



함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	0	...
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	\nearrow	4	\searrow	0	\nearrow

직선 $y=t$ 와 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같으므로 함수 $f(t)$ 는 $t=0, t=4$ 에서만 불연속이다.



즉, $a \neq 0, a \neq 4$ 인 모든 실수 a 에 대하여

$$\lim_{t \rightarrow a^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow a^+} f(t) \text{이다.}$$

$a=0$ 일 때, $\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t)=1, \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)=3$ 이므로

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) - \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = -2$$

$a=4$ 일 때, $\lim_{t \rightarrow 4^-} f(t)=3, \lim_{t \rightarrow 4^+} f(t)=1$ 이므로

$$\lim_{t \rightarrow 4^-} f(t) - \lim_{t \rightarrow 4^+} f(t) = 2$$

따라서 $a=4$

답 ⑤

6 $f(x)=x^3-3x^2+a$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

$0 \leq x \leq 4$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	2	...	4
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	a	\searrow	$a-4$	\nearrow	$a+16$

$0 \leq x \leq 4$ 에서

$$a-4 \leq f(x) \leq a+16$$

따라서 $-18 < a-4, a+16 < 18$ 에서

$$-14 < a < 2$$

이므로 모든 정수 a 의 값은 $-13, -12, -11, \dots, 1$ 이고, 그 개수는 15이다.

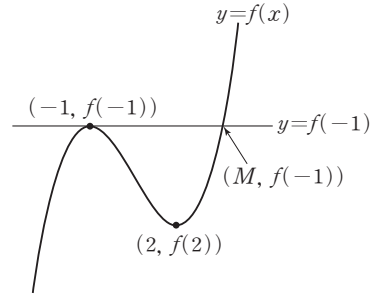
답 ③

7 $f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	극대	\searrow	극소	\nearrow

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



실수 a 의 최댓값을 M ($M > 2$)라 하자.

$x \leq M$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $f(x) \leq f(-1)$ 이 성립하려면 방정식 $f(x)=f(-1)$ 은 서로 다른 두 실근 $x=-1$ 또는 $x=M$ 을 가져야 한다. 즉,

$$f(x)-f(-1)=k(x+1)^2(x-M) \quad (k>0, k \text{는 상수})$$

로 놓을 수 있으므로

$$f'(x)=2k(x+1)(x-M)+k(x+1)^2$$

$$f'(2)=6k(2-M)+9k=0 \text{에서}$$

$$3k(7-2M)=0$$

$$k>0 \text{이므로 } 7-2M=0$$

$$\text{따라서 } M=\frac{7}{2}$$

답 ③

참고

$$(x+1)^2=x^2+2x+1 \text{이므로}$$

$$\{(x+1)^2\}'=2x+2=2(x+1)$$

8 점 P의 시각 t 에서의 위치 x 가 $x=-t^4+8t^3+6t$ 이므로 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=-4t^3+24t^2+6$$

$$a=\frac{dv}{dt}=-12t^2+48t=-12(t-2)^2+48$$

$t=2$ 일 때 점 P의 가속도가 최대이므로 점 P의 가속도가 최대인 시각에서의 점 P의 속도는

$$-32+96+6=70$$

답 70

Level 3 실력 완성

본문 69쪽

1 ⑤ 2 ⑤ 3 75

1 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2$ 에서

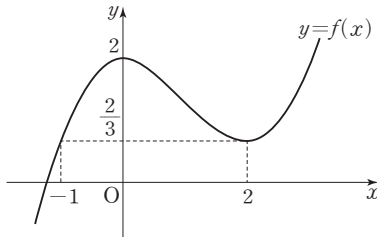
$$f'(x) = x^2 - 2x = x(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	2	↘	$\frac{2}{3}$	↗

즉, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



(i) $t < -1$ 일 때,

닫힌구간 $[t, t+1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은

$f(t+1)$ 이므로

$$g(t) = f(t+1)$$

$$= \frac{1}{3}(t+1)^3 - (t+1)^2 + 2$$

$$= \frac{1}{3}t^3 - t + \frac{4}{3}$$

따라서 $g'(t) = t^2 - 1$ 이므로

$$g'(-2) = 4 - 1 = 3$$

(ii) $0 < t < 1$ 일 때,

닫힌구간 $[t, t+1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(t)$ 이

므로

$$g(t) = f(t)$$

$$= \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 2$$

따라서 $g'(t) = t^2 - 2t$ 이므로

$$g'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$$

(i), (ii)에서

$$g'(-2) + g'\left(\frac{1}{2}\right) = 3 + \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{4}$$

답 ⑤

2 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=c$ 에서도 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow c^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c)$$

$$\lim_{x \rightarrow c^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} \{8 - f(x)\} = 8 - f(c)$$

$$g(c) = 8 - f(c)$$

에서

$$f(c) = 8 - f(c)$$

$$f(c) = 4 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 $x < c$ 일 때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프이고, $x \geq c$ 일 때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 8만큼 평행이동한 것이다.

$$f(x) = x^4 + ax^3 + b \text{에서}$$

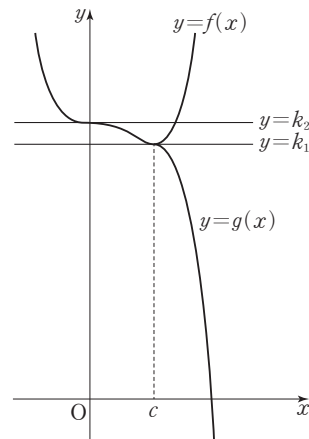
$$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 = x^2(4x + 3a)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x = -\frac{3a}{4}$$

집합 S 의 원소의 개수는 2이므로

$$-\frac{3a}{4} = c \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

이때 $c > 0$ 에서 $a < 0$ 이므로 조건을 만족시키려면 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같아야 한다.



집합 S 의 모든 원소의 합은 $\frac{25}{3}$ 이므로

$$g(0) + g(c) = \frac{25}{3}$$

$$\textcircled{7} \text{에서 } g(0) + g(c) = f(0) + f(c) = b + 4 = \frac{25}{3} \text{이므로}$$

$$b = \frac{13}{3}$$

$$\textcircled{8} \text{에서 } f(x) = x^4 - \frac{4c}{3}x^3 + \frac{13}{3} \text{이므로}$$

$$f(c) = -\frac{c^4}{3} + \frac{13}{3} = 4$$

$$c^4 = 1, c = 1$$



따라서 $f(x) = x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{13}{3}$ 이므로

$$f(2) = 16 - \frac{32}{3} + \frac{13}{3} = \frac{29}{3}$$

답 ⑤

3 $h(x) = (x+a)f(x)$ 라 하면

$$g(x) = |h(x)|$$

$h(-a) = 0$ 이고 함수 $|h(x)|$ 가 $x=1$ 에서만 미분가능하지 않으므로

$$h'(-a) = 0, h(1) = 0$$

즉, $h(x) = (x+a)^2(x-1)(x+b)$ (b 는 상수)로 놓을 수 있다.

$$b = -1 \text{ 이면}$$

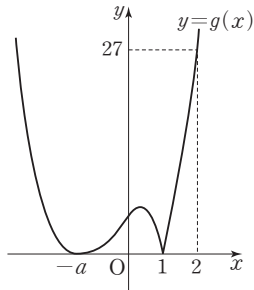
$h(x) = (x+a)^2(x-1)^2$ 이므로 함수 $|h(x)|$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고,

$$b \neq a, b \neq -1 \text{ 이면}$$

$h(x) = (x+a)^2(x-1)(x+b)$ 이므로 함수 $|h(x)|$ 는 $x=1, x=-b$ 에서 미분가능하지 않으므로 $b=a$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } h(x) = (x+a)^3(x-1)$$

함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



조건 (나)에서 $g(2) = 27$ 이므로

$$g(2) = |(2+a)^3 \times (2-1)| = (2+a)^3 = 27$$

$$\text{즉, } a = 1$$

따라서 $f(x) = (x+1)^2(x-1)$ 이므로

$$f(4) = 25 \times 3 = 75$$

답 75

06 부정적분과 정적분

유제

본문 73~81쪽

1 ④	2 ③	3 ②	4 ④	5 ①
6 ④	7 ②	8 ③	9 ③	10 ①

1 함수 $f(x)$ 의 부정적분이 $4x^3 + 3x^2 - 2x + C$ 이므로

$$f(x) = (4x^3 + 3x^2 - 2x + C)' = 12x^2 + 6x - 2$$

따라서

$$\begin{aligned} G(x) &= \int xf(x)dx = \int (12x^3 + 6x^2 - 2x)dx \\ &= 3x^4 + 2x^3 - x^2 + C_1 \quad (C_1 \text{은 적분상수}) \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} G(1) - G(-1) &= (3 + 2 - 1 + C_1) - (3 - 2 - 1 + C_1) \\ &= 4 \end{aligned}$$

답 ④

2 조건 (가)에서 $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ 이므로

$$f(x) = \int (3x^2 - 12x + 9)dx$$

$$= x^3 - 6x^2 + 9x + C \quad (C \text{는 적분상수})$$

$$f'(x) = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=1 \text{ 또는 } x=3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	$4+C$	\searrow	C	\nearrow

조건 (나)에서 함수 $f(x)$ 의 극댓값이 7이므로

$$4+C=7 \text{에서 } C=3$$

따라서 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$ 이므로

$$f(2) = 8 - 24 + 18 + 3 = 5$$

답 ③

3 $F(x) = (x+1)f(x) - x^4 - 4x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = f(x) + (x+1)f'(x) - 4x^3 - 4$$

$$(x+1)f'(x) = 4(x^3 + 1)$$

$$= 4(x+1)(x^2 - x + 1)$$

$f(x)$ 가 다항함수이므로 $f'(x)=4(x^2-x+1)$

$$f(x)=\int(4x^2-4x+4)dx$$

$$=\frac{4}{3}x^3-2x^2+4x+C \text{ (C는 적분상수)}$$

$$F(0)=f(0)=3\text{이므로 } f(0)=C=3$$

$$\text{따라서 } f(x)=\frac{4}{3}x^3-2x^2+4x+3\text{이므로}$$

$$f(3)=36-18+12+3=33$$

답 ②

4 $F(x)=xf(x)+ax^3-10x^2$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x)=f(x)+xf'(x)+3ax^2-20x$$

$$xf'(x)=-3ax^2+20x$$

$f(x)$ 가 다항함수이므로 $f'(x)=-3ax+20$

$$f(x)=\int(-3ax+20)dx$$

$$=-\frac{3}{2}ax^2+20x+C \text{ (C는 적분상수)}$$

$$f(0)=2\text{이므로 } f(0)=C=2$$

$$f(x)=-\frac{3}{2}ax^2+20x+2\text{이고 } f(1)=10\text{이므로}$$

$$f(1)=-\frac{3}{2}a+20+2=10, \frac{3}{2}a=12$$

$$\text{따라서 } a=8$$

답 ④

5 $\int_2^x f(t)dt=ax+4+\int_1^x(3t^2-2t)dt$ ㉠

㉠의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$0=2a+4+\int_1^2(3t^2-2t)dt$$

$$=2a+4+\left[t^3-t^2\right]_1^2$$

$$=2a+4+\{(8-4)-(1-1)\}$$

$$=2a+8$$

$$\text{이므로 } a=-4$$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x)=a+3x^2-2x=3x^2-2x-4$$

따라서

$$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^3(3x^2-2x-4)dx$$

$$=\left[x^3-x^2-4x\right]_0^3=27-9-12=6$$

답 ①

6 $\int_1^x f(t)dt=xf(x)+ax^2-10$ ㉡

㉡의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$0=f(1)+a-10$$

$$f(1)=8\text{이므로 } 0=8+a-10, a=2$$

㉡의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x)=f(x)+xf'(x)+2ax$$

$$xf'(x)=-2ax=-4x$$

$f(x)$ 가 다항함수이므로 $f'(x)=-4$

$$f(x)=\int(-4)dx=-4x+C \text{ (C는 적분상수)}$$

이고,

$$f(1)=-4+C=8\text{에서 } C=12$$

따라서 $f(x)=-4x+12$ 이므로

$$f(a)=f(2)=-8+12=4$$

답 ④

7 $x+f(x)=\begin{cases} 3x+3 & (x<0) \\ 3 & (x\geq 0) \end{cases}$ 이므로

$$f(x)\{x+f(x)\}=\begin{cases} (2x+3)(3x+3) & (x<0) \\ 3(-x+3) & (x\geq 0) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 6x^2+15x+9 & (x<0) \\ -3x+9 & (x\geq 0) \end{cases}$$

따라서

$$\int_{-1}^3 f(x)\{x+f(x)\}dx$$

$$=\int_{-1}^0 (6x^2+15x+9)dx+\int_0^3 (-3x+9)dx$$

$$=\left[2x^3+\frac{15}{2}x^2+9x\right]_{-1}^0+\left[-\frac{3}{2}x^2+9x\right]_0^3$$

$$=-\left(-2+\frac{15}{2}-9\right)+\left(-\frac{27}{2}+27\right)$$

$$=17$$

답 ②

8 $f(x)=x^3+ax^2+4$ 에서 $f'(x)=3x^2+2ax$

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 극솟값을 가지므로

$$f'(2)=0\text{에서 } 12+4a=0, a=-3$$

$$f(x)=x^3-3x^2+4\text{이므로}$$

$$\int_0^2 f(x)dx+\int_0^2 (3x^2+b)dx$$

$$=\int_0^2 (x^3-3x^2+4)dx+\int_0^2 (3x^2+b)dx$$



$$\begin{aligned}
 &= \int_0^2 \{(x^3 - 3x^2 + 4) + (3x^2 + b)\} dx \\
 &= \int_0^2 (x^3 + 4 + b) dx \\
 &= \left[\frac{1}{4}x^4 + (4+b)x \right]_0^2 \\
 &= 4 + 8 + 2b = 2b + 12 \\
 &\text{이고, } 2b + 12 = 0 \text{ 이므로 } b = -6 \\
 &\text{따라서} \\
 &ab = (-3) \times (-6) = 18
 \end{aligned}$$

답 ③

9 $\int_{-2}^2 (ax+b)dx = 2 \int_0^2 b dx = 2 \left[bx \right]_0^2 = 4b$
 이므로 $4b = 8$ 에서 $b = 2$
 $\int_{-2}^2 (ax^2 + bx + 1)dx = 2 \int_0^2 (ax^2 + 1)dx$
 $= 2 \left[\frac{a}{3}x^3 + x \right]_0^2 = 2 \left(\frac{8}{3}a + 2 \right)$
 이므로 $2 \left(\frac{8}{3}a + 2 \right) = 20$ 에서 $a = 3$
 따라서 $a + b = 3 + 2 = 5$

답 ③

10 사차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = f(x)$ 를 만족시키므로
 $f(x) = x^4 + ax^2 + b$ (a, b 는 상수)
 로 놓을 수 있다.
 $\int_{-1}^1 f(x)dx = 2 \int_0^1 f(x)dx$ 이므로
 $\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \frac{6}{5}$ 에서
 $2 \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \frac{6}{5}$
 $\int_0^1 f(x)dx = \frac{6}{5}$
 따라서
 $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x^4 + ax^2 + b)dx$
 $= \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{a}{3}x^3 + bx \right]_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{a}{3} + b$
 이므로 $\frac{1}{5} + \frac{a}{3} + b = \frac{6}{5}$ 에서
 $a + 3b = 3 \quad \dots\dots ㉠$
 $f(1) = 1 + a + b = 0$ 에서
 $a + b = -1 \quad \dots\dots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -3, b = 2$
 $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$ 이므로
 $f(2) = 16 - 12 + 2 = 6$

답 ①

Level 1 기초 연습

본문 82~83쪽

1 ①	2 ③	3 ④	4 ①	5 ⑤
6 ⑤	7 ②	8 ⑤	9 ①	10 ⑤

1 $f'(x) = 2x - 4$ 이므로
 $f(x) = \int (2x - 4)dx$
 $= x^2 - 4x + C$ (C 는 적분상수)
 $f(2) = 4 - 8 + C = 0$ 에서 $C = 4$
 따라서 $f(x) = x^2 - 4x + 4$ 이므로
 $f(1) = 1 - 4 + 4 = 1$

2 함수 $f(x)$ 의 부정적분이 $x^3 + 3x + C$ 이므로
 $f(x) = (x^3 + 3x + C)' = 3x^2 + 3$
 $f'(x) = 6x$
 따라서 $f'(2) = 12$

답 ①

답 ③

3 $F(x) = xf(x) + x^4$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $f(x) = f(x) + xf'(x) + 4x^3$
 $xf'(x) = -4x^3$
 $f(x)$ 는 다항함수이므로 $f'(x) = -4x^2$
 따라서 $f'(1) = -4$

답 ④

4 $F(x) = xf(x) + ax^2$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $f(x) = f(x) + xf'(x) + 2ax$
 $xf'(x) + 2ax = 0 \quad \dots\dots ㉠$
 $f'(1) = 4$ 이므로 ㉠에 $x = 1$ 을 대입하면
 $f'(1) + 2a = 0, 4 + 2a = 0$
 따라서 $a = -2$

답 ①

$$5 \quad \int_0^2 (x^2 + ax) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 \right]_0^2 = \frac{8}{3} + 2a$$

$$\text{이므로 } \frac{8}{3} + 2a = -\frac{4}{3} \text{에서 } a = -2$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (ax+b) dx &= \int_0^1 (-2x+b) dx \\ &= \left[-x^2 + bx \right]_0^1 = -1 + b \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } -1 + b = 6 \text{에서 } b = 7$$

$$\text{따라서 } a+b = -2+7=5$$

답 ⑤

$$6 \quad \int_a^x f(t) dt = x^2 - 2x \quad \dots\dots ㉠$$

㉠의 양변에 $x=a$ 를 대입하면

$$0 = a^2 - 2a, \quad a(a-2) = 0$$

$$a=0 \text{ 또는 } a=2$$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 2x - 2$$

$$a=0 \text{이면 } f(a) = f(0) = -2 < 0$$

$$a=2 \text{ 이면 } f(a) = f(2) = 2 > 0$$

$$\text{따라서 } a=2$$

답 ⑤

$$\begin{aligned} 7 \quad \int_0^2 (x+1)|x-1| dx &= \int_0^1 (x+1)(1-x) dx + \int_1^2 (x+1)(x-1) dx \\ &= \int_0^1 (1-x^2) dx + \int_1^2 (x^2-1) dx \\ &= \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x \right]_1^2 \\ &= \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left\{ \left(\frac{8}{3} - 2 \right) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \right\} \\ &= 2 \end{aligned}$$

답 ②

$$\begin{aligned} 8 \quad \int_0^2 (x^2 + ax) dx &= \int_0^2 (x^2 + 1) dx + 4 \text{에서} \\ \int_0^2 (x^2 + ax) dx - \int_0^2 (x^2 + 1) dx &= \int_0^2 \{ (x^2 + ax) - (x^2 + 1) \} dx \end{aligned}$$

$$= \int_0^2 (ax - 1) dx$$

$$= \left[\frac{a}{2}x^2 - x \right]_0^2$$

$$= 2a - 2 = 4$$

$$\text{이므로 } a=3$$

$$\int_0^1 bx^2 dx = 9 - \int_1^3 bx^2 dx \text{에서}$$

$$\int_0^1 bx^2 dx + \int_1^3 bx^2 dx = \int_0^3 bx^2 dx$$

$$= \left[\frac{b}{3}x^3 \right]_0^3$$

$$= 9b = 9$$

$$\text{이므로 } b=1$$

$$\text{따라서 } a+b = 3+1=4$$

답 ⑤

$$\begin{aligned} 9 \quad \int_{-a}^a (x^3 + 3x^2 + 3) dx &= 2 \int_0^a (3x^2 + 3) dx \\ &= 2 \left[x^3 + 3x \right]_0^a = 2(a^3 + 3a) \end{aligned}$$

$$2(a^3 + 3a) = 8 \text{에서}$$

$$a^3 + 3a - 4 = 0$$

$$(a-1)(a^2 + a + 4) = 0$$

$$a \text{는 실수이므로 } a=1$$

답 ①

$$\begin{aligned} 10 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 - 1} \int_1^x f(t) dt &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{1}{x+1} \times \frac{1}{x-1} \int_1^x f(t) dt \right\} \\ \text{이고,} & \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} &= \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x f(t) dt &= f(1) = 1 + 6 - 1 = 6 \\ \text{이므로} & \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 - 1} \int_1^x f(t) dt &= \frac{1}{2} \times 6 = 3 \end{aligned}$$

답 ⑤

Level 2 기본 연습

본문 84~85쪽

1 ②

2 ②

3 ③

4 ③

5 ④

6 ④

7 ③

8 ④



- 1 $G(x) = x^2 f(x) - 2x^6 + 3x^5 \dots\dots ㉠$
 이때 $2xf(x)$ 의 한 부정적분이 $G(x)$ 이므로
 $G'(x) = 2xf(x)$
 ㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $2xf(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x) - 12x^5 + 15x^4$
 $x^2 f'(x) = 12x^5 - 15x^4$
 $f(x)$ 는 다항함수이므로 $f'(x) = 12x^3 - 15x^2$
 $f(x) = \int (12x^3 - 15x^2) dx$
 $= 3x^4 - 5x^3 + C$ (C 는 적분상수)
 ㉠에서 $G(1) = f(1) + 1$ 이고, $G(1) = 4$ 이므로
 $4 = f(1) + 1, f(1) = 3$
 $f(1) = 3 - 5 + C = 3$ 에서 $C = 5$
 따라서 $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 5$ 이므로
 $f(2) = 48 - 40 + 5 = 13$

답 ②

- 2 두 함수 $F(x), G(x)$ 가 모두 함수 $f(x)$ 의 부정적분이므로
 $G(x) = F(x) + C$ (C 는 상수)
 조건 (가)에서 $G(0) = F(0) + 2$ 이므로 $C = 2$
 조건 (나)에서 $G(3) = 8$ 이므로
 $G(3) = F(3) + 2 = 8, F(3) = 6$
 따라서
 $\int_1^3 f(x) dx = [F(x)]_1^3 = F(3) - F(1)$
 $= 6 - 2 = 4$

답 ②

- 3 $f(x) = x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)로 놓으면
 $f(-x) = x^2 - ax + b$ 이고,
 $F(x) = \int (x^2 + ax + b) dx$
 $= \frac{1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 + bx + C_1$ (C_1 은 적분상수)
 $G(x) = \int (x^2 - ax + b) dx$
 $= \frac{1}{3}x^3 - \frac{a}{2}x^2 + bx + C_2$ (C_2 는 적분상수)
 조건 (가)에서
 $F(0) = C_1 = 0, G(0) = C_2 = 0$
 따라서
 $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 + bx$
 $G(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{a}{2}x^2 + bx$

조건 (나)에서

$$F(1) - G(1) = \left(\frac{1}{3} + \frac{a}{2} + b\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{a}{2} + b\right)$$

$$= a = 3$$

조건 (다)에서

$$F(2) + G(2) = \left(\frac{8}{3} + 2a + 2b\right) + \left(\frac{8}{3} - 2a + 2b\right)$$

$$= \frac{16}{3} + 4b = \frac{4}{3}$$

$$4b = -4, b = -1$$

따라서 $f(x) = x^2 + 3x - 1$ 이므로

$$f(1) = 1 + 3 - 1 = 3$$

답 ③

- 4 $\int_0^2 f(x) dx = a$ (a 는 상수)라 하자.
 $f(x) = 3x^2 + a(2x - 1) = 3x^2 + 2ax - a$ 이므로
 $a = \int_0^2 f(x) dx$
 $= \int_0^2 (3x^2 + 2ax - a) dx$
 $= \left[x^3 + ax^2 - ax \right]_0^2 = 8 + 4a - 2a$
 즉, $a = 8 + 4a - 2a$ 에서 $a = -8$
 따라서 $f(x) = 3x^2 - 16x + 8$ 이므로
 $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (3x^2 - 16x + 8) dx$
 $= \left[x^3 - 8x^2 + 8x \right]_0^1 = 1 - 8 + 8 = 1$

답 ③

- 5 $\int_1^x (3t^4 + at^2 + bt) dt = \int_1^x \{t + f(t)\} dt + 3x^3 + a$
 $\dots\dots ㉠$

㉠의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$0 = 0 + 3 + a, a = -3$$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$3x^4 + ax^2 + bx = x + f(x) + 9x^2$$

$$f(x) = 3x^4 - 12x^2 + (b-1)x$$

$$f(2) = 48 - 48 + 2b - 2 = 20$$
에서

$$2b = 22, b = 11$$

따라서 $a + b = -3 + 11 = 8$

답 ④

$$\begin{aligned}
 6 \quad & \int_{-2}^3 f(x) dx \\
 &= \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx \\
 &= \int_{-2}^0 (ax^2 - 2ax + a) dx + \int_0^2 a dx \\
 &\quad + \int_2^3 (ax^2 - 2ax + a) dx \\
 &= \left[\frac{a}{3} x^3 - ax^2 + ax \right]_{-2}^0 + \left[ax \right]_0^2 + \left[\frac{a}{3} x^3 - ax^2 + ax \right]_2^3 \\
 &= -\left(-\frac{8}{3}a - 4a - 2a \right) + 2a \\
 &\quad + \left\{ (9a - 9a + 3a) - \left(\frac{8}{3}a - 4a + 2a \right) \right\} \\
 &= 13a
 \end{aligned}$$

이므로 $13a=26$ 에서 $a=2$

$$\begin{aligned}
 f(-x) &= \begin{cases} a(-x-1)^2 & (-x < 0 \text{ 또는 } -x \geq 2) \\ a & (0 \leq -x < 2) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 2(x+1)^2 & (x \leq -2 \text{ 또는 } x > 0) \\ 2 & (-2 < x \leq 0) \end{cases}
 \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}
 \int_0^a f(-x) dx &= \int_0^2 f(-x) dx \\
 &= \int_0^2 (2x^2 + 4x + 2) dx \\
 &= \left[\frac{2}{3} x^3 + 2x^2 + 2x \right]_0^2 \\
 &= \frac{16}{3} + 8 + 4 = \frac{52}{3}
 \end{aligned}$$

답 ④

7 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 1$ ($a \neq 0$, a, b, c 는 상수)로 놓으면

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \int_{-x}^x (at^3 + bt^2 + ct + 1) dt \\
 &= 2 \int_0^x (bt^2 + 1) dt \\
 &= 2 \left[\frac{b}{3} t^3 + t \right]_0^x \\
 &= \frac{2b}{3} x^3 + 2x
 \end{aligned}$$

$$\neg. g(-x) = -\frac{2b}{3} x^3 - 2x = -g(x) \text{ (참)}$$

$$\neg. f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \text{이고}$$

모든 실수 x 에 대하여 $f'(-x) = f'(x)$ 이면 $b=0$ 이므로

$$g(x) = 2x$$

따라서 $g(1) = 2$ (참)

$$\neg. g(x) = \frac{2b}{3} x^3 + 2x \text{에서 } g(1) = 0 \text{이면}$$

$$\frac{2b}{3} + 2 = 0, b = -3$$

따라서 $g(x) = -2x^3 + 2x$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 g(x) dx &= \int_0^1 (-2x^3 + 2x) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{2} x^4 + x^2 \right]_0^1 \\
 &= -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \text{ (거짓)}
 \end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

8 조건 (가)에서 모든 실수 x 에 대하여

$$f(-x) + g(-x) = -\{f(x) + g(x)\}$$

이므로

$$f(x) + g(x) = 2x^3 + (a+2)x^2 + (b-4)x \text{에서}$$

$$a+2=0, a=-2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4, g'(x) = 3x^2 + 4x + b \text{이므로}$$

조건 (나)에서

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^1 \{xf'(x) + g'(x)\} dx \\
 &= \int_{-1}^1 \{(3x^3 - 4x^2 - 4x) + (3x^2 + 4x + b)\} dx \\
 &= \int_{-1}^1 (3x^3 - x^2 + b) dx \\
 &= 2 \int_0^1 (-x^2 + b) dx \\
 &= 2 \left[-\frac{1}{3} x^3 + bx \right]_0^1 \\
 &= 2 \left(-\frac{1}{3} + b \right) \\
 &2 \left(-\frac{1}{3} + b \right) = \frac{28}{3} \text{에서 } b=5
 \end{aligned}$$

따라서 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x$, $g(x) = x^3 + 2x^2 + 5x$ 이므로

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^1 \{f(x) + xg(x)\} dx \\
 &= \int_{-1}^1 \{(x^3 - 2x^2 - 4x) + (x^4 + 2x^3 + 5x^2)\} dx \\
 &= \int_{-1}^1 (x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 4x) dx \\
 &= 2 \int_0^1 (x^4 + 3x^2) dx \\
 &= 2 \left[\frac{1}{5} x^5 + x^3 \right]_0^1 \\
 &= 2 \times \left(\frac{1}{5} + 1 \right) = \frac{12}{5}
 \end{aligned}$$

답 ④



Level 3 실력 완성

본문 86쪽

1 ① 2 ③ 3 ①

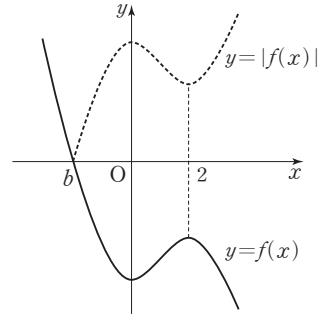
- 1 $\{xf(x)\}' = f(x) + xf'(x)$ 이므로
 조건 (나)에서
 $\{xf(x)\}' = 3x^2 - 6x + 4 + g'(x)$
 $xf(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + g(x) + C$ (C 는 적분상수)
 ㉠

㉠의 양변에 $x=0$ 을 대입하면
 $0 = g(0) + C$
 조건 (가)에서 $g(0) = 0$ 이므로 $C = 0$
 또한 두 조건 (가), (다)에 의하여 삼차항의 계수가 1인 삼차
 함수 $g(x)$ 는
 $g(x) = x(x-p)^2$
 으로 놓을 수 있으므로 이를 ㉠에 대입하면
 $xf(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + x(x-p)^2$
 $f(x)$ 는 다항함수이므로
 $f(x) = x^2 - 3x + 4 + (x-p)^2$
 조건 (가)에서 $f(1) = 3$ 이므로
 $f(1) = 1 - 3 + 4 + (1-p)^2 = 3$ 에서
 $p^2 - 2p = 0$, $p(p-2) = 0$
 $p \neq 0$ 이므로 $p = 2$
 따라서 $f(x) = x^2 - 3x + 4 + (x-2)^2$ 이므로
 $f(3) = 9 - 9 + 4 + 1 = 5$

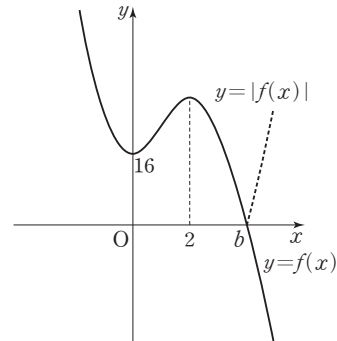
답 ①

- 2 조건 (가)에서 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $f(x) + f'(x) = f(x) + xf'(x) + 3x^3 + 3ax^2 + 6x$
 $(x-1)f'(x) = -3x^3 - 3ax^2 - 6x$
 양변에 $x=1$ 을 대입하면
 $0 = -3 - 3a - 6$ 에서 $a = -3$
 $(x-1)f'(x) = -3x(x^2 - 3x + 2)$
 $= -3x(x-1)(x-2)$
 $f(x)$ 는 다항함수이므로 $f'(x) = -3x(x-2)$
 즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극소이고, $x=2$ 에서 극대이다.
 $f(x) = \int (-3x^2 + 6x) dx$
 $= -x^3 + 3x^2 + C$ (C 는 적분상수) ㉡
 조건 (나)에서 함수 $|f(x)|$ 가 서로 다른 두 개의 극솟값
 $f(b)$, 16을 가지므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 다
 음 두 가지 경우가 있다.

- (i) 함수
- $f(x)$
- 의 극댓값이
- -16
- 인 경우



- (ii) 함수
- $f(x)$
- 의 극솟값이 16인 경우



이때 $b > 0$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 (ii)와 같다.

즉, $f(0) = 16$, $f(b) = 0$ 이다.

㉡에서 $f(0) = C = 16$ 이므로

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 16$$

$f(b) = 0$ 에서

$$-b^3 + 3b^2 + 16 = 0, \quad b^3 - 3b^2 - 16 = 0$$

$$(b-4)(b^2 + b + 4) = 0$$

$b > 0$ 이므로 $b = 4$

따라서 $a + b = -3 + 4 = 1$ 이므로

$$f(a+b) = f(1) = -1 + 3 + 16 = 18$$

답 ③

- 3 함수 $F(x)$ 의 삼차항의 계수가 1이고,

$$F(a) = F(b) = 0, \quad F'(a) = F'(b) = 0 \text{이므로}$$

$$F(x) = (x-a)^2(x-b)^2 \text{이다.}$$

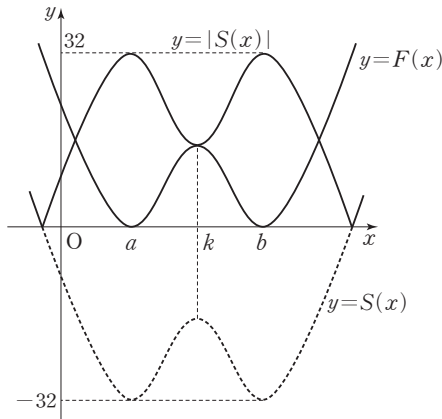
$$S(x) = \int_p^x f(t) dt = \left[F(t) \right]_p^x$$

$$= F(x) - F(p)$$

$$= F(x) - 32$$

이므로 함수 $y=S(x)$ 의 그래프는 함수 $y=F(x)$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -32 만큼 평행이동한 것이다.

조건 (가)에서 두 함수 $y=F(x)$, $y=|S(x)|$ 의 그래프의 한 교점 $(k, F(k))$ 에서의 접선의 기울기가 서로 같으므로 [그림 1]과 같이 함수 $F(x)$ 는 $x=k$ 에서 극대이다.



[그림 1]

$F(k)=|S(k)|$ 에서

$$F(k)=-S(k)=-\{F(k)-32\}$$

$$2F(k)=32, F(k)=16$$

즉, 함수 $F(x)$ 의 극댓값은 16이다.

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2(x-a)(x-b)^2 + 2(x-a)^2(x-b) \\ &= 2(x-a)(x-b)(2x-a-b) \end{aligned}$$

이므로 $F'(x)=0$ 에서

$$x=a \text{ 또는 } x=\frac{a+b}{2} \text{ 또는 } x=b$$

함수 $F(x)$ 는 $x=\frac{a+b}{2}$ 에서 극대이므로

$$F\left(\frac{a+b}{2}\right)=\left(\frac{b-a}{2}\right)^4=16$$

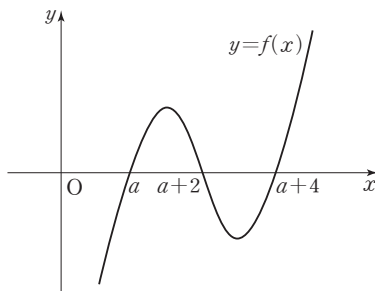
$$\frac{b-a}{2}>0 \text{ 이므로 } \frac{b-a}{2}=2$$

$$\text{즉, } b=a+4$$

$f(x)=F'(x)=2(x-a)(x-b)(2x-a-b)$ 이고,

$$\frac{a+b}{2}=\frac{a+a+4}{2}=a+2 \text{ 이므로}$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

조건 (나)에서

$$T(5)-T(3)=S(3)-S(5) \text{ 이고,}$$

$$\begin{aligned} T(5)-T(3) &= \int_3^5 |f(t)| dt - \int_3^5 |f(t)| dt \\ &= \int_3^5 |f(t)| dt + \int_3^5 |f(t)| dt \\ &= \int_3^5 |f(t)| dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(3)-S(5) &= \int_3^5 f(t) dt - \int_3^5 f(t) dt \\ &= \int_3^5 f(t) dt + \int_3^5 f(t) dt \\ &= \int_3^5 f(t) dt \\ &= -\int_3^5 f(t) dt \end{aligned}$$

이므로

$$\int_3^5 |f(t)| dt = -\int_3^5 f(t) dt = \int_3^5 \{-f(t)\} dt$$

즉, $3 \leq x \leq 5$ 에서 $f(x) \leq 0$ 이다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서

$x \leq a$ 또는 $a+2 \leq x \leq a+4$ 에서 $f(x) \leq 0$ 이고,

$0 < a < 3$ 이므로

$$a+2=3, a+4=5$$

즉, $a=1$ 이다.

따라서 $f(x)=4(x-1)(x-3)(x-5)$ 이므로

$$f(2)=4 \times 1 \times (-1) \times (-3)=12$$

답 ①

QR코드 앱을 사용해 추가 정보를 확인하세요.



수능 기출의 미래

두꺼운 분량, 답답한 해설에서 벗어나
학습 효율을 극대화한 기출문제집



07 정적분의 활용

유제

본문 89~97쪽

1 ④	2 ⑤	3 24	4 ①	5 ②
6 8	7 ④	8 10		

$$1 \quad g(x) = a(x-1)(x-3) + 2 \\ = ax^2 - 4ax + 3a + 2$$

이고, 닫힌구간 $[2, 3]$ 에서 $g(x) \geq 0$ 이므로 곡선 $y=g(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=2, x=3$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_2^3 (ax^2 - 4ax + 3a + 2) dx \\ &= \left[\frac{a}{3}x^3 - 2ax^2 + (3a+2)x \right]_2^3 \\ &= (9a - 18a + 9a + 6) - \left(\frac{8}{3}a - 8a + 6a + 4 \right) \\ &= -\frac{2}{3}a + 2 \end{aligned}$$

따라서 $-\frac{2}{3}a + 2 = \frac{3}{2}$ 에서 $a = \frac{3}{4}$ 이므로

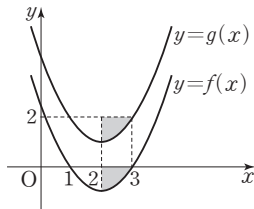
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3}{4}(x-1)(x-3) \\ &= \frac{3}{4}x^2 - 3x + \frac{9}{4} \end{aligned}$$

닫힌구간 $[3, 4]$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이므로 이 구간에서 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 직선 $x=4$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_3^4 \left(\frac{3}{4}x^2 - 3x + \frac{9}{4} \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x \right]_3^4 \\ &= (16 - 24 + 9) - \left(\frac{27}{4} - \frac{27}{2} + \frac{27}{4} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

㉠ ④

다른 풀이



곡선 $y=g(x)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 를 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 곡선 $y=g(x)$ 와 x 축 및 두 직선

$x=2, x=3$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{3}{2}$ 이면 닫힌구간 $[2, 3]$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 직선 $x=2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$1 \times 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_1^3 |f(x)| dx = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

이고, 닫힌구간 $[1, 3]$ 에서 $f(x) \leq 0$ 이므로

$$\begin{aligned} & \int_1^3 (-ax^2 + 4ax - 3a) dx \\ &= \left[-\frac{a}{3}x^3 + 2ax^2 - 3ax \right]_1^3 \\ &= (-9a + 18a - 9a) - \left(-\frac{a}{3} + 2a - 3a \right) \\ &= \frac{4}{3}a = 1 \end{aligned}$$

에서 $a = \frac{3}{4}$

따라서 닫힌구간 $[3, 4]$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이므로 이 구간에서 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 직선 $x=4$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_3^4 \left(\frac{3}{4}x^2 - 3x + \frac{9}{4} \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x \right]_3^4 \\ &= (16 - 24 + 9) - \left(\frac{27}{4} - \frac{27}{2} + \frac{27}{4} \right) = 1 \end{aligned}$$

2 함수 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + b$ 의 그래프가 점 $(3, 2)$ 를 지나

므로

$$f(3) = 9 + 9a + b = 2 \text{에서}$$

$$9a + b = -7 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f'(x) = x^2 + 2ax$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3, 2)$ 에서의 접선의 기울기가 3이므로

$$f'(3) = 9 + 6a = 3 \text{에서}$$

$$a = -1$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } b = 2$$

곡선 $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2$ 와 직선 $y = 3x - 7$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

$$\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2 = 3x - 7$$

$$x^3 - 3x^2 - 9x + 27 = 0$$

$$(x+3)(x-3)^2=0$$

$$x=-3 \text{ 또는 } x=3$$

닫힌구간 $[-3, 3]$ 에서 $f(x) \geq 3x-7$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=3x-7$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{-3}^3 \left\{ \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2 \right) - (3x-7) \right\} dx$$

$$= \int_{-3}^3 \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 9 \right) dx$$

$$= 2 \int_0^3 (-x^2 + 9) dx$$

$$= 2 \left[-\frac{1}{3}x^3 + 9x \right]_0^3$$

$$= 2 \times (-9 + 27) = 36$$

답 ⑤

3 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=ax$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

$$x^3 - (a+3)x^2 + 4ax = ax$$

$$x\{x^2 - (a+3)x + 3a\} = 0$$

$$x(x-3)(x-a) = 0$$

$$x=0 \text{ 또는 } x=3 \text{ 또는 } x=a$$

이때 $a > 3$ 이므로

닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 $f(x) \geq ax$

닫힌구간 $[3, a]$ 에서 $f(x) \leq ax$

직선 $y=ax$ 와 곡선 $y=f(x)$ 로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 $\int_0^a \{f(x) - ax\} dx = 0$ 이다.

$$\int_0^a \{f(x) - ax\} dx$$

$$= \int_0^a \{x^3 - (a+3)x^2 + 3ax\} dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{a+3}{3}x^3 + \frac{3a}{2}x^2 \right]_0^a$$

$$= \frac{1}{4}a^4 - \frac{a^3(a+3)}{3} + \frac{3}{2}a^3$$

$$= -\frac{1}{12}a^4 + \frac{1}{2}a^3$$

$$\text{이므로 } -\frac{1}{12}a^4 + \frac{1}{2}a^3 = 0 \text{에서}$$

$$-\frac{1}{12}a^3(a-6) = 0$$

$$a > 3 \text{이므로 } a=6$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x, \quad f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 \text{이}$$

므로

$$f'(a) = f'(6) = 108 - 108 + 24 = 24$$

답 24

4 함수 $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

$$f(x) = -\frac{1}{4}(x^2 - 4x - 4)$$

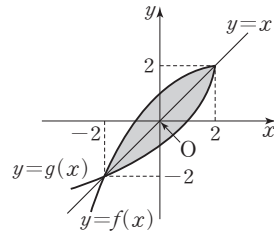
$$= -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 2 \quad (x \leq 2)$$

이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 교점의 x 좌표는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표와 같다.

$$\text{즉, } -\frac{1}{4}x^2 + x + 1 = x \text{에서}$$

$$x^2 = 4$$

$$x = -2 \text{ 또는 } x = 2$$



닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 $f(x) \geq x$ 이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$2 \int_{-2}^2 \left(-\frac{1}{4}x^2 + x + 1 - x \right) dx$$

$$= 4 \int_0^2 \left(-\frac{1}{4}x^2 + 1 \right) dx$$

$$= 4 \left[-\frac{1}{12}x^3 + x \right]_0^2$$

$$= 4 \times \left(-\frac{2}{3} + 2 \right) = \frac{16}{3}$$

답 ①

5 $v(t) = at^2 + bt + 5$ 에서

$$v(1) = v(2) \text{이므로}$$

$$a + b + 5 = 4a + 2b + 5$$

$$3a + b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

시각 $t=1$ 에서 $t=2$ 까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_1^2 v(t) dt = \int_1^2 (at^2 + bt + 5) dt$$

$$= \left[\frac{a}{3}t^3 + \frac{b}{2}t^2 + 5t \right]_1^2$$

$$= \left(\frac{8}{3}a + 2b + 10 \right) - \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + 5 \right)$$

$$= \frac{7}{3}a + \frac{3}{2}b + 5$$

$$\text{이므로 } \frac{7}{3}a + \frac{3}{2}b + 5 = \frac{43}{6} \text{에서}$$



$$14a + 9b + 30 = 43$$

$$14a + 9b = 13 \quad \dots\dots \textcircled{\text{L}}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -1$, $b = 3$

따라서 $a + b = 2$

답 ②

- 6** 점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간 $v(t) = 0$ 이므로 이차방정식 $t^2 + at + 8 = 0$ 의 서로 다른 두 실근이

$t = b$ 또는 $t = b + 2$ 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$b + (b + 2) = -a \quad \dots\dots \textcircled{\text{㉠}}$$

$$b(b + 2) = 8 \quad \dots\dots \textcircled{\text{㉡}}$$

$$\textcircled{\text{㉡}}\text{에서 } b^2 + 2b - 8 = 0$$

$$(b + 4)(b - 2) = 0$$

$b > 0$ 이므로 $b = 2$

$$\textcircled{\text{㉠}}\text{에서 } a = -6$$

따라서 $v(t) = t^2 - 6t + 8 = (t - 2)(t - 4)$ 이고

$2 \leq t \leq 4$ 에서 $v(t) \leq 0$, $t \geq 4$ 에서 $v(t) \geq 0$ 이므로

시각 $t = 2$ 에서 $t = 6$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} & \int_2^6 |v(t)| dt \\ &= \int_2^4 (-t^2 + 6t - 8) dt + \int_4^6 (t^2 - 6t + 8) dt \\ &= \left[-\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 - 8t \right]_2^4 + \left[\frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t \right]_4^6 \\ &= \left\{ \left(-\frac{64}{3} + 48 - 32 \right) - \left(-\frac{8}{3} + 12 - 16 \right) \right\} \\ & \quad + \left\{ \left(72 - 108 + 48 \right) - \left(\frac{64}{3} - 48 + 32 \right) \right\} \\ &= 8 \end{aligned}$$

답 8

- 7** 시각 $t = 0$ 에서의 두 점 P, Q의 위치가 모두 원점이므로
시각 $t = a$ 에서 점 P의 위치는

$$\begin{aligned} \int_0^a f(t) dt &= \int_0^a (2t - 8) dt \\ &= \left[t^2 - 8t \right]_0^a = a^2 - 8a \end{aligned}$$

이고, 시각 $t = a$ 에서 점 Q의 위치는

$$\begin{aligned} \int_0^a g(t) dt &= \int_0^a (16 - 4t) dt \\ &= \left[16t - 2t^2 \right]_0^a = 16a - 2a^2 \end{aligned}$$

시각 $t = a$ 에서 두 점 P, Q가 만나므로

$$a^2 - 8a = 16a - 2a^2, \quad a(a - 8) = 0$$

$a > 0$ 이므로 $a = 8$

$4 \leq t \leq 8$ 에서 $f(t) \geq 0$, $g(t) \leq 0$ 이므로

$$\begin{aligned} s_1 &= \int_4^8 |f(t)| dt = \int_4^8 f(t) dt \\ &= \int_4^8 (2t - 8) dt \\ &= \left[t^2 - 8t \right]_4^8 \\ &= (64 - 64) - (16 - 32) = 16 \\ s_2 &= \int_4^8 |g(t)| dt = \int_4^8 \{-g(t)\} dt \\ &= \int_4^8 (4t - 16) dt \\ &= \left[2t^2 - 16t \right]_4^8 \\ &= (128 - 128) - (32 - 64) = 32 \\ \text{따라서 } |s_1 - s_2| &= |16 - 32| = 16 \end{aligned}$$

답 ④

- 8** 시각 $t = 0$ 에서의 점 P의 위치가 원점이므로 시각 $t = 1$ 에서의 점 P의 위치는

$$\begin{aligned} \int_0^1 (3t^2 - 12t + a) dt &= \left[t^3 - 6t^2 + at \right]_0^1 \\ &= 1 - 6 + a \\ &= a - 5 \end{aligned}$$

이고 $a - 5 = 1$ 에서 $a = 6$

시각 $t = 2$ 에서 $t = 4$ 까지 두 점 P, Q의 위치의 변화량은 각각

$$\int_2^4 f(t) dt, \int_2^4 g(t) dt \text{이므로 } \int_2^4 f(t) dt = \int_2^4 g(t) dt \text{에서}$$

$$\int_2^4 \{f(t) - g(t)\} dt = 0 \text{이다.}$$

$$\begin{aligned} & \int_2^4 \{f(t) - g(t)\} dt \\ &= \int_2^4 \{(3t^2 - 12t + 6) - (-2t + b)\} dt \\ &= \int_2^4 (3t^2 - 10t + 6 - b) dt \\ &= \left[t^3 - 5t^2 + (6 - b)t \right]_2^4 \\ &= (64 - 80 + 24 - 4b) - (8 - 20 + 12 - 2b) \\ &= 8 - 2b \end{aligned}$$

이므로 $8 - 2b = 0$ 에서 $b = 4$

따라서 $a + b = 6 + 4 = 10$

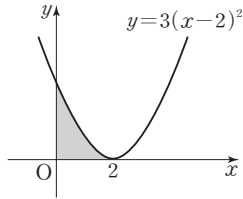
답 10

Level 1 기초 연습

본문 98~99쪽

- 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4 ② 5 ③
6 ② 7 ④ 8 ② 9 ④

1 곡선 $y=3(x-2)^2$ 은 그림과 같다.

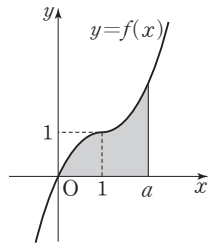


닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 $3(x-2)^2 \geq 0$ 이므로 곡선 $y=3(x-2)^2$ 과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\begin{aligned}\int_0^2 3(x-2)^2 dx &= \int_0^2 (3x^2 - 12x + 12) dx \\ &= \left[x^3 - 6x^2 + 12x \right]_0^2 \\ &= 8 - 24 + 24 = 8\end{aligned}$$

답 ③

2 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



닫힌구간 $[0, a]$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 과 x 축 및 직선 $x=a$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는

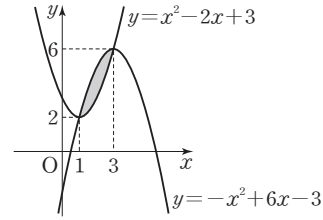
$$\begin{aligned}\int_0^1 (-x^2 + 2x) dx + \int_1^a (x^2 - 2x + 2) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x \right]_1^a \\ &= \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) + \left\{ \left(\frac{1}{3}a^3 - a^2 + 2a \right) - \left(\frac{1}{3} - 1 + 2 \right) \right\} \\ &= \frac{1}{3}a^3 - a^2 + 2a - \frac{2}{3}\end{aligned}$$

따라서 $\frac{1}{3}a^3 - a^2 + 2a - \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$ 에서

$$\begin{aligned}a^3 - 3a^2 + 6a - 18 &= 0, (a-3)(a^2+6) = 0 \\ a > 1 \text{이므로 } a &= 3\end{aligned}$$

답 ④

3 두 곡선 $y=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$,
 $y=-x^2+6x-3=-(x-3)^2+6$ 은 그림과 같다.



두 곡선 $y=x^2-2x+3$, $y=-x^2+6x-3$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

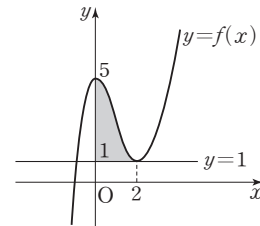
$$\begin{aligned}x^2 - 2x + 3 &= -x^2 + 6x - 3 \text{에서} \\ 2x^2 - 8x + 6 &= 0, x^2 - 4x + 3 = 0, (x-1)(x-3) = 0 \\ x &= 1 \text{ 또는 } x = 3\end{aligned}$$

닫힌구간 $[1, 3]$ 에서 $-x^2+6x-3 \geq x^2-2x+3$ 이므로
두 곡선 $y=x^2-2x+3$, $y=-x^2+6x-3$ 으로 둘러싸인
부분의 넓이는

$$\begin{aligned}\int_1^3 \{(-x^2+6x-3) - (x^2-2x+3)\} dx \\ &= \int_1^3 (-2x^2+8x-6) dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 6x \right]_1^3 \\ &= (-18+36-18) - \left(-\frac{2}{3} + 4 - 6 \right) = \frac{8}{3}\end{aligned}$$

답 ⑤

4 $f(x)=x^3-3x^2+5$ 에서
 $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$
 $f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극소이고, 극솟값은
 $f(2)=8-12+5=1$
따라서 $a=2$, $m=1$ 이다.



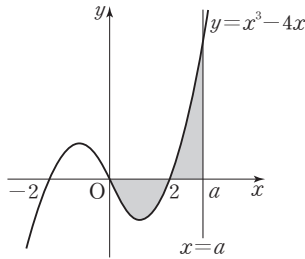
닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 $x^3-3x^2+5 \geq 1$ 이므로 이 구간에서
곡선 $y=x^3-3x^2+5$ 와 직선 $y=1$ 및 y 축으로 둘러싸인
부분의 넓이는



$$\begin{aligned}\int_0^2 \{(x^3 - 3x^2 + 5) - 1\} dx &= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x \right]_0^2 \\ &= 4 - 8 + 8 \\ &= 4\end{aligned}$$

답 ②

- 5 곡선 $y = x^3 - 4x = x(x+2)(x-2)$ 는 그림과 같다.



단한구간 $[0, 2]$ 에서 $x^3 - 4x \leq 0$, 단한구간 $[2, a]$ 에서 $x^3 - 4x \geq 0$ 이고, 단한구간 $[0, a]$ 에서 곡선과 x 축 및 직선 $x = a$ 로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^a (x^3 - 4x) dx = 0 \text{이다.}$$

$$\int_0^a (x^3 - 4x) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 \right]_0^a = \frac{1}{4}a^4 - 2a^2$$

$$\text{이므로 } \frac{1}{4}a^4 - 2a^2 = 0 \text{에서}$$

$$a^4 - 8a^2 = 0$$

$$a^2(a + 2\sqrt{2})(a - 2\sqrt{2}) = 0$$

$$a > 2 \text{이므로 } a = 2\sqrt{2}$$

답 ③

- 6 두 곡선 $y = ax^2$, $y = -x^2 + 4$ 의 교점의 x 좌표를 각각 k , $-k$ ($k > 0$)이라 하자.

두 곡선 $y = ax^2$, $y = -x^2 + 4$ 는 각각 y 축에 대하여 대칭이므로 단한구간 $[0, k]$ 에서 두 곡선 $y = ax^2$, $y = -x^2 + 4$ 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}A$ 이다.

$$\text{이때 } A = 2B \text{에서 } \frac{1}{2}A = B$$

$$\text{단한구간 } [0, k] \text{에서 } -x^2 + 4 \geq ax^2,$$

$$\text{단한구간 } [k, 2] \text{에서 } ax^2 \geq -x^2 + 4 \text{이므로}$$

$$\int_0^2 \{ax^2 - (-x^2 + 4)\} dx = 0 \text{이다.}$$

$$\begin{aligned}\int_0^2 \{(a+1)x^2 - 4\} dx &= \left[\frac{a+1}{3}x^3 - 4x \right]_0^2 \\ &= \frac{8a+8}{3} - 8 = \frac{8a-16}{3}\end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \frac{8a-16}{3} = 0 \text{에서}$$

$$a = 2$$

답 ②

- 7 $f(-1) = -1$, $f(2) = 2$ 이므로

$$g(-1) = -1, g(2) = 2$$

두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 단한구간 $[-1, 2]$ 에서

$$f(x) \leq x \leq g(x)$$

따라서 단한구간 $[-1, 2]$ 에서 두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 \{g(x) - f(x)\} dx &= 2 \int_{-1}^2 \{x - f(x)\} dx \\ &= 2 \left\{ \int_{-1}^2 x dx - \int_{-1}^2 f(x) dx \right\} \\ &= 2 \left\{ \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^2 - \left(-\frac{5}{6} \right) \right\} \\ &= 2 \times \left\{ \left(2 - \frac{1}{2} \right) + \frac{5}{6} \right\} \\ &= \frac{14}{3}\end{aligned}$$

답 ④

- 8 시간 $t=0$ 에서 $t=2$ 까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^2 v(t) dt$$

시간 $t=0$ 에서 $t=4$ 까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^4 v(t) dt$$

$$\int_0^2 v(t) dt = \int_0^4 v(t) dt \text{에서}$$

$$\int_0^2 v(t) dt = \int_0^2 v(t) dt + \int_2^4 v(t) dt$$

$$\text{즉, } \int_2^4 v(t) dt = 0 \text{이다.}$$

$$\int_2^4 v(t) dt = \int_2^4 (t^3 + at - 32) dt$$

$$= \left[\frac{1}{4}t^4 + \frac{a}{2}t^2 - 32t \right]_2^4$$

$$= (64 + 8a - 128) - (4 + 2a - 64)$$

$$= 6a - 4$$

$$\text{이므로 } 6a - 4 = 0 \text{에서}$$

$$a = \frac{2}{3}$$

답 ②

9 시각 t 에서 두 점 P, Q가 만나면

$$\int_0^t f(t)dt = \int_0^t g(t)dt \text{이다.}$$

$$\int_0^t \{f(t) - g(t)\}dt$$

$$= \int_0^t \{(t^2 + at + 1) - (4t^2 - 4t + b)\}dt$$

$$= \int_0^t \{-3t^2 + (a+4)t + (1-b)\}dt$$

$$= \left[-t^3 + \frac{a+4}{2}t^2 + (1-b)t \right]_0^t$$

$$= -t^3 + \frac{a+4}{2}t^2 + (1-b)t$$

$$= 0$$

$$\text{이므로 } t \left\{ t^2 - \frac{a+4}{2}t + (b-1) \right\} = 0$$

시각 $t=2, t=4$ 에서 각각 두 점 P, Q가 만나므로

$$\text{이차방정식 } t^2 - \frac{a+4}{2}t + (b-1) = 0 \text{의 서로 다른 두 실근이}$$

$$t=2 \text{ 또는 } t=4 \text{이다.}$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$2+4 = \frac{a+4}{2}, 2 \times 4 = b-1$$

$$\text{따라서 } a=8, b=9 \text{이므로}$$

$$a+b=17$$

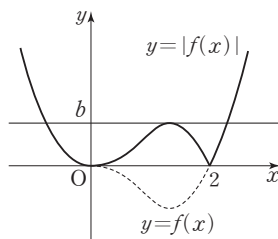
답 ④

Level 2 기본 연습

본문 100~101쪽

- 1 ③ 2 ③ 3 ④ 4 ④ 5 ②
6 ③ 7 ② 8 ⑤

1 함수 $f(x) = ax^3(x-2)$ 에 대하여 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프는 그림과 같다.



조건 (가)에서 직선 $y=b$ 가 곡선 $y = |f(x)|$ 에 접하므로

함수 $f(x)$ 의 극솟값이 $-b$ 이다.

$$f'(x) = 4ax^3 - 6ax^2 = 2ax^2(2x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=\frac{3}{2}$$

함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{3}{2}$ 에서 극소이고, 극솟값은

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = a \times \frac{27}{8} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{27}{16}a$$

$$\text{이므로 } -\frac{27}{16}a = -b \text{에서}$$

$$b = \frac{27}{16}a \quad \dots\dots \text{㉠}$$

조건 (나)에서 곡선 $y = |f(x)|$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분

의 넓이가 $\frac{64}{45}$ 이므로

$$\int_0^2 |f(x)|dx = \frac{64}{45}$$

이때 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 $f(x) \leq 0$ 이므로

$$\int_0^2 f(x)dx = -\frac{64}{45} \text{이다.}$$

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (ax^4 - 2ax^3)dx$$

$$= \left[\frac{a}{5}x^5 - \frac{a}{2}x^4 \right]_0^2$$

$$= \frac{32}{5}a - 8a = -\frac{8}{5}a$$

$$\text{이므로 } -\frac{8}{5}a = -\frac{64}{45} \text{에서 } a = \frac{8}{9}$$

$$\text{㉠에 대입하면 } b = \frac{27}{16} \times \frac{8}{9} = \frac{3}{2}$$

$$\text{따라서 } ab = \frac{8}{9} \times \frac{3}{2} = \frac{4}{3}$$

답 ③

2 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 4만큼 평행이동시킨 그래프를 나타내는 함수는

$$y=f(x)+4$$

이고, 이 함수의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동시킨 그래프를 나타내는 함수는

$$y=-f(x)-4$$

$$\text{이므로 } g(x) = -f(x) - 4 \text{이다.}$$

두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$ 가 서로 만나지 않으므로 닫힌구간 $[2, 4]$ 에서 $f(x) > g(x)$ 이다.

따라서 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$ 및 두 직선 $x=2,$

$x=4$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는



$$\begin{aligned}
 \int_2^4 \{f(x) - g(x)\} dx &= \int_2^4 \{f(x) + f(x) + 4\} dx \\
 &= 2 \int_2^4 f(x) dx + \int_2^4 4 dx \\
 &= 2 \int_2^4 f(x) dx + [4x]_2^4 \\
 &= 2 \int_2^4 f(x) dx + 8
 \end{aligned}$$

이므로 $2 \int_2^4 f(x) dx + 8 = 6$ 에서 $\int_2^4 f(x) dx = -1$

$$\begin{aligned}
 \int_2^4 f(x) dx &= \int_2^4 a(x^2 - 6x + 8) dx \\
 &= a \left[\frac{1}{3} x^3 - 3x^2 + 8x \right]_2^4 \\
 &= a \left\{ \left(\frac{64}{3} - 48 + 32 \right) - \left(\frac{8}{3} - 12 + 16 \right) \right\} \\
 &= -\frac{4}{3} a
 \end{aligned}$$

이므로 $-\frac{4}{3} a = -1$ 에서 $a = \frac{3}{4}$

답 ③

3 $f(x) = -x^3 + 3x^2$ 에서

$$f'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극대이고, 극댓값은

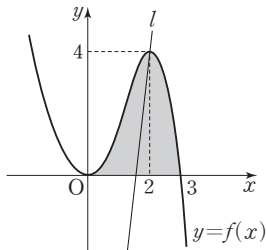
$$f(2) = -8 + 12 = 4$$

점 $(2, 4)$ 를 지나고 기울기가 m 인 직선 l 의 방정식은

$$y - 4 = m(x - 2), \text{ 즉 } y = mx - 2m + 4$$

직선 l 의 x 절편은

$$mx - 2m + 4 = 0 \text{에서 } x = 2 - \frac{4}{m}$$



곡선 $y=f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 (-x^3 + 3x^2) dx &= \left[-\frac{1}{4} x^4 + x^3 \right]_0^2 \\
 &= -\frac{81}{4} + 27 = \frac{27}{4}
 \end{aligned}$$

이므로 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 직선 l 로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{27}{4} = \frac{27}{8}$$

이다. 즉,

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 (-x^3 + 3x^2) dx - \frac{1}{2} \times \left\{ 2 - \left(2 - \frac{4}{m} \right) \right\} \times 4 \\
 = \left[-\frac{1}{4} x^4 + x^3 \right]_0^2 - \frac{1}{2} \times \frac{4}{m} \times 4 \\
 = 4 - \frac{8}{m} = \frac{27}{8}
 \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \frac{8}{m} = 4 - \frac{27}{8} = \frac{5}{8} \text{에서}$$

$$m = \frac{64}{5}$$

답 ④

$$\begin{aligned}
 4 \quad f'(x) &= 6(x-1)(x-a) \\
 &= 6x^2 - 6(a+1)x + 6a
 \end{aligned}$$

에서

$$f(x) = 2x^3 - 3(a+1)x^2 + 6ax + C \quad (C \text{는 적분상수})$$

$$f(0) = 0 \text{에서 } C = 0 \text{이므로}$$

$$f(x) = 2x^3 - 3(a+1)x^2 + 6ax$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=1 \text{ 또는 } x=a$$

함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극소이고 극솟값이 0이므로

$$f(a) = 2a^3 - 3a^3 - 3a^2 + 6a^2 = -a^3 + 3a^2 = 0$$

$$-a^2(a-3) = 0$$

$$a > 1 \text{이므로 } a = 3$$

$$\text{즉, } f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x \text{이다.}$$

곡선 $y=f'(x)$ 와 x 축 및 직선 $x=b$ 로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_1^b f'(x) dx = 0 \text{에서 } f(b) - f(1) = 0$$

$$\text{즉, } f(b) = f(1) = 2 - 12 + 18 = 8$$

$$2b^3 - 12b^2 + 18b = 8 \text{에서}$$

$$b^3 - 6b^2 + 9b - 4 = 0$$

$$(b-1)^2(b-4) = 0$$

$$b > 1 \text{이므로 } b = 4$$

$$\text{따라서 } a+b = 3+4 = 7$$

답 ④

5 곡선 $y=x^2-5x-6$ 과 직선 $y=x+2$ 의 교점의 x 좌표는

이차방정식 $x^2-5x-6=x+2$ 의 서로 다른 두 실근이다.

이차방정식 $x^2-6x-8=0$ 의 서로 다른 두 실근을 α, β

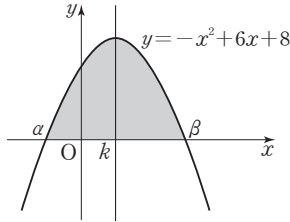
($\alpha < \beta$)라 하면 닫힌구간 $[\alpha, \beta]$ 에서 $x+2 \geq x^2-5x-6$

이므로 곡선 $y=x^2-5x-6$ 과 직선 $y=x+2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_a^\beta \{(x+2)-(x^2-5x-6)\}dx$$

$$= \int_a^\beta (-x^2+6x+8)dx$$

이고, 이는 닫힌구간 $[a, \beta]$ 에서 곡선 $y=-x^2+6x+8$ 과 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.



곡선 $y=x^2-5x-6$ 과 직선 $y=x+2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $x=k$ 가 이등분하므로

$$\int_a^k (-x^2+6x+8)dx = \int_k^\beta (-x^2+6x+8)dx$$

즉, 닫힌구간 $[a, k]$ 에서 곡선 $y=-x^2+6x+8$ 과 x 축 및 직선 $x=k$ 로 둘러싸인 부분의 넓이와 닫힌구간 $[k, \beta]$ 에서 곡선 $y=-x^2+6x+8$ 과 x 축 및 직선 $x=k$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 같다.

즉, 직선 $x=k$ 는 곡선 $y=-x^2+6x+8$ 의 대칭축이므로 $k=3$ 이다.

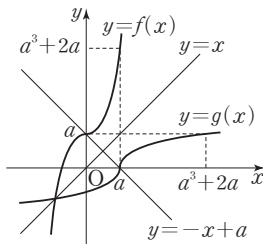
따라서 닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 곡선 $y=x^2-5x-6$, 직선 $y=x+2$, y 축 및 직선 $x=3$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^3 (-x^2+6x+8)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 8x \right]_0^3$$

$$= -9 + 27 + 24 = 42$$

답 ②

- 6 $f(0)=a$, $f(a)=a^3+2a$ 에서
 $g(a)=0$, $g(a^3+2a)=a$ 이다.



$\int_a^{a^3+2a} g(x)dx$ 는 곡선 $y=g(x)$ 와 x 축 및 직선 $x=a^3+2a$ 로 둘러싸인 부분의 넓이이고, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로

$\int_a^{a^3+2a} g(x)dx$ 는 곡선 $y=f(x)$ 와 y 축 및 직선 $y=a^3+2a$ 로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

따라서

$$\int_0^a f(x)dx + \int_a^{a^3+2a} g(x)dx = a(a^3+2a)$$

이므로 $a(a^3+2a)=3$ 에서

$$a^4+2a^2-3=0$$

$$(a^2+3)(a+1)(a-1)=0$$

$a>0$ 이므로 $a=1$

곡선 $y=x^3+x+1$ 과 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표를 구하면 $x^3+x+1=x$ 에서

$$x^3+1=0, (x+1)(x^2-x+1)=0$$

$$x=-1$$

따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 와 직선 $y=-x+1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$2 \int_{-1}^0 \{(x^3+x+1)-x\}dx + \frac{1}{2} \times 1 \times 1$$

$$= 2 \int_{-1}^0 (x^3+1)dx + \frac{1}{2}$$

$$= 2 \left[\frac{1}{4}x^4 + x \right]_{-1}^0 + \frac{1}{2}$$

$$= 2 \times \left\{ -\left(\frac{1}{4} - 1 \right) \right\} + \frac{1}{2} = 2$$

답 ③

- 7 시각 t 에서의 점 P의 위치는

$$\int_0^t (at-3)dt = \left[\frac{a}{2}t^2 - 3t \right]_0^t = \frac{a}{2}t^2 - 3t$$

이므로

$$t=1\text{일 때, } x_1 = \frac{1}{2}a - 3$$

$$t=3\text{일 때, } x_2 = \frac{9}{2}a - 9$$

$$t=6\text{일 때, } x_3 = 18a - 18$$

세 수 x_1, x_2, x_3 은 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2x_2 = x_1 + x_3$$

$$2\left(\frac{9}{2}a - 9\right) = \left(\frac{1}{2}a - 3\right) + (18a - 18)$$

$$9a - 18 = \frac{37}{2}a - 21, \frac{19}{2}a = 3$$

$$\text{따라서 } a = \frac{6}{19}$$

답 ②



- 8 두 점 P, Q의 시각 t 에서의 위치를 각각 $x_P(t)$, $x_Q(t)$ 라 하면

$$x_P(t) = \int_0^t (6-2t)dt = \left[6t - t^2 \right]_0^t \\ = -t^2 + 6t$$

$$x_Q(t) = 15 + \int_0^t (4t-12)dt = 15 + \left[2t^2 - 12t \right]_0^t \\ = 2t^2 - 12t + 15$$

두 점 P, Q가 만날 때, $x_P(t) = x_Q(t)$ 이므로

$$-t^2 + 6t = 2t^2 - 12t + 15$$

$$3t^2 - 18t + 15 = 0$$

$$t^2 - 6t + 5 = 0, (t-1)(t-5) = 0$$

$$t=1 \text{ 또는 } t=5$$

따라서 두 점 P, Q는 시각 $t=1$ 과 $t=5$ 에서 서로 만난다.

$f(t) = 6-2t=0$ 에서 $t=3$ 이므로 점 P는 시각 $t=3$ 에서 운동 방향을 바꾼다.

$x_P(1) = x_P(5) = 5$ 이므로 시각 $t=1$ 에서 $t=5$ 까지 점 P가 움직인 거리 s_1 은

$$s_1 = \int_1^5 |6-2t|dt \\ = 2 \int_1^3 (6-2t)dt \\ = 2 \left[6t - t^2 \right]_1^3 = 2 \times \{(18-9) - (6-1)\} = 8$$

마찬가지로 $g(t) = 4t-12=0$ 에서 $t=3$ 이므로 점 Q는 시각 $t=3$ 에서 운동 방향을 바꾼다.

$x_Q(1) = x_Q(5) = 5$ 이므로 시각 $t=1$ 에서 $t=5$ 까지 점 Q가 움직인 거리 s_2 는

$$s_2 = \int_1^5 |4t-12|dt \\ = 2 \int_1^3 (12-4t)dt \\ = 2 \left[12t - 2t^2 \right]_1^3 = 2 \times \{(36-18) - (12-2)\} = 16$$

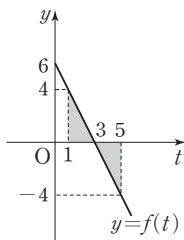
따라서 $s_1 + s_2 = 8 + 16 = 24$

답 ⑤

참고

$f(t) = 6-2t$ 이므로 시각 $t=1$ 에서 $t=5$ 까지 점 P가 움직인 거리는 그림에서 색칠한 부분의 넓이와 같다.

$$\text{즉, } 2 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 8$$



Level 3 실력 완성

분문 102쪽

1 ② 2 ③ 3 ③

- 1 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 $f(x) \leq 0$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$P = \int_0^2 (-x^3 + 2x^2)dx \\ = \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 \right]_0^2 \\ = -4 + \frac{16}{3} \\ = \frac{4}{3}$$

점 (a, a^3-2a^2) 과 원점을 지나는 직선 l 의 방정식은

$$y = \frac{a^3-2a^2}{a}x, \text{ 즉 } y = (a^2-2a)x$$

이고, 닫힌구간 $[0, a]$ 에서 $(a^2-2a)x \geq x^3-2x^2$ 이므로

닫힌구간 $[0, a]$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 l 로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$Q = \int_0^a \{(a^2-2a)x - (x^3-2x^2)\}dx \\ = \int_0^a \{-x^3 + 2x^2 + (a^2-2a)x\}dx \\ = \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{a^2-2a}{2}x^2 \right]_0^a \\ = -\frac{1}{4}a^4 + \frac{2}{3}a^3 + \frac{a^4-2a^3}{2} \\ = \frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{3}a^3$$

따라서 $P:Q=1:b$ 에서

$$\frac{4}{3} : \left(\frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{3}a^3 \right) = 1 : b$$

$$\frac{4}{3}b = \frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{3}a^3$$

$$b = \frac{3}{16}a^4 - \frac{1}{4}a^3$$

이때

$$\int_2^a f(x)dx = \int_2^a (x^3-2x^2)dx \\ = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 \right]_2^a \\ = \left(\frac{1}{4}a^4 - \frac{2}{3}a^3 \right) - \left(4 - \frac{16}{3} \right) \\ = \frac{1}{4}a^4 - \frac{2}{3}a^3 + \frac{4}{3}$$

이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{b} \int_2^a f(x) dx &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{4}a^4 - \frac{2}{3}a^3 + \frac{4}{3}}{\frac{3}{16}a^4 - \frac{1}{4}a^3} \\
 &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{4} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{a} + \frac{4}{3} \times \frac{1}{a^4}}{\frac{3}{16} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{a}} \\
 &= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{16}} = \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

답 ②

- 2** 조건 (가)에서 삼차방정식 $f(x) - g(x) = 0$ 의 서로 다른 세 실근이 $x=0, x=3, x=8$ 이므로
 $f(x) - g(x) = ax(x-3)(x-8)$ ($a > 0$, a 는 상수)
 로 놓을 수 있다.
 $0 \leq x \leq 3$ 에서 $f(x) \geq g(x)$ 이므로

조건 (나)에서 $\int_0^3 \{f(x) - g(x)\} dx = 13$ 이다.

$$\begin{aligned}
 \int_0^3 \{f(x) - g(x)\} dx &= \int_0^3 ax(x-3)(x-8) dx \\
 &= a \int_0^3 (x^3 - 11x^2 + 24x) dx \\
 &= a \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{11}{3}x^3 + 12x^2 \right]_0^3 \\
 &= a \left(\frac{81}{4} - 99 + 108 \right) \\
 &= \frac{117}{4}a
 \end{aligned}$$

이므로 $\frac{117}{4}a = 13$ 에서

$$a = \frac{4}{9}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) - g(x) &= \frac{4}{9}x(x-3)(x-8) \\
 &= \frac{4}{9}x^3 - \frac{44}{9}x^2 + \frac{32}{3}x \quad \dots\dots \textcircled{7}
 \end{aligned}$$

$f(x)$ 는 삼차함수, $g(x)$ 는 일차함수이고,
 $f(0) = g(0) = 12$ 이므로 $\textcircled{7}$ 에서

$$f(x) = \frac{4}{9}x^3 - \frac{44}{9}x^2 + \left(\frac{32}{3} + b\right)x + 12,$$

$$g(x) = bx + 12 \quad (b \neq 0, b \text{는 상수})$$

로 놓을 수 있다.

$0 \leq x \leq 3$ 에서 $f(x) \geq g(x) \geq 0$ 이므로

$g(x) \geq 0 \geq -f(x)$ 이고, 조건 (다)에서

$$\int_0^3 [g(x) - \{-f(x)\}] dx = 94$$

즉, $\int_0^3 \{f(x) + g(x)\} dx = 94$ 이다.

$$\begin{aligned}
 &\int_0^3 \{f(x) + g(x)\} dx \\
 &= \int_0^3 \left[\left\{ \frac{4}{9}x^3 - \frac{44}{9}x^2 + \left(\frac{32}{3} + b\right)x + 12 \right\} + (bx + 12) \right] dx \\
 &= \int_0^3 \left\{ \frac{4}{9}x^3 - \frac{44}{9}x^2 + \left(\frac{32}{3} + 2b\right)x + 24 \right\} dx \\
 &= \left[\frac{1}{9}x^4 - \frac{44}{27}x^3 + \left(\frac{16}{3} + b\right)x^2 + 24x \right]_0^3 \\
 &= 9 - 44 + 48 + 9b + 72 \\
 &= 9b + 85
 \end{aligned}$$

이므로 $9b + 85 = 94$ 에서

$$b = 1$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{4}{9}x^3 - \frac{44}{9}x^2 + \frac{35}{3}x + 12,$$

$$g(x) = x + 12 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
 f(1) + g(1) &= \left(\frac{4}{9} - \frac{44}{9} + \frac{35}{3} + 12 \right) + 13 \\
 &= \frac{290}{9}
 \end{aligned}$$

답 ③

다른 풀이

$g(x) = bx + 12$ ($b \neq 0$, b 는 상수)에서 b 의 값은 다음과 같이 구할 수 있다.

조건 (나)에서 닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 곡선 $y = -f(x)$ 와 직선 $y = -g(x)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는 13이므로 조건 (다)에서 닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 두 직선 $y = g(x)$,

$y = -g(x)$ 및 두 직선 $x = 0, x = 3$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$94 - 13 = 81$$

따라서 네 점 $(0, 0), (3, 0), (3, g(3)), (0, 12)$ 를 꼭짓점으로 하는 사다리꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \{12 + g(3)\} \times 3 = \frac{81}{2}$$

$$12 + g(3) = 27$$

$$g(3) = 15$$

따라서 $g(3) = 3b + 12 = 15$ 에서 $b = 1$ 이다.

- 3** $0 \leq t \leq 4$ 에서 $v(t) = -t^2 + 4t \geq 0$,

$t > 4$ 에서 $v(t) = -t^2 + 4t < 0$ 이므로

함수 $f(a)$ 는 다음과 같이 a 의 값의 범위에 따라 구할 수 있다.

(i) $0 \leq a \leq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}
 f(a) &= \int_a^{a+2} |-t^2 + 4t| dt \\
 &= \int_a^{a+2} (-t^2 + 4t) dt \\
 &= \left[-\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 \right]_a^{a+2} \\
 &= \left\{ -\frac{1}{3}(a+2)^3 + 2(a+2)^2 \right\} - \left(-\frac{1}{3}a^3 + 2a^2 \right) \\
 &= -2a^2 + 4a + \frac{16}{3}
 \end{aligned}$$

(ii) $2 < a < 4$ 일 때,

$$\begin{aligned}
 f(a) &= \int_a^{a+2} |-t^2 + 4t| dt \\
 &= \int_a^4 (-t^2 + 4t) dt + \int_4^{a+2} (t^2 - 4t) dt \\
 &= \left[-\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 \right]_a^4 + \left[\frac{1}{3}t^3 - 2t^2 \right]_4^{a+2} \\
 &= \left(-\frac{64}{3} + 32 \right) - \left(-\frac{1}{3}a^3 + 2a^2 \right) \\
 &\quad + \left\{ \frac{1}{3}(a+2)^3 - 2(a+2)^2 \right\} - \left(\frac{64}{3} - 32 \right) \\
 &= \frac{2}{3}a^3 - 2a^2 - 4a + 16
 \end{aligned}$$

(iii) $a \geq 4$ 일 때,

$$\begin{aligned}
 f(a) &= \int_a^{a+2} |-t^2 + 4t| dt \\
 &= \int_a^{a+2} (t^2 - 4t) dt \\
 &= \left[\frac{1}{3}t^3 - 2t^2 \right]_a^{a+2} \\
 &= \left\{ \frac{1}{3}(a+2)^3 - 2(a+2)^2 \right\} - \left(\frac{1}{3}a^3 - 2a^2 \right) \\
 &= 2a^2 - 4a - \frac{16}{3}
 \end{aligned}$$

ㄱ. $0 \leq a \leq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}
 f(a) &= -2a^2 + 4a + \frac{16}{3} \text{ 이므로} \\
 f(1) &= -2 + 4 + \frac{16}{3} = \frac{22}{3} \text{ (참)}
 \end{aligned}$$

ㄴ. $a \geq 4$ 일 때,

$$\begin{aligned}
 f(a) &= 2a^2 - 4a - \frac{16}{3} \text{ 이므로} \\
 \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{f(a)}{a^2} &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2a^2 - 4a - \frac{16}{3}}{a^2} \\
 &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{4}{a} - \frac{16}{3a^2} \right) \\
 &= 2 \text{ (참)}
 \end{aligned}$$

ㄷ. $0 \leq a \leq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}
 f(a) &= -2a^2 + 4a + \frac{16}{3} = -2(a-1)^2 + \frac{22}{3} \\
 \text{이므로 함수 } f(a) \text{의 최솟값은 } f(0) &= f(2) = \frac{16}{3}
 \end{aligned}$$

이다.

 $2 < a < 4$ 일 때,

$$f(a) = \frac{2}{3}a^3 - 2a^2 - 4a + 16$$

이므로

$$f'(a) = 2a^2 - 4a - 4 = 2(a^2 - 2a - 2)$$

$$f'(a) = 0 \text{에서 } 2 < a < 4 \text{이므로}$$

$$a = 1 + \sqrt{3}$$

따라서 함수 $f(a)$ 는 $a = 1 + \sqrt{3}$ 에서 극소이고 동시에최소이므로 함수 $f(a)$ 의 최솟값은 $f(1 + \sqrt{3})$ 이고,

$$f(1 + \sqrt{3}) < f(2) \text{이다.}$$

 $a \geq 4$ 일 때,

$$f(a) = 2a^2 - 4a - \frac{16}{3} = 2(a-1)^2 - \frac{22}{3}$$

이므로 함수 $f(a)$ 의 최솟값은 $f(4) = \frac{32}{3}$ 이다.

$$\text{이때 } f(1 + \sqrt{3}) < f(2) < f(4) \text{이므로}$$

함수 $f(a)$ 는 $a = 1 + \sqrt{3}$ 에서 최솟값을 갖는다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

QR코드 앱을 사용해 추가 정보를 확인하세요.



수능연계교재의 VOCA 1800 / 국어 어휘

연계교재의 어휘 학습을 각 한 권으로!
수능특강, 수능완성의 중요 · 핵심 어휘 수록