Ⅰ_2. 항등식과 나머지정리

[10공수1-01-02] 항등식의 성질과 나머지정리를 이해하고,
이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

A : 항등식의 성질, 나머지정리와 인수정리, 조립제법을 설명할 수 있으며 이를 활용하여 다양한 문제를 해결할 수 있다.

B : 항등식의 성질, 나머지정리와 인수정리를 이해하고,
이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

C : 항등식의 성질, 나머지정리와 인수정리를 알고,
이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

D : 항등식의 성질과 나머지정리를 활용하여
간단한 문제를 해결할 수 있다.

E : 항등식의 성질과 나머지정리를 안다.

1 항등식 ❶

(1) 항등식 : 등식에 포함되어 있는 문자에 어떤 값을 대입해도
항상 성립하는 등식

✡ 다음 표현은 모두 x의 항등식을 나타낸다.

(x의 항등식) ≡ (모든 x에 대하여)

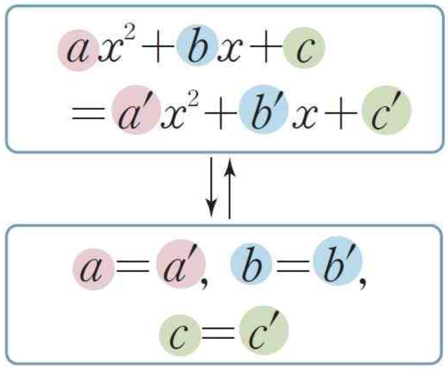
≡ (임의의 x에 대하여) ≡ (x의 값에 관계없이)

≡ (어떠한 x에 대해서도)

≡ (x가 어떤 값을 갖더라도)

1 항등식 ❷

x에 대한 항등식



(2) x에 대한 항등식

① $ax+b=0 \Leftrightarrow a=0,\ b=0$

② $ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow a=b=c=0$

③ $ax+b=a'x+b' \Leftrightarrow a=a',\ b=b'$

④ $ax^2+bx+c=a'x+b'x+c'$

$\Leftrightarrow a=a',\ b=b',\ c=c'$

(3) $x,\ y$에 대한 항등식

$ax+by+c=0 \Leftrightarrow a=b=c=0$

(4) $x,\ y,\ z$에 대한 항등식

$ax+by+cz+d=0 \Leftrightarrow a=b=c=d=0$

2 미정계수법

항등식의 성질을 이용하여 미지의 계수를 정하는 방법

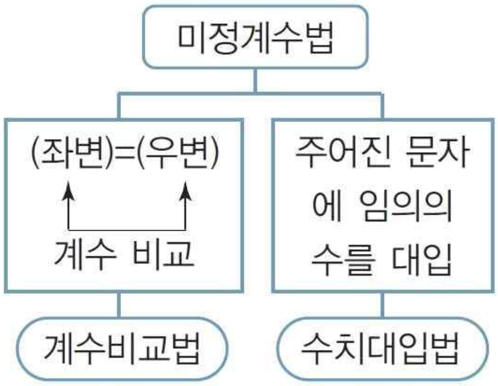
(1) 계수비교법 : 양변에 있는 동류항의 계수를 비교하여 계수를 정하는 방법

(2) 수치대입법 : 양변의 문자에 적당한 수를 대입하여 계수를 정하는 방법

① 괄호 안의 다항식을 0이 되게 하는 x의 값

② 계산이 간단한 수

$-1,\ 0,\ 1$등을 대입



✡ 계수비교법은 다항식의 전개가 간단할 때, 수치대입법은 어떤 수를 대입하여 0이 되는 항이 있는 경우에 사용한다.

3 나머지정리

(1) 다항식 $f(x)$를 $(x-\alpha)$로 나눈 나머지는 $f(\alpha)$이다.

$$f(x)=(x-\alpha)Q(x)+R \Rightarrow R=f(\alpha)$$

(2) 다항식 $f(x)$를 $(ax+b)$로 나눈 나머지는 $f\left(-\frac{b}{a}\right)$이다.

$$f(x)=(ax+b)Q(x)+R \Rightarrow R=f\left(-\frac{b}{a}\right)$$

(3) 나머지의 차수는 항상 나누는 식의 차수보다 작다.

(나누는 식의 차수) $>$ (나머지의 차수)

나누는 식 $g(x)$		나머지 $R(x)$
일차식	$\Rightarrow$	c (상수)
이차식		$ax+b$ (일차 이하의 식)
삼차식		ax^2+bx+c (이차 이하의 식)

4 조립제법

✡ 조립제법 : 다항식 $f(x)$를 일차식 $(x-\alpha)$로 나눌 때,
계수만을 사용하여 몫과 나머지를 구하는 방법

예 $(2x^3-9x^2+7x+7)\div(x-3)$

$$\begin{array}{rll}
2x^2-3x-2 & \longleftarrow & \text{몫} \\
x-3\,\overline{)\,2x^3-9x^2+7x+7} & \longleftarrow\ 2 & \cdots\ x^2\text{의 계수} \\
2x^3-6x^2 & & \\
\hline
-3x^2+7x+7 & \longleftarrow\ -9+2\times3=-3 & \cdots\ x\text{의 계수} \\
-3x^2+9x & & \\
\hline
-2x+7 & \longleftarrow\ 7+(-3)\times3=-2 & \cdots\ \text{상수항} \\
-2x+6 & & \\
\hline
1 & \longleftarrow\ 7+(-2)\times3=1 & \cdots\ \text{나머지}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & (2x^3 & -9x^2 & +7x & +7)\div(x-3) \\
3 & 2 & -9 & 7 & 7 \\
 & & \times3\ \ 6 & \times3\ \ -9 & \times3\ \ -6 \\
\hline
 & 2 & -3 & -2 & \multicolumn{1}{|c}{1}
\end{array}$$

몫 : $2x^2-3x-2$　　나머지 : 1

☑ 조립제법은 다항식을 일차식으로 나누는 경우에만 이용한다.

☑ 조립제법에서는 계수 0도 반드시 표시해야 한다.

예 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하면

$(x^3 - 2x + 1) \div (x + 2)$ ⇨

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ & & -2 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & \boxed{-3} \end{array}$$

∴ 몫 : $x^2 - 2x + 2$

나머지 : -3

✡ 조립제법과 나머지정리

(1) 조립제법 : 어떤 다항식을 일차식으로 나눌 때,
그 다항식의 계수만을 이용하여 몫과 나머지를 구하는 방법

(2) 나머지정리는 나머지를 구할 때,
조립제법은 몫과 나머지를 구할 때 사용한다.

5 인수정리

다항식 $f(x)$에 대하여

(1) $f(\alpha) = 0 \;\Leftrightarrow\; f(x)$는 일차식 $(x - \alpha)$로 나누어떨어진다.

$\Leftrightarrow\; f(x)$는 $(x - \alpha)$를 인수로 갖는다.

$\Leftrightarrow\; f(x) = (x - \alpha)\,Q(x)$

(2) $f\left(-\dfrac{b}{a}\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; f(x)$는 $(ax + b)$로 나누어떨어진다.

(단, $a \neq 0$) $\;\Leftrightarrow\; f(x)$는 $(ax + b)$를 인수로 갖는다.

$\Leftrightarrow\; f(x) = (ax + b)\,Q(x)$

$= \left(x + \dfrac{b}{a}\right) \cdot a\,Q(x)$

✡ 인수를 찾는 방법

계수가 정수인 다항식 $f(x)$에서 $f(\alpha)=0$을 만족시키는 α의 값는 $\pm\dfrac{\{f(x)\text{의 상수항의 약수}\}}{\{f(x)\text{의 최고차항의 계수의 약수}\}}$ 중에서 찾는다.