Ⅱ_4. 이차방정식과 이차함수의 관계

[10공수1-02-04] 이차방정식과 이차함수를 연결하여 그 관계를 설명할 수 있다.

A, B : 이차방정식의 근과 이차함수의 그래프를 연결하고 그 관계를 이해하여 설명할 수 있다.

C, D : 판별식을 이용하여 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수를 구할 수 있다.

E : 주어진 이차함수의 그래프를 보고 이차방정식의 실근의 개수를 구할 수 있다.

Ⅱ_5. 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

[10공수1-02-05] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 판단할 수 있다.

A, B : 판별식을 이용하여 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 판단할 수 있다.

C, D : 판별식을 이용하여 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수를 구할 수 있다.

E : 안내된 절차에 따라 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수를 구할 수 있다.

Ⅱ_6. 이차함수의 최대, 최소

A : 이차함수의 최대, 최소를 탐구하고 이를 설명할 수 있으며, 이와 관련된 다양한 실생활 문제를 해결하여 그 유용성을 인식할 수 있다.

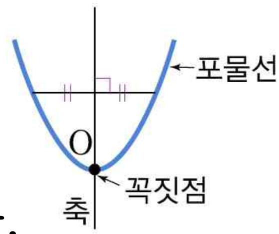
B : 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 실생활에서 사용되는 구체적인 상황을 찾는 활동과 연결하여 그 유용성을 인식할 수 있다.

C : 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하고, 이를 실생활에서 사용되는 간단한 상황을 찾는 활동과 연결하여 그 유용성에 대해 관심을 가진다.

D : 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하고, 그 유용성에 대해 관심을 가진다.

E : 안내된 절차에 따라 간단한 이차함수의 최댓값 또는 최솟값을 구할 수 있다.

1 이차함수의 그래프 ❶



이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프에서

(1) 이차항의 계수 a는 그래프의 모양을 결정한다.

① $a>0$이면 아래로 볼록, $a<0$이면 위로 볼록한 모양이다.

② a의 절댓값이 클수록 폭이 좁아진다.

(2) 일차항의 계수 b는 a와 함께 축의 위치를 결정한다.

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$ 에서

축의 방정식은 $x=-\dfrac{b}{2a}$이다. 즉, 축은 $ab>0$이면 y축의 왼쪽, $ab<0$이면 y축의 오른쪽에 위치한다.

(3) 상수항 c는 그래프와 y축과의 교점, 즉 y절편을 결정한다.

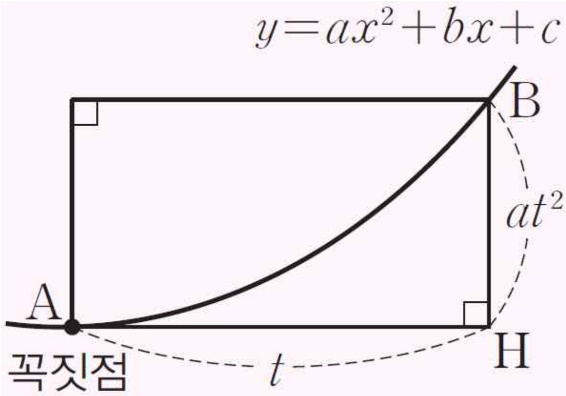
1 이차함수의 그래프 ❷

(4) 꼭짓점의 좌표

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \text{에서}$$

꼭짓점의 좌표는 $\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$이다.

✡ a의 절댓값과 비례관계



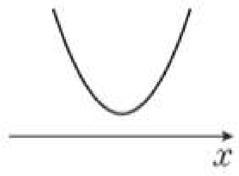
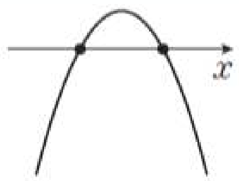
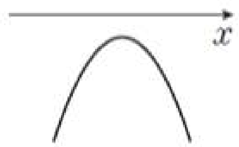
그림과 같이 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$의 그래프의 꼭짓점 A에서 t만큼 떨어진 부분에서 축에 평행한 직선이 함수의 그래프와 만나는 점을 B라 하면 $\overline{\mathrm{AH}} : \overline{\mathrm{BH}} = t : at^2$이 성립한다.

2 이차함수의 그래프와 x축과의 교점 ❶

이차함수 $y = ax^2 + bx + c$의 그래프가 x축과 만날 때, 이차함수의 그래프와 x축과의 교점 $(\alpha, 0)$에 대하여 $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$을 만족시킨다. 즉, 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$의 실근이 α이다.

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축과의 교점	이차방정식 $ax^2+bx+c=0$	판별식 $D=b^2-4ac$
서로 다른 두 점 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$	서로 다른 두 실근	$D>0$
접점 $(\alpha, 0)$	중근	$D=0$
만나지 않는다.	허근	$D<0$

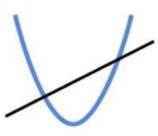
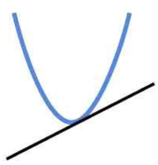
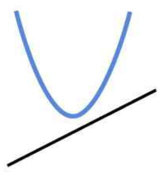
② 이차함수의 그래프와 x축과의 교점 ❷

$ax^2+bx+c=0$의 판별식 D		$D>0$	$D=0$	$D<0$
$ax^2+bx+c=0$의 근		서로 다른 두 실근	중근	서로 다른 두 허근
$y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 위치 관계		서로 다른 두 점에서 만난다.	한 점에서 만난다. (접한다.)	만나지 않는다.
$y=ax^2+bx+c$의 그래프	$a>0$			
	$a<0$			

③ 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

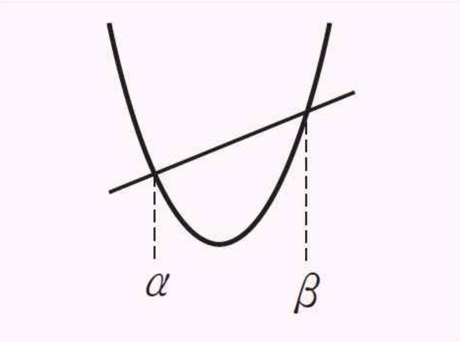
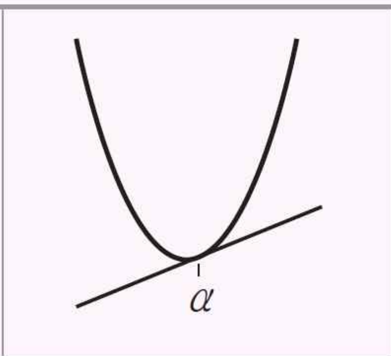
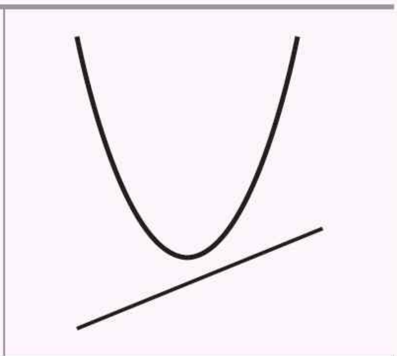
이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계는 이차방정식 $ax^2+(b-m)x+c-n=0$의 판별식 D의 부호에 따라 다음과 같다.

(1) $D>0 \Leftrightarrow$ 서로 다른 두 점에서 만난다. ┐ 두 도형이
(2) $D=0 \Leftrightarrow$ 한 점에서 만난다(접한다). ┘ 만난다.
(3) $D<0 \Leftrightarrow$ 만나지 않는다.

	$D>0$	$D=0$	$D<0$
이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계	서로 다른 두 점에서 만난다.	한 점에서 만난다. (접한다.)	만나지 않는다.
			

✡ 이차함수의 그래프와 직선의 교점

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계와 이차방정식 $ax^2+(b-m)x+c-n=0$의 해는 다음과 같다.

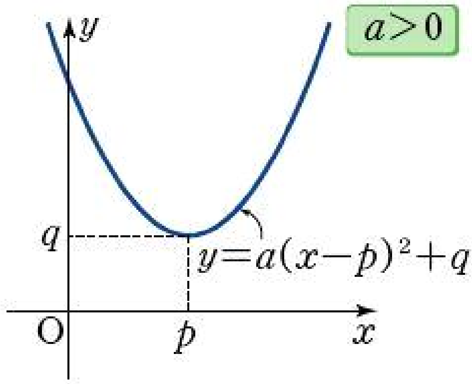
		
서로 다른 두 실근 $x=\alpha,\ x=\beta$	중근 $x=\alpha$	허근

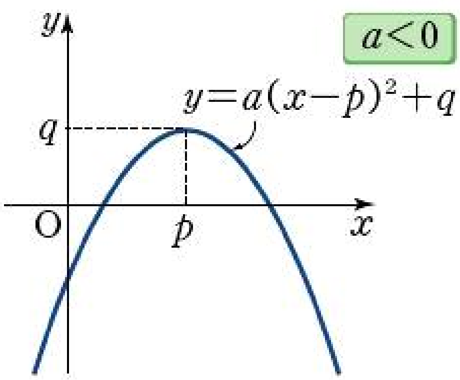
4 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 최대·최소

(1) $y=ax^2+bx+c$를 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 변형

① $a>0 \Rightarrow$ 대칭축 $x=p$에서 최솟값 q, 최댓값은 없다.

② $a<0 \Rightarrow$ 대칭축 $x=p$에서 최댓값 q, 최솟값은 없다.

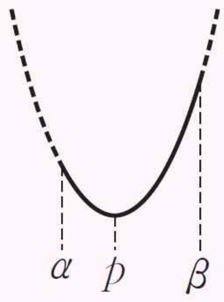
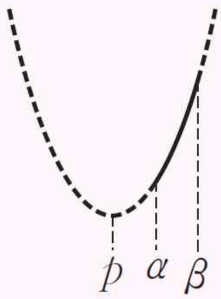
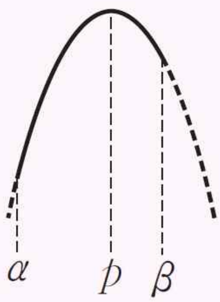
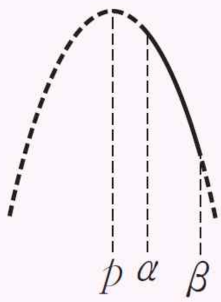




(2) x의 값의 범위가 주어진 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$는 축의 위치에 따라 최대, 최소가 결정된다.

✡ 정해진 범위에서 이차함수의 최대·최소

$\alpha \le x \le \beta$에서 이차함수 $f(x) = a(x-p)^2 + q$에 대하여 최대·최소는 다음과 같다.

$a>0$		최대: $f(\beta)$ 최소: $f(p)$		최대: $f(\beta)$ 최소: $f(\alpha)$
$a<0$		최대: $f(p)$ 최소: $f(\alpha)$		최대: $f(\alpha)$ 최소: $f(\beta)$

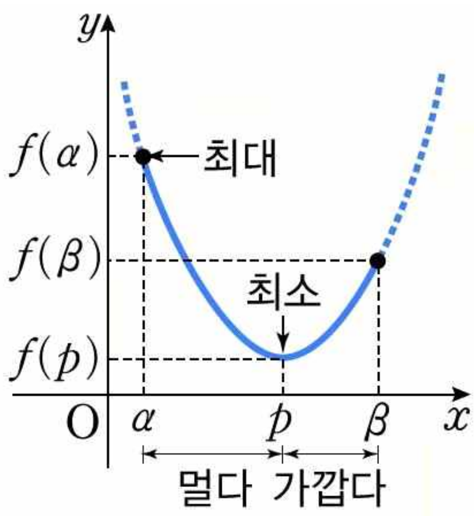
✡ $y = ax^2 + bx + c$ (단, $\alpha \le x \le \beta$)의 최대, 최소 ❶

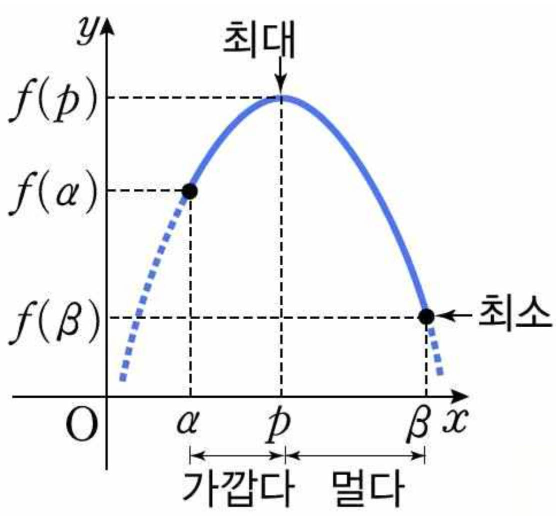
$y = ax^2 + bx + c$를 $y = a(x-p)^2 + q$ 꼴로 변형

(1) 대칭축 $x = p$가 범위에 포함된 경우

(1) $a > 0 \Rightarrow$ 축에서 최솟값, 최댓값은 축에서 먼 쪽

(2) $a < 0 \Rightarrow$ 축에서 최댓값, 최솟값은 축에서 먼 쪽





✡ $y = ax^2 + bx + c$ **(단, $\alpha \le x \le \beta$)의 최대, 최소 ❷**

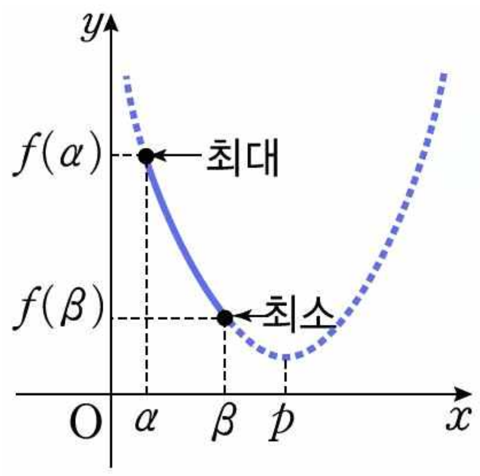
(2) 대칭축 $x = p$가 범위에 포함되지 않은 경우

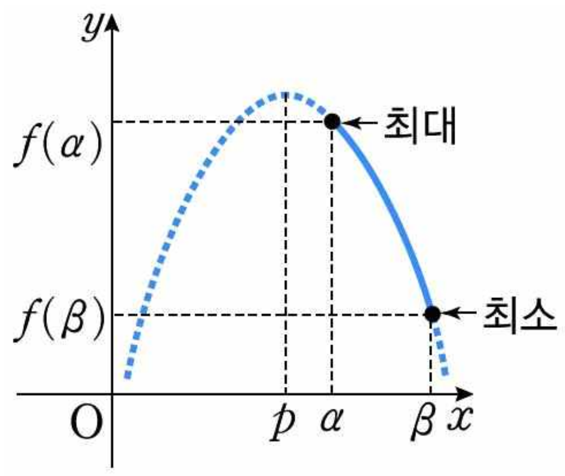
① $a > 0 \Rightarrow$ 최솟값은 축에서 가까운 쪽

최댓값은 축에서 먼 쪽

② $a < 0 \Rightarrow$ 최댓값은 축에서 가까운 쪽

최솟값은 축에서 먼 쪽





✡ $y = ax^2 + bx + c$ **(단, $\alpha \le x \le \beta$)의 최대, 최소 ❸**

(1) 대칭축 $\Leftrightarrow$ 꼭짓점의 x좌표 $\Leftrightarrow$ $x = -\dfrac{b}{2a}$

(2) 축이 범위에 포함 ○ $\rightarrow$ x^2계수의 부호에 따라

┌ $a > 0 \Rightarrow$ 아래로 볼록 $\Rightarrow$ 축에서 小, 먼 쪽에서 大

└ $a < 0 \Rightarrow$ 위로 볼록 $\Rightarrow$ 축에서 大, 먼 쪽에서 小

(3) 축이 범위에 포함 × $\rightarrow$ x^2계수의 부호에 따라

┌ $a > 0 \Rightarrow$ 축 가까운 쪽에서 小, 먼 쪽에서 大

└ $a < 0 \Rightarrow$ 축 가까운 쪽에서 大, 먼 쪽에서 小

✡ 이차함수의 최대, 최소의 활용 ❶

(1) 주어진 조건 $g(x,\ y)=0$에서 $f(x,\ y)$의 최대, 최소

$g(x,\ y)=0$를 y(또는 x)에 대하여 정리한 후

$f(x,\ y)$에 대입

① 이차함수의 최대, 최소 ⇒ 대칭축

② $f(x,\ y)=k$로 치환 & $x,\ y$가 실수 ⇒ $D \geq 0$

③ $x>0,\ y>0$ ⇒ 산술평균·기하평균

(2) $y=a\{f(x)\}^2+b\{f(x)\}+c$의 최대, 최소

⇒ $f(x)=t$로 치환한 후 t값의 범위를 구하여 푼다.

✡ 이차함수의 최대, 최소의 활용 ❷

(3) $X,\ Y,\ Z$가 실수일 때,

① X^2+Y^2+K ⇒ $X=0,\ Y=0$일 때 최솟값 K

② $X^2+Y^2+Z^2+K$

⇒ $X=0,\ Y=0,\ Z=0$일 때 최솟값 K

❹ $A=B=C$의 꼴로 조건이 주어지면

⇒ $A=B=C=k$로 치환