Ⅰ_1. 급수

[12미적01-04] 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고,
이를 판별할 수 있다.
[12미적01-05] 등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다.
[12미적01-06] 등비급수를 활용하여 여러 가지 문제를
해결할 수 있다.

1 급수의 뜻

수열 $\{a_n\}$의 각 항을 차례로 덧셈 기호 $+$로 연결한 식

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

을 '급수'라 하고, 이것을 합의 기호 $\sum$를 사용하여

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 같이 나타낸다. 즉,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

예 ① $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) = 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n+1) + \cdots$

② $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3^n = 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n + \cdots$

$\boxed{2}$ 급수의 수렴과 발산 ❶

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$에서 첫째항부터 제n항까지의 합

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

를 이 급수의 제n항까지의 '부분합'이라고 한다.

(1) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 제n항까지의 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 일정한 값 S에 수렴하면, 즉

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S$$

$\boxed{2}$ 급수의 수렴과 발산 ❷

이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 S에 '수렴한다'고 하고

S를 이 급수의 '합'이라고 하며, 이것을 기호로

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$와 같이 나타낸다.

(2) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 제n항까지의 부분합으로 이루어진 수열

$\{S_n\}$이 발산할 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 '발산한다'고 한다.

☐2 급수의 수렴과 발산 ❸

예 ① 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$의 제$n$항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

이고, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

☐2 급수의 수렴과 발산 ❹

② 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)$의 제$n$항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\times\frac{n(n+1)}{2}=n^2$$

이고 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}n^2=\infty$이므로

급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)$은 발산한다.

✡ 분수의 꼴로 주어진 수열의 합 ❶

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right) \text{ (단, } A < B \text{)}$$

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+a)} = \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+a}\right)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+a)(k+b)} = \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+a} - \frac{1}{k+b}\right)$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}\right)$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-1)(3k+2)} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k+2}\right)$

✡ 분수의 꼴로 주어진 수열의 합 ❷

$$\frac{1}{ABC} = \frac{1}{C-A}\left(\frac{1}{AB} - \frac{1}{BC}\right) \text{ (단, } A < B < C \text{)}$$

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

(6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right\}$

$$(\because\ k = (k+1) - 1)$$

✡ 무리식의 꼴로 주어진 수열의 합

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+a}+\sqrt{k}} = \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+a}-\sqrt{k}\right)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k+a}+\sqrt{2k+b}}$

$$= \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{2k+b}-\sqrt{2k+a}\right)$$

☑ ① 수열 $\{a_n\}$의 수렴과 발산 ⇒ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 조사!

② 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 수렴과 발산 ⇒ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$의 값을 조사!

3 급수와 수열의 극한 사이의 관계 ❶

수열 $\{a_n\}$에 대하여

(1) 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$이면 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

☑ (1) 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 S에 수렴한다고 하자.

급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 제 n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$n \geq 2$일 때 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$

3 급수와 수열의 극한 사이의 관계 ❷

이고, $a_n = S_n - S_{n-1}$ $(n \geq 2)$이므로

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \left(S_n - S_{n-1}\right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} S_n - \lim_{n \to \infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

따라서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$이다.

(2) (1)의 명제가 참이므로 그 대우

'$\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.'는 참이다.

3 급수와 수열의 극한 사이의 관계 ❸

예 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{5n+1}$에서 $\lim_{n \to \infty} \frac{3n}{5n+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{3}{5 + \frac{1}{n}} = \frac{3}{5} \neq 0$

이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{5n+1}$은 발산한다.

☑ 일반적으로 (1)의 명제의 역은 성립하지 않는다.

즉, $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$이라고 해서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 반드시 수렴하는 것은 아니다.

예를 들어 $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$이면 $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$이지만

3 급수와 수열의 극한 사이의 관계 ❹

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-1\right) = \infty$$

이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

☑ ① $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \frac{2n}{n+1} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

② $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

4 급수의 성질 ❶

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 모두 수렴하고,

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = T$라 할 때,

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} k a_n = k \sum_{n=1}^{\infty} a_n = kS$ (단, k는 상수)

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S + T$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S - T$

4 급수의 성질 ❷

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(pa_n+qb_n)=p\sum_{n=1}^{\infty}a_n+q\sum_{n=1}^{\infty}b_n=pS+qT$

(단, p, q는 상수)

예 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n=1$일 때,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n+2b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}3a_n+\sum_{n=1}^{\infty}2b_n$$

$$=3\sum_{n=1}^{\infty}a_n+2\sum_{n=1}^{\infty}b_n=3\times2+2\times1=8$$

✡ 급수의 수렴, 발산을 판정하는 여러 가지 방법

(1) 비교판정법 : $0\le a_n\le b_n$일 때,

급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하면 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$도 수렴하고,

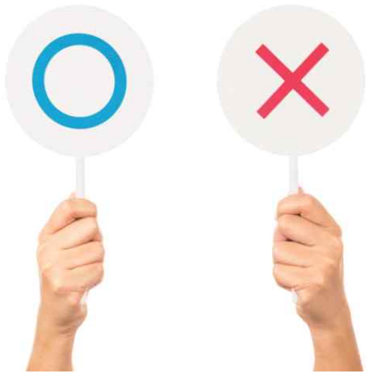
급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 발산하면 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$도 발산한다.

(2) 비율판정법 : 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$에 대하여 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=r$일 때,

$r<1$이면 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 수렴하고,

$r>1$이면 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산한다.

$\boxed{5}$ 급수 ○, × 문제 ❶



(1) 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴 $\not\Leftarrow\!\!\!\Rightarrow$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(⇒) Let $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = S$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$$

$(\not\Leftarrow)$ [반례] $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha,\ \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ $\not\Leftarrow\!\!\!\Rightarrow$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$

(⇒) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \times \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \times \beta = 0$

$\boxed{5}$ 급수 ○, × 문제 ❷

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$이 수렴 $\not\Leftarrow\!\!\!\Rightarrow$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴

(⇒) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\{(a_n + b_n) - a_n\}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n + b_n) = \alpha,\ \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - 2b_n) = \beta$

$\Leftrightarrow$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴

(⇒) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{2\alpha + \beta}{5},\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{\alpha - 2\beta}{5}$

5 급수 ○, × 문제 ❸

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$이 수렴 & $\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$ $\not\leftrightarrow$ $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$

($\not\rightarrow$) [반례] $\{a_n\}$: $1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots$

$\{b_n\}$: $0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \cdots$

(6) $\lim_{n \to \infty} a_n$, $\lim_{n \to \infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$이 수렴 & $\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$

$\not\Leftarrow\!\Rightarrow$ $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$

($\Rightarrow$) $\lim_{n \to \infty} a_n b_n = 0$ $\Rightarrow$ $\lim_{n \to \infty} b_n \neq 0$이면 모순

5 급수 ○, × 문제 ❹

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴 $\not\leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$이 수렴

($\not\rightarrow$) [반례] $\{a_n\}$: $-1,\ 1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \cdots$

($\not\leftarrow$) [반례] $\{a_n\}$: $1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots$

(8) $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{2n} a_k = \alpha$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \alpha$

(대우) $\lim_{n \to \infty} S_n$이 발산 $\Leftrightarrow$ $\lim_{n \to \infty} S_{2n}$이 발산

5 급수 ○, × 문제 ❺

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴 $\not\Leftarrow\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$이 발산 (단, $a_n > 0$)

(대우) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$이 수렴 $\not\Leftarrow\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 발산 ($a_n > 0$)

($\Rightarrow$) $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ & $a_n > 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{1}{a_n} = \infty$

($\not\Leftarrow$) [반례] $a_n = (-1)^n$

5 급수 ○, × 문제 ❻

(10) $a_n > b_n$이고 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta \Rightarrow \alpha > \beta$

($\Rightarrow$) $\alpha - \beta = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \left(a_k - b_k\right) > 0$

(11) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$ & $\alpha > \beta$ $\not\Leftarrow\not\Rightarrow$ $\lim_{n \to \infty} a_n > \lim_{n \to \infty} b_n$

[해설] $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴 $\Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = 0$

6 등비급수의 뜻

첫째항이 a $(a \neq 0)$이고 공비가 r인 등비수열 $\{ar^{n-1}\}$의 각 항을 차례로 덧셈 기호 $+$로 연결한 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

을 첫째항이 a이고 공비가 r인 '등비급수'라고 한다.

7 등비급수의 수렴과 발산 ❶

첫째항이 a $(a \neq 0)$이고 공비가 r인 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$은

(1) $|r| < 1$일 때, 수렴하고 그 합은 $\frac{a}{1-r}$이다. 즉,

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

(2) $|r| \geq 1$일 때, 발산한다.

☑ (1) $|r|<1$일 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$의 제$n$항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

이고 $\lim_{n \to \infty} r^n = 0$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

(2) $|r| \geq 1$일 때, $\lim_{n \to \infty} ar^n \neq 0$이므로 급수와 수열의 극한 사이의 관계에 의하여 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$은 발산한다.

7 등비급수의 수렴과 발산 ❷

예 ① 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 4 \times \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} \right\}$은 첫째항이 4, 공비가 $-\frac{1}{3}$이고, $\left| -\frac{1}{3} \right| < 1$이므로 수렴하고 그 합은

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 4 \times \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} \right\} = \frac{4}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = 3$$

② 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \{ 4 \times (-2)^{n-1} \}$은 공비가 -2이고 $|-2| \geq 1$이므로 발산한다.

$\boxed{7}$ 등비급수의 수렴과 발산 ❸

☑ 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$에서 $a=0$이면 급수의 각 항이 0이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=0$이다.

$\therefore$ 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$이 수렴 $\Leftrightarrow$ $a=0$ 또는 $|r|<1$

☑ 등비수열 $\lim_{n\to\infty} ar^{n-1}$가 수렴 $\Leftrightarrow$ $a=0$ 또는 $-1<r\le 1$

✡ 순환소수를 분수로 나타내는 방법

(1) $0.\dot{b_1}b_2\cdots\dot{b_n}=\dfrac{b_1b_2\cdots b_n}{\underbrace{99\cdots 9}_{n\text{개}}}$

(2) $0.a_1a_2\cdots a_m\dot{b_1}b_2\cdots\dot{b_n}$

$$=\frac{a_1a_2\cdots a_mb_1b_2\cdots b_n-a_1a_2\cdots a_m}{\underbrace{99\cdots 9}_{n\text{개}}\underbrace{00\cdots 0}_{m\text{개}}}$$

✡ 등비급수의 응용

(1) $a_2 = a_1 \times r \ \Leftrightarrow \ r = \dfrac{a_2}{a_1}$

(2) 닮음비가 $1 : r$ $\Rightarrow$ 넓이의 비는 $1 : r^2$, 부피의 비는 $1 : r^3$

개수가 k배 증가 $\Rightarrow$ 공비는 $k \times r$, $k \times r^2$, $k \times r^3$

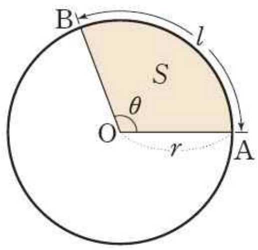
(3) 한 변의 길이가 a인 정삼각형

$\Rightarrow$ 넓이 : $S = \dfrac{\sqrt{3}}{4} a^2$, 높이 : $h = \dfrac{\sqrt{3}}{2} a$

(4) 반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ인 부채꼴

① 호의 길이 : $l = r\theta$

② 넓이 : $S = \dfrac{1}{2} r l = \dfrac{1}{2} r^2 \theta$



8 등비급수 ○, × 문제 ❶

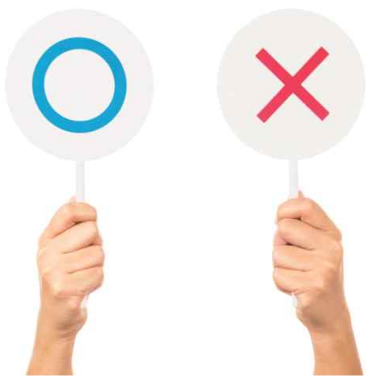
(1) 등비급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴 $\not\Leftarrow\!\!\Rightarrow$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$이 수렴

$(\Rightarrow)$ $-1 < r < 1 \ \Leftrightarrow \ 0 \le r^2 < 1$

$(\not\Leftarrow)$ $-1 < r^2 < 1 \ \not\Rightarrow \ -1 < r < 1$ ($\because$ 허수)

(2) 등비급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 발산 $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$이 발산

$(\Leftrightarrow)$ $|r| \ge 1 \ \Leftrightarrow \ r^2 \ge 1$



$\boxed{8}$ 등비급수 ○, × 문제 ❷

(3) 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴 $\not\leftarrow\!\!\not\rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+\frac{1}{2}\right)$이 수렴

($\not\rightarrow$) $\lim_{n\to\infty}\left(a_n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\neq 0$ ($\not\leftarrow$) $\lim_{n\to\infty} a_n=-\frac{1}{2}\neq 0$

(4) 두 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴

$\not\Leftarrow\!\!\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 이 수렴

($\Rightarrow$) Let $a_n = a r_1^{\,n-1}$, $b_n = a r_2^{\,n-1}$

$\Rightarrow |r_1| < 1$, $|r_2| < 1 \Rightarrow |r_1 r_2| < 1$

$\boxed{8}$ 등비급수 ○, × 문제 ❸

(5) 두 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 발산

$\not\leftarrow\!\!\not\rightarrow$ $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)\neq 0$

($\not\rightarrow$) [반례] $a_n=(-1)^n$, $b_n=(-1)^{n+1}$

(6) 두 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\,3}$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{\,3}$이 수렴

$\not\Leftarrow\!\!\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$이 수렴

($\Rightarrow$) $-1<r^3<1 \Rightarrow -1<r<1$

$-1<s^3<1 \Rightarrow -1<s<1$