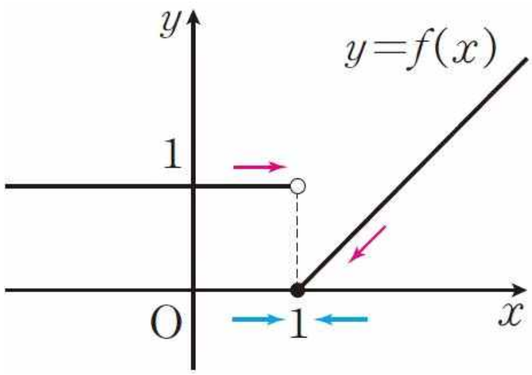
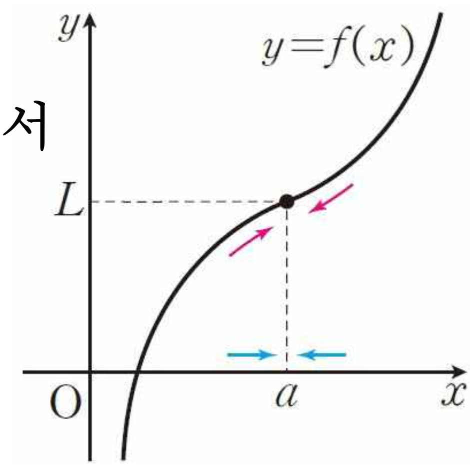
Ⅰ_1. 함수의 극한(極限, Limit)

[12수학Ⅱ01-01] 함수의 극한의 뜻을 안다.
[12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고,
함수의 극한값을 구할 수 있다.



1 함수의 수렴 ❶

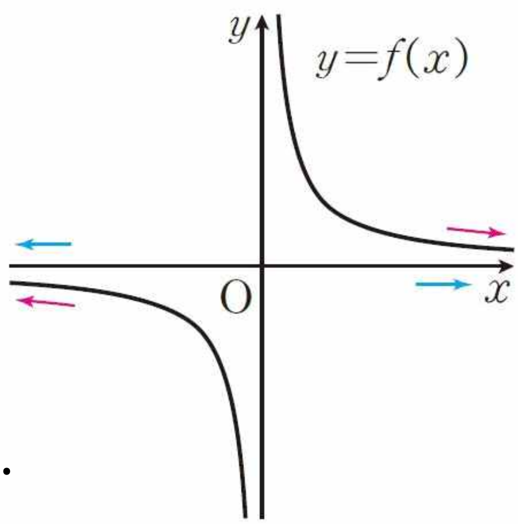


(1) 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 'L에 수렴한다'고 한다. 이때 L을 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 '극한값' 또는 '극한'이라고 하며, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \text{ 또는 } x \to a \text{일 때 } f(x) \to L$$

☑ 극한 $\begin{cases} \text{실극한 ⇨ 도착점} \\ \text{잠재적(가능적) 극한 ⇨ 지향점(점근선)} \end{cases}$

1 함수의 수렴 ❷



(2) 함수 $f(x)$에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 'L에 수렴한다'고 하며, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

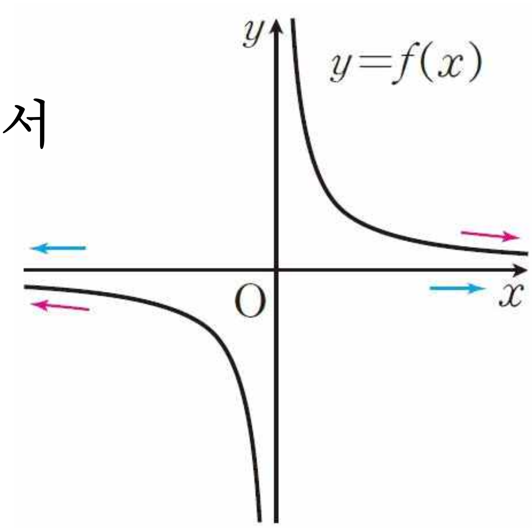
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \text{ 또는}$$

$$x \to \infty \text{일 때 } f(x) \to L$$

☑ 무한대(∞) : 한없이 커지는 상태

무한소(0) : 양수이면서 한없이 작아지는 상태 $\Leftrightarrow \dfrac{1}{\infty} = 0$

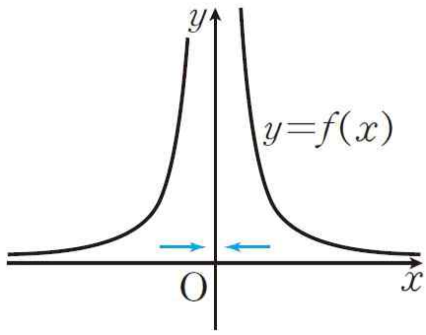
1 함수의 수렴 ❸

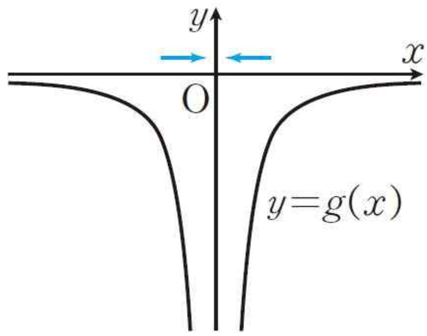


(3) 함수 $f(x)$에서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 'L에 수렴한다'고 하며, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \text{ 또는 } x \to -\infty \text{일 때 } f(x) \to L$$

2 함수의 발산 ❶





(1) 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 한없이 커지면 함수 $f(x)$는 '양의 무한대로 발산한다'고 하고, $g(x)$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 함수 $g(x)$는 '음의 무한대로 발산한다'고 한다. 이것을 각각 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \text{ 또는 } x \to a \text{일 때 } f(x) \to \infty$$

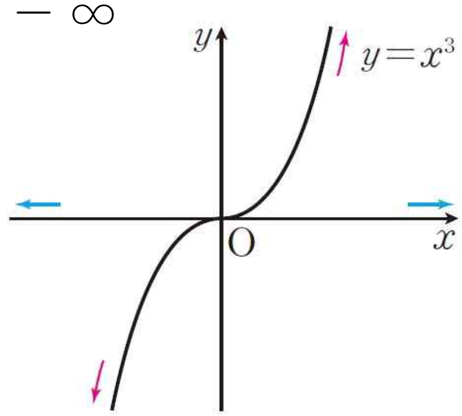
$$\lim_{x \to a} g(x) = -\infty \text{ 또는 } x \to a \text{일 때 } g(x) \to -\infty$$

2 함수의 발산 ❷

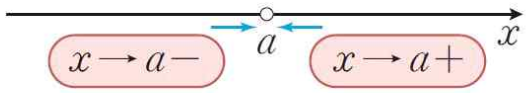
(2) 함수 $f(x)$에서 x의 값이 한없이 커지거나 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, 함수 $f(x)$가 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하면 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$

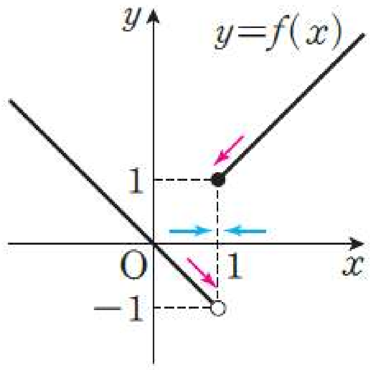
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$



3 함수의 우극한과 좌극한 ❶



(1) 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a보다 크면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 L을 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 '우극한'이라고 하며, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.



$$\lim_{x \to a+} f(x) = L \text{ 또는 } x \to a+ \text{일 때 } f(x) \to L$$

(2) 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a보다 작으면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 L을 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 '좌극한'이라고 하며,

3 함수의 우극한과 좌극한 ❷

이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \to a-} f(x) = L \text{ 또는 } x \to a- \text{일 때 } f(x) \to L$$

(3) 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 우극한과 좌극한이 모두 존재하면서 그 값이 L로 서로 같으면 $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재하고, 그 극한값은 L이다. 또 그 역도 성립하므로 다음이 성립한다.

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = L$$

☑ 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 우극한과 좌극한이 모두 존재하더라도 그 값이 같지 않으면 $\lim_{x \to a} f(x)$는 존재하지 않는다.

$\boxed{4}$ 함수의 극한에 대한 성질 ❶

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \to a} g(x) = \beta$ (α, β는 실수)일 때,

(1) $\lim_{x \to a} cf(x) = c\lim_{x \to a} f(x) = c\alpha$ (단, c는 상수)

(2) $\lim_{x \to a} \{f(x) + g(x)\} = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = \alpha + \beta$

(3) $\lim_{x \to a} \{f(x) - g(x)\} = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = \alpha - \beta$

(4) $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \times \lim_{x \to a} g(x) = \alpha\beta$

(5) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ (단, $\beta \neq 0$)

$\boxed{4}$ 함수의 극한에 대한 성질 ❷

$\boxed{\text{예}}$ ① $\lim_{x \to 1} (x^2 + 2x) = \lim_{x \to 1} x^2 + \lim_{x \to 1} 2x$

$= \lim_{x \to 1} x \times \lim_{x \to 1} x + 2\lim_{x \to 1} x = 1 \times 1 + 2 \times 1 = 3$

② $\lim_{x \to 1} \dfrac{2x-3}{x+2} = \dfrac{\lim_{x \to 1} (2x-3)}{\lim_{x \to 1} (x+2)}$

$= \dfrac{2\lim_{x \to 1} x - \lim_{x \to 1} 3}{\lim_{x \to 1} x + \lim_{x \to 1} 2} = \dfrac{2 \times 1 - 3}{1+2} = -\dfrac{1}{3}$

☑ (1) 함수의 극한에 대한 성질을 $x \to a+$, $x \to a-$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$인 경우에도 성립한다.

4 함수의 극한에 대한 성질 ❸

(2) 함수의 극한에 대한 성질은 각 함수의 극한값이 모두 존재할 때에만 성립한다.

① $c=0$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 이면

$\lim\limits_{x\to 0} cf(x)=c\lim\limits_{x\to 0}\left(0\times\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0} 0=0$ 이지만

극한값 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$가 존재하지 않으므로

$\lim\limits_{x\to 0} cf(x)=c\lim\limits_{x\to 0} f(x)$가 성립하지 않는다.

② $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=-\dfrac{1}{x}$ 이면

$\lim\limits_{x\to 0}\{f(x)+g(x)\}=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{1}{x}+\left(-\dfrac{1}{x}\right)\right\}$

$=\lim\limits_{x\to 0} 0=0$ 이지만 두 극한값 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$가 모두 존재하지 않으므로

$\lim\limits_{x\to 0}\{f(x)+g(x)\}=\lim\limits_{x\to 0} f(x)+\lim\limits_{x\to 0} g(x)$가 성립하지 않는다.

③ $f(x)=x$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$ 이면

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to a}\left(x\times\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0} 1=1$ 이지만

극한값 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$가 존재하지 않으므로

$\lim_{x \to 0} f(x)g(x) = \lim_{x \to 0} f(x) \times \lim_{x \to 0} g(x)$가 성립하지 않는다.

④ $f(x) = x$, $g(x) = \frac{1}{x}$이면

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} x^2 = 0$이지만

극한값 $\lim_{x \to 0} g(x)$가 존재하지 않으므로

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to 0} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$가 성립하지 않는다.

5 함수의 극한값의 계산 ❶

(1) $\frac{0}{0}$꼴의 극한값 ⇨ 약분 (∵ 인수정리)

$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$에서 $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim_{x \to a} g(x) = 0$인 경우

① $f(x)$, $g(x)$가 다항식이면 각각 인수분해하여 공통인수를 약분한 후 극한값을 구한다.

② $f(x)$ 또는 $g(x)$가 무리식이면 무리식이 있는 쪽을 유리화한 다음 분모, 분자의 공통인수를 약분한 후 극한값을 구한다.

5 함수의 극한값의 계산 ❷

(2) $\dfrac{\infty}{\infty}$꼴의 극한값 ⇨ 차수 & 밑을 비교

$\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$에서 $\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, $\displaystyle\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$인 경우 $f(x)$, $g(x)$가 다항식이면 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나누어 극한값을 구한다.

☑ $f(x)$, $g(x)$가 다항식이면 $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$는 다음과 같다.

① ($f(x)$의 차수) < ($g(x)$의 차수)이면

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

5 함수의 극한값의 계산 ❸

② ($f(x)$의 차수) = ($g(x)$의 차수)이면

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(f(x)\text{의 최고차항의 계수})}{(g(x)\text{의 최고차항의 계수})} \neq 0$$

③ ($f(x)$의 차수) > ($g(x)$의 차수)이면

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty \text{ 또는 } \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

☑ $x \to -\infty$이면 $x = -t$ $(t > 0)$로 치환하여 계산한다.

예 $$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2+2}{x^2+x+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{3+\dfrac{2}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}} = \frac{3+0}{1+0+0} = 3$$

$\boxed{5}$ 함수의 극한값의 계산 ❹

(3) $\infty - \infty$ 꼴의 극한값

$\lim_{x \to \infty} \{f(x) - g(x)\}$에서 $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$

인 경우

① $f(x) - g(x)$가 다항식이면 $f(x) - g(x)$의 최고차항으로 묶어 극한값을 구한다.

② $f(x) - g(x)$가 무리식이면 분모가 1인 분수 꼴의 식으로 생각하여 분자를 유리화한 후 극한값을 구한다.

$\boxed{5}$ 함수의 극한값의 계산 ❺

$\boxed{예}$ $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - x\right)$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+3x} - x\right)\left(\sqrt{x^2+3x} + x\right)}{\sqrt{x^2+3x} + x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\left(x^2 + 3x\right) - x^2}{\sqrt{x^2+3x} + x} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+3x} + x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + 1} = \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2}$$

5 함수의 극한값의 계산 ❻

(4) $0\times\infty$꼴의 극한값 ⇨ 통분

$\lim_{x\to a} f(x)g(x)$에서 $\lim_{x\to a} f(x)=0$, $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$인 경우

는 식을 $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{c}{\infty}$ (c는 상수)의 꼴로 변형하여

극한값을 구한다.

예 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{x-1}{x-1}+\frac{1}{x-1}\right)$

$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{0-1}=-1$

5 함수의 극한값의 계산 ❼

(5) 치환형

(1) $\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)$ 또는 $\lim_{t\to-\infty} f\left(\frac{t+1}{t-1}\right)$

$\Rightarrow \lim_{x\to 1-} f(x)$로 치환

(2) $\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{t+1}{t-1}\right)$ 또는 $\lim_{t\to-\infty} f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)$

$\Rightarrow \lim_{x\to 1+} f(x)$로 치환

5 함수의 극한값의 계산 ❽

(6) 샌드위치 법칙의 응용 : 임의의 실수 x에 대하여

$|f(x)| \le M$ (M은 양의 상수)이고 $\lim_{x \to a} g(x) = 0$이면

$$\lim_{x \to a}\{f(x) \times g(x)\} = 0$$

(7) $[x]$가 포함되어 있는 경우

(단, $[x]$는 x보다 크기 않은 최대의 정수 : 가우스 x)

① 좌극한과 우극한을 이용하여 구한다.

② 식에 있는 항들을 $[x] = x - h$ (단, $0 \le h < 1$)로 바꾸어 구한다.

6 미정계수의 결정

(1) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$\lim_{x \to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \alpha$ (α는 실수)일 때,

① $\lim_{x \to a} g(x) = 0$이면 $\lim_{x \to a} f(x) = 0$이다.

☑ (분모) $\to 0 \Rightarrow$ (분자) $\to 0$

② $\lim_{x \to a} f(x) = 0$이고 $\alpha \ne 0$이면 $\lim_{x \to a} g(x) = 0$이다.

☑ (분자) $\to 0$이고 $\alpha \ne 0 \Rightarrow$ (분모) $\to 0$

☑① $\lim_{x \to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \alpha$ (α는 실수)이고, $\lim_{x \to a} g(x) = 0$이면

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \times g(x) \right\} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \times \lim_{x \to a} g(x) = \alpha \times 0 = 0\end{aligned}$$

② $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$ (α는 0이 아닌 실수)이면

$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{\alpha}$이다. 이때 $\lim_{x \to a} f(x) = 0$이면

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a} g(x) &= \lim_{x \to a} \left\{ \frac{g(x)}{f(x)} \times f(x) \right\} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} \times \lim_{x \to a} f(x) = \frac{1}{\alpha} \times 0 = 0\end{aligned}$$

예 ① 상수 a에 대하여 $\lim_{x \to 1} \frac{ax - 2}{x - 1} = 2$이면

$\lim_{x \to 1} (x - 1) = 1 - 1 = 0$이므로

$\lim_{x \to 1} (ax - 2) = a - 2 = 0$이어야 한다. $\therefore\ a = 2$

② 상수 a에 대하여 $\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 + ax} = 1$이면

$\lim_{x \to 1} (x - 1) = 1 - 1 = 0$이고 $\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 + ax} \neq 0$이므로

$\lim_{x \to 1} (x^2 + ax) = 1 + a = 0$이어야 한다. $\therefore\ a = -1$

(2) 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$ (α는 0이 아닌 실수)이면

($f(x)$의 차수) = ($g(x)$의 차수)이고

$\alpha = \frac{(f(x)\text{의 최고차항의 계수})}{(g(x)\text{의 최고차항의 계수})}$이다.

예 상수 a에 대하여 $\lim_{x \to \infty} \frac{ax^2 + x}{2x^2 + 3} = 4$이면 $\frac{a}{2} = 4$에서

$a = 8$이다.

✡ 로피탈(L'Hospital)의 정리 - 교육과정 외 & 검산할 때

두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 미분가능할 때,

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$ (α는 실수)인 $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값은

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \cdots$$

7 함수의 극한의 대소 관계 ❶

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \to a} g(x) = \beta$ (α, β는 실수)일 때,

a에 가까운 모든 실수 x에 대하여

(1) $f(x) \le g(x)$이면 $\alpha \le \beta$이다.

(2) [샌드위치의 정리(Sandwich's rule)] 함수 $h(x)$에 대하여
$f(x) \le h(x) \le g(x)$이고 $\alpha = \beta$이면 $\lim_{x \to a} h(x) = \alpha$이다.

(3) $f(x) < g(x)$이면 $\alpha \le \beta$이다.

(2) [샌드위치의 정리(Sandwich's rule)] 함수 $h(x)$에 대하여
$f(x) < h(x) < g(x)$이고 $\alpha = \beta$이면 $\lim_{x \to a} h(x) = \alpha$이다.

7 함수의 극한의 대소 관계 ❷

☑ 함수의 극한의 대소 관계는 $x \to a+$, $x \to a-$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$인 경우에도 성립한다.

☑ $f(x) < g(x) \not\rightarrow \lim_{x \to a} f(x) < \lim_{x \to a} g(x)$

예 $f(x) = 0$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$이면 모든 양수 x에서 $f(x) < g(x)$

이지만, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$이므로

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x)$이다.

$\therefore\ f(x) < g(x) \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) \le \lim_{x \to a} g(x)$