

# 3

## 역함수

- 역함수의 의미를 이해하고, 주어진 함수의 역함수를 구할 수 있다.

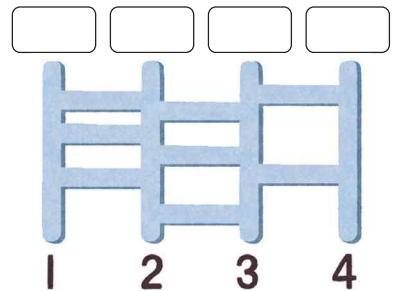
### 역함수



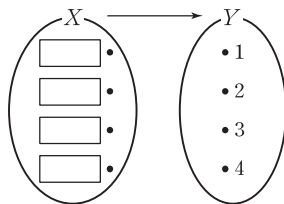
#### 탐구 활동

4명을 한 모둠으로 하여 오른쪽 그림의 사다리 타기를 해 보고, 다음 물음에 답해 보자.

- 빈칸에 모둠원의 이름을 각각 적고, 각 모듬원에 대응하는 번호를 말해 보자.
- 각 번호에 대응하는 모듬원을 말해 보자.

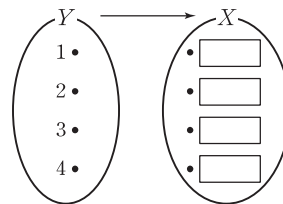


- 모듬원 전체의 집합을  $X$ , 번호의 집합을  $Y$ 라고 할 때, 위 ①을 이용하여  $X$ 를 정의역으로 하는 함수를 [그림 1]에 화살표로 나타내어 보자.



[그림 1]

- 모듬원 전체의 집합을  $X$ , 번호의 집합을  $Y$ 라고 할 때, 위 ②를 이용하여  $Y$ 를 정의역으로 하는 함수를 [그림 2]에 화살표로 나타내어 보자.



[그림 2]

위 탐구 활동에서 모듬원에서 번호로의 대응과 번호에서 모듬원으로의 대응은 모두 함수임을 알 수 있다.

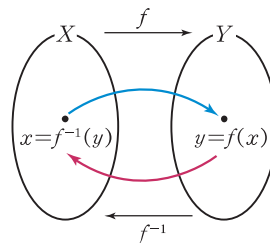
두 집합  $X, Y$ 에서 함수  $f: X \rightarrow Y$ 가 일대일대응이면  $Y$ 의 각 원소  $y$ 에 대응하는  $X$ 의 원소  $x$ 는 단 하나 존재한다.

이때  $Y$ 의 각 원소  $y$ 에  $y=f(x)$ 인  $X$ 의 원소  $x$ 가 대응하면  $Y$ 를 정의역으로 하고  $X$ 를 공역으로 하는 새로운 함수를 얻을 수 있다.

이 함수를 함수  $f$ 의 **역함수**라고 하며, 이것을 기호로

$$f^{-1}: Y \rightarrow X$$

와 같이 나타낸다.



이때 역함수의 정의에 의하여

$$y=f(x) \iff x=f^{-1}(y)$$

이므로 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x \quad (x \in X)$$

$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y \quad (y \in Y)$$

즉, 합성함수  $f^{-1} \circ f$ 는  $X$ 에서의 항등함수이고, 합성함수  $f \circ f^{-1}$ 는  $Y$ 에서의 항등함수이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

#### 역함수

함수  $f: X \longrightarrow Y$ 가 일대일대응일 때

①  $f$ 의 역함수  $f^{-1}: Y \longrightarrow X$ 가 존재한다.

②  $y=f(x) \iff x=f^{-1}(y)$

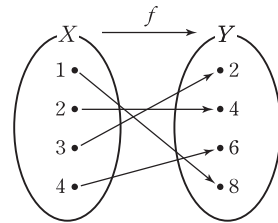
③  $(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad (x \in X), \quad (f \circ f^{-1})(y) = y \quad (y \in Y)$

**문제 1** 오른쪽 그림과 같은 함수  $f: X \longrightarrow Y$ 에서 다음 물음에 답하시오.

(1)  $f$ 의 역함수  $f^{-1}$ 를 그림으로 나타내시오.

(2)  $f(4)$ 와  $f^{-1}(6)$ 의 값을 각각 구하시오.

(3)  $(f^{-1} \circ f)(2)$ 와  $(f \circ f^{-1})(8)$ 의 값을 각각 구하시오.



함수  $y=f(x)$ 가 역함수를 가질 때, 그 역함수를 구하는 방법을 알아보자.

함수를 나타낼 때는 보통 정의역의 원소를  $x$ , 치역의 원소를  $y$ 로 나타내므로 함수  $y=f(x)$ 의 역함수  $x=f^{-1}(y)$ 도  $x$ 와  $y$ 를 서로 바꾸어

$$y=f^{-1}(x)$$

와 같이 나타낸다.

일반적으로 일대일대응인 함수  $y=f(x)$ 에서  $x$ 를  $y$ 의 식으로 나타낼 수 있을 때, 역함수  $y=f^{-1}(x)$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$y=f(x) \xrightarrow[\text{나타낸다.}]{x \text{를 } y \text{의 식으로}} x=f^{-1}(y) \xrightarrow[\text{서로 바꾼다.}]{x \text{와 } y \text{를}} y=f^{-1}(x)$$

#### 학습 도움말

함수  $f$ 의 역함수  $f^{-1}$ 는  $f$ 의 치역을 정의역으로 한다.

**예제 1** 함수  $f(x) = 2x + 3$ 의 역함수를 구하시오.

**풀이**

주어진 함수는 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y = 2x + 3$ 이라 하고  $x$ 를  $y$ 의 식으로 나타내면

$$x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}$$

$x$ 와  $y$ 를 서로 바꾸면

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

따라서 주어진 함수의 역함수는

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

**답**  $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

**문제 2** 다음 함수의 역함수를 구하시오.

(1)  $f(x) = 3x - 1$

(2)  $f(x) = -\frac{1}{2}x + 5$

**문제 3** 두 함수  $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ ,  $g(x) = -x + 2$ 에서 다음이 성립함을 보이시오.

(1)  $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

(2)  $(f^{-1})^{-1} = f$

**학습 도움말**

일반적으로 두 함수  $f, g$ 의 역함수가 존재하면  
 $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ ,  
 $(f^{-1})^{-1} = f$   
 가 성립한다.

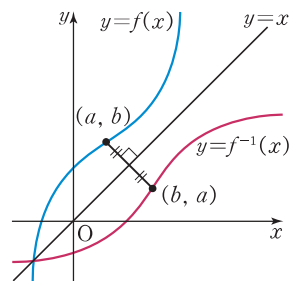
**◆ 역함수의 그래프**

함수  $y = f(x)$ 의 역함수  $y = f^{-1}(x)$ 가 존재할 때, 함수  $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점을  $(a, b)$ 라고 하면

$$b = f(a) \iff a = f^{-1}(b)$$

이다.

따라서 점  $(b, a)$ 는 역함수  $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프 위의 점이다. 이때 점  $(a, b)$ 와 점  $(b, a)$ 는 직선  $y = x$ 에 대하여 대칭이다.



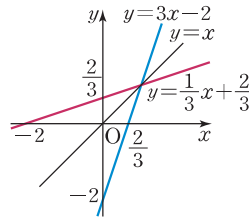
이상을 정리하면 다음과 같다.

#### 역함수의 그래프

함수  $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수  $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선  $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

**[보기]** 함수  $y=3x-2$ 의 역함수는  $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ 이다.

또, 이 두 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선  $y=x$ 에 대하여 대칭이다.



**문제 4** 다음 함수의 역함수의 그래프를 그리시오.

(1)  $f(x)=2x-1$

(2)  $f(x)=-2x+3$

#### 창의 탐구 돋보기

다음 대화를 읽고, 물음에 답해 보자.



- ① 인터넷을 이용하여 화씨온도( $^{\circ}\text{F}$ )를 섭씨온도( $^{\circ}\text{C}$ )로 나타내는 식을 찾아  $x^{\circ}\text{F}$ 를  $y^{\circ}\text{C}$ 로 바꿀 때,  $y$ 를  $x$ 의 식으로 나타내어 보자.
- ② 위 ①의 식을 이용하여  $95^{\circ}\text{F}$ 는 몇  $^{\circ}\text{C}$ 인지 구해 보자.
- ③ 위 ①의 식에서  $x^{\circ}\text{C}$ 를  $y^{\circ}\text{F}$ 로 바꿀 때,  $y$ 를  $x$ 의 식으로 나타내어 보자.

**추론하기** 위 ①, ③에서 각각 구한 두 식이 함수인지 말하고, 서로 어떤 관계인지 추론해 보자.

**이야기 속으로** 온도를 나타내는 단위에는 섭씨온도( $^{\circ}\text{C}$ )와 화씨온도( $^{\circ}\text{F}$ )가 있다. 섭씨온도는 얼음의 녹는점을  $0^{\circ}\text{C}$ , 물의 끓는점을  $100^{\circ}\text{C}$ 로 하여 그 사이를 100등분 한 온도 체계이고, 화씨온도는 얼음의 녹는점을  $32^{\circ}\text{F}$ , 물의 끓는점을  $212^{\circ}\text{F}$ 로 하여 그 사이를 180등분 한 온도 체계이다.

(출처: 존 M. 헨쇼(이재경 역), "세상의 모든 공식")

