Ⅲ-2 직선의 방정식 P.68-74

1. 18	2. 28	3. ④	4. ④	5. ④
6. 13	7. 17	8. 106	9. ④	10. ③
11. 11	12. 4	13. ①	14. 15	15. 8
16. 96	17. ④	18. ④	19. ⑤	20. ①
21. ⑤	22. ⑤	23. ③	24. ⑤	

1 직사각형의 두 대각선의 교점을 지나는 직선은 그 직사각형의 넓이를 이등분한다.
직사각형 ABCD 의 대각선의 교점의 좌표는 선분 AC 의 중점이므로 그 좌표는

$$\left(\frac{-2+4}{2},\ \frac{7+(-1)}{2}\right),\ \text{즉 } (1,\ 3)$$

직사각형 EFGH 의 대각선의 교점의 좌표는 선분 EG 의 중점이므로 그 좌표는

$$\left(\frac{-3+1}{2},\ \frac{1+(-1)}{2}\right),\ \text{즉 } (-1,\ 0)$$

따라서 $m=\dfrac{3-0}{1-(-1)}=\dfrac{3}{2}$ 이므로

$12m=18$

2 직선 l 의 x 절편, y 절편이 각각 4, 2 이므로 직선 l 의 방정식은

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$$

$$\therefore\ y=-\frac{1}{2}x+2$$

이것을 주어진 등식에 대입하면

$$x^2+a\left(-\frac{1}{2}x+2\right)^2+bx+c=0$$

$$\left(1+\frac{a}{4}\right)x^2-(2a-b)x+(4a+c)=0$$

이 식이 x 에 대한 항등식이므로

$$1+\frac{a}{4}=0,\ 2a-b=0,\ 4a+c=0$$

$$\therefore\ a=-4,\ b=-8,\ c=16$$

$$\therefore |a|+|b|+|c|=28$$

[다른 풀이] 직선 위의 임의의 점에 대하여 등식이 항상 성립하므로 직선 위의 점 $(0,2)$, $(2,1)$, $(4,0)$의 좌표를 각각 대입하여 정리하면

$4a+c=0$ ……㉠

$a+2b+c=-4$ ……㉡

$4b+c=-16$ ……㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=-4,\ b=-8,\ c=16$

$\therefore |a|+|b|+|c|=28$

3 $\triangle\mathrm{OPB}=\dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{OAB}$이고, 점 P가 제1사분면 위의 점이므로 점 P는 선분 OA 의 중점이다.

$\therefore \mathrm{P}(3,1)$

$\triangle\mathrm{OPQ}=\dfrac{3}{2}\triangle\mathrm{OPB}$이고, 점 Q가 제 2 사분면 위의 점이므로 점 Q는 선분 OB를 $3:1$로 외분하는 점이다. 즉

$$\mathrm{Q}\left(\frac{3\cdot(-2)-1\cdot0}{3-1},\ \frac{3\cdot4-1\cdot0}{3-1}\right)$$

$\therefore \mathrm{Q}(-3,6)$

따라서 직선 PQ의 방정식은

$$y-1=\frac{6-1}{-3-3}(x-3)$$

$\therefore\ 5x+6y=21$

즉 $m=5$, $n=6$이므로

$m+n=11$

4 두 직선 $(2+k)x-y-10=0$과 $y=-\dfrac{1}{3}x+1$이 서로 수직이므로

$$(2+k)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-1$$

$\therefore k=1$

5 (i) 두 직선이 수직일 때,

$a\cdot1+2(a+1)=0$이므로 $\quad a=-\dfrac{2}{3}$

$\therefore\ m=-\dfrac{2}{3}$

(ii) 두 직선이 평행할 때,

$\dfrac{a}{1}=\dfrac{2}{a+1}\neq\dfrac{2}{2}$에서 $\quad a^2+a-2=0$

$\therefore a=-2 \ (\because a \neq 1)$

$\therefore n=-2$

(i), (ii)에서 $\quad mn=\dfrac{4}{3}$

6 직선 $y=mx+3$이 직선 $ny-2y-2=0$, 즉 $y=\dfrac{n}{2}x-1$과 수직이므로

$m \cdot \dfrac{n}{2}=-1 \qquad \therefore mn=-2$

또 직선 $y=mx+3$이 직선 $y=(3-n)x-1$과 평행하므로

$m=3-n \qquad \therefore m+n=3$

$\therefore m^2+n^2=(m+n)^2-2mn=13$

7 (i) 직선 $l: x-ay+2=0$과

직선 $m: 4x+by+2=0$이 수직일 때,

$1 \cdot 4-ab=0$이므로 $\quad ab=4$

(ii) 직선 $l: x-ay+2=0$과

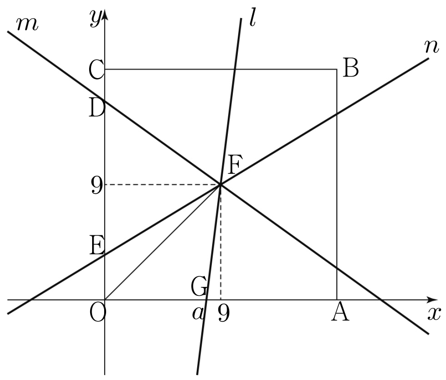
직선 $n: x-(b-3)y-2=0$이 평행할 때,

$\dfrac{1}{1}=\dfrac{a}{b-3} \neq \dfrac{2}{-2}$이므로 $\quad a-b=-3$

(i), (ii)에서

$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=17$

8



삼각형 DEF의 넓이는 54이므로 $\quad \overline{\mathrm{DE}}=12$

사각형 OGFE의 넓이 54는 삼각형 OGF와 삼각형 OEF의 넓이의 합과 같으므로

$\overline{\mathrm{OE}}+\overline{\mathrm{OG}}=12$

$\overline{\mathrm{OG}}=a$이므로 $\quad \overline{\mathrm{OE}}=12-a,\ \overline{\mathrm{OD}}=24-a$

따라서 $\quad \mathrm{D}(0,\ 24-a),\ \mathrm{E}(0,\ 12-a)$

직선 m, n의 기울기는 각각 $\quad \dfrac{a-15}{9},\ \dfrac{a-3}{9}$

두 직선 m, n의 기울기의 곱은

$\dfrac{1}{81}(a^2-18a+45)=\dfrac{1}{81}(a-9)^2-\dfrac{4}{9}$

$6 \leq a \leq 10$에서 $a=6$일 때 최댓값 $\alpha=-\dfrac{1}{3}$, $a=9$일 때 최솟값 $\beta=-\dfrac{4}{9}$를 가지므로

$\alpha^2+\beta^2=\dfrac{25}{81}$, 따라서 $\quad p+q=106$

9 세 직선이 한 점에서 만나거나 적어도 두 직선이 평행하면 삼각형이 이루어지지 않는다.

(i) 직선 n이 직선 l, m의 교점 $(-1,\ 1)$을 지날 때,

$a=2$

(ii) 두 직선 l, n이 평행할 때, $\quad a=\dfrac{5}{2}$

(iii) 두 직선 m, n이 평행할 때, $\quad a=1$

이상에서 모든 a의 값의 곱은 5이다.

10 두 직선 l, m의 교점의 좌표는 $\quad (-1,\ 1)$

두 직선 l, n의 교점의 좌표는 $\quad \left(-\dfrac{1}{5},\ 3\right)$

두 직선 m, n의 교점의 좌표는 $\quad (1,\ 3)$

따라서 삼각형의 무게중심의 좌표는

$\left(-\dfrac{1}{15},\ \dfrac{7}{3}\right)$

11 $\overline{\mathrm{AB}}$와 직선 $y=x+1$이 수직이므로

$\left(\dfrac{b-5}{a-1}\right) \cdot 1=-1$

$\therefore a+b=6 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PB}}=1:2$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $1:2$로 내분하는 점 P는

$\mathrm{P}\left(\dfrac{a+2}{3},\ \dfrac{b+10}{3}\right)$

이때 점 P는 직선 $y=x+1$ 위의 점이므로

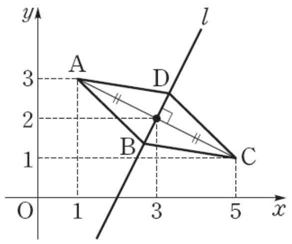
$$\frac{b+10}{3} = \frac{a+2}{3}+1$$

$\therefore\ a-b=5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\dfrac{11}{2},\ b=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ 4ab=11$

12



직선 l은 $\overline{\mathrm{AC}}$의 수직이등분선이므로

(직선 AC의 기울기)$=\dfrac{1-3}{5-1}=-\dfrac{1}{2}$

$\overline{\mathrm{AC}}$의 중점의 좌표는

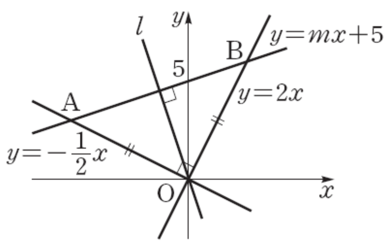
$\left(\dfrac{6}{2},\ \dfrac{4}{2}\right)$, 즉 $(3,\ 2)$

따라서 직선 l은 기울기가 2이고 점 $(3,\ 2)$를 지나므로 직선 l의 방정식은

$y-2=2(x-3)$ $\therefore\ 2x-y-4=0$

즉 $a=-1,\ b=-4$이므로 $ab=4$

13



두 직선 $y=2x,\ y=-\dfrac{1}{2}x$가 서로 수직이므로 세 직선 $y=2x,\ y=-\dfrac{1}{2}x,\ y=mx+5$로 둘러싸인 삼각형 AOB는 직각이등변삼각형이다.

직선 $y=mx+5$는 $\angle\mathrm{AOB}$를 이등분하는 직선 l과 서로 수직이다.

두 직선 $y=2x,\ y=-\dfrac{1}{2}x$, 즉 $2x-y=0$, $x+2y=0$이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식은 $\dfrac{|2x-y|}{\sqrt{5}}=\dfrac{|x+2y|}{\sqrt{5}}$에서

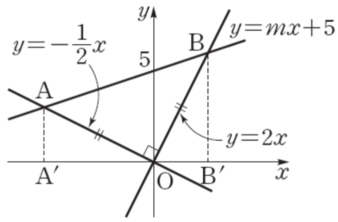
$y=\dfrac{1}{3}x,\ y=-3x$

그런데 $m>0$이므로 직선 l의 방정식은

$y=\dfrac{1}{3}x$

$\therefore\ m=\dfrac{1}{3}$

[다른 풀이]



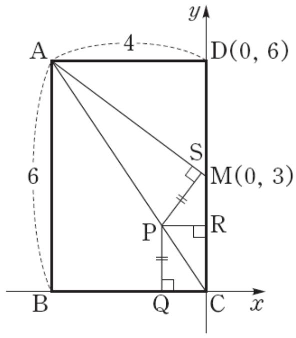
두 직선 $y=2x,\ y=-\dfrac{1}{2}x$가 서로 수직이므로 세 직선 $y=2x,\ y=-\dfrac{1}{2}x,\ y=mx+5$로 둘러싸인 삼각형 AOB는 직각이등변삼각형이다.

두 점 A, B를 x축에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′이라고 하면 삼각형 AA′O와 삼각형 OB′B는 서로 합동이다.

$\mathrm{A}(-2a,\ a),\ \mathrm{B}(a,\ 2a)(a>0)$라고 하면

$$m=\frac{2a-a}{a-(-2a)}=\frac{1}{3}$$

14



위의 그림과 같이 점 C를 원점으로 하고, 선분 BC를 x축, 선분 DC를 y축으로 하는 좌표평면을 놓으면

$A(-4,\ 6),\ M(0,\ 3)$

이때 직선 AC의 방정식은 $y=-\dfrac{3}{2}x$이므로 선분 PR의 길이를 a라고 하면

$Q(-a,\ 0),\ P\left(-a,\ \dfrac{3}{2}a\right)$

한편 직선 AM의 방정식은 $3x+4y-12=0$이므로

$\overline{PS}=\dfrac{|3a-12|}{5}$

또한 주어진 조건에서 $\overline{PQ}=\overline{PS}$이므로

$\dfrac{3}{2}a=\dfrac{|3a-12|}{5}$, 즉 $5a=2|a-4|$

이때 $0<a<4$이므로

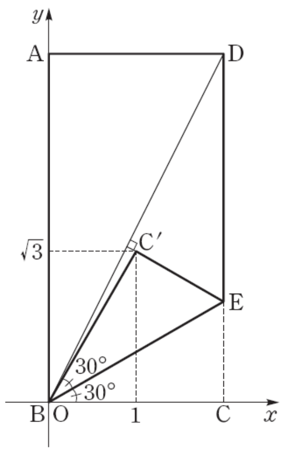
$5a=-2a+8$

$\therefore\ a=\dfrac{8}{7}$

따라서 $p=7,\ q=8$이므로

$p+q=15$

15



위의 그림과 같이 점 B를 원점으로 하고, 선분 BC를 x축, 선분 AB를 y축으로 하는 좌표평면을 놓으면

$\angle C'BC=60^\circ,\ C'(1,\ \sqrt{3})$

이때 직선 BD의 방정식은 $y=2x$, 즉 $2x-y=0$이므로 점 C′과 직선 BD 사이의 거리는

$\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\dfrac{2}{5}\sqrt{5}-\dfrac{1}{5}\sqrt{15}$

$a=\dfrac{2}{5},\ b=\dfrac{1}{5}$이므로 $100ab=100\cdot\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{1}{5}=8$

16 직선 AC의 기울기는 $\dfrac{-2-2\sqrt{2}}{2}=-1-\sqrt{2}$

직선 AC와 직선 BD는 서로 수직이므로

직선 BD의 기울기는 $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$

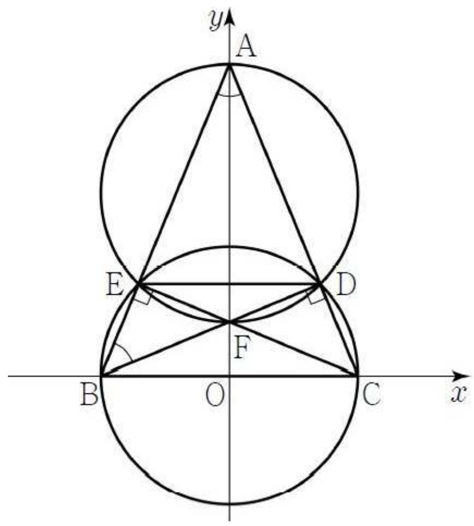
직선 BD의 방정식은 $y=(\sqrt{2}-1)(x+2)$

점 F의 좌표는 $F(0,\ -2+2\sqrt{2})$라 하자.

따라서 선분 AF의 길이는 4

사각형 $AEFD$는 지름이 AF인 원에 내접하고, 사각형 $BCDE$는 지름이 BC인 원에 내접한다. 두 원의 지름의 길이가 같으므로 호 ED에 대한 원주각의 크기가 같다.

그러므로 $\angle EAD=\angle DBE$



삼각형 ABD는 직각이등변삼각형이므로

삼각형 BFE도 직각이등변삼각형이다.

$\overline{BE} = \overline{FE}$ 이므로 $l = 2\overline{AB}$

$\overline{AB}^2 = \{0-(-2)\}^2 + \{(2+2\sqrt{2})-0\}^2 = 16+8\sqrt{2}$

$l^2 = 4\overline{AB}^2 = 64+32\sqrt{2}$

$a = 64, b = 32$

$\therefore\ a+b = 96$

17 선분 AB 의 중점을 M이라 하면

$M\left(\dfrac{0+18}{2}, \dfrac{6+0}{2}\right)$ 즉 $M(9,3)$

삼각형 ABC 가 이등변삼각형이므로 $\overline{AB} \perp \overline{CM}$

따라서 두 직선 AB, CM의 기울기의 곱은 -1이다.

이때 직선 AB 의 기울기가

$\dfrac{0-6}{18-0} = -\dfrac{1}{3}$

이므로 직선 CM의 기울기는 3이다.

직선 CM이 점 M$M(9,3)$을 지나므로 그 방정식은

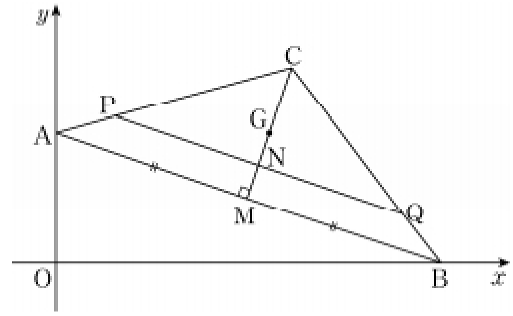
$y = 3(x-9)+3$ 즉, $y = 3x-24$

이때 점 $C(a,b)$는 직선 $y = 3x-24$ 위의 점이므로

$b = 3a-24$ ……㉠

두 선분 CM, PQ 의 교점을 N이라 하자.

점 G 는 삼각형 CPQ 의 무게중심이므로



$\overline{CG} = \dfrac{2}{3}\overline{CN}$

$\overline{MN} : \overline{NC} = \overline{AP} : \overline{PC} = 1:3$이므로

$\overline{CN} = \dfrac{3}{4}\overline{CM}$

따라서

$\overline{CG} = \dfrac{2}{3}\times\overline{CN} = \dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}\times\overline{CM} = \dfrac{1}{2}\times\overline{CM}$

$\overline{CM} = 2\overline{CG} = 2\sqrt{10}$ 이므로

$\sqrt{(a-9)^2+(b-3)^2} = 2\sqrt{10}$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$(a-9)^2+(3a-24-3)^2 = 40$

$(a-9)^2 = 4$

$a = 7$ 또는 $a = 11$

따라서 점 (a,b)는 $(7,-3)$ 또는 $(11,9)$

점 C 는 제사분면 위의 점이므로 $C(11,9)$

$a+b = 11+9 = 20$

18 점 B의 좌표를 $(\alpha,\ 0)$이라 하면

$2 = \dfrac{0+\alpha}{2}$, 즉 $\alpha = 4$

삼각형 OAB의 넓이를 이등분하기 위해서는 직선 $y = mx$는 선분 AB의 중점 $(3,\ -2)$를 지나야 하므로

$-2 = 3m$

따라서 $m = -\dfrac{2}{3}$

19 ㄴ. 직선 AP의 기울기는 $-\dfrac{1}{t}$이므로 직선 l의 기울기는 t이다. 따라서 직선 l의 방정식은

$y=t(x-t)$ ……㉠

㉠에 점 $(3,\ 2)$를 대입하여 정리하면

$t^2-3t+2=0$이므로 $t=1$ 또는 $t=2$

따라서 직선 l의 개수는 2이다. (참)

ㄷ. 주어진 부등식에 ㉠을 대입하면

$t(x-t)\le ax^2$

즉 $ax^2-tx+t^2\ge 0$ ……㉡

㉡이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a>0$이고 $ax^2-tx+t^2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=t^2-4at^2=t^2(1-4a)\le 0$

$t^2>0$이므로 $1-4a\le 0$ 즉 $a\ge\dfrac{1}{4}$

따라서 a의 최솟값은 $\dfrac{1}{4}$이다. (참)

20 삼각형 OAB의 무게중심 G의 좌표는

$\left(5, \dfrac{4+a}{3}\right)$이므로 $b=\dfrac{4+a}{3}$ ……㉠

한편, 직선 OA의 방정식은 $x-2y=0$

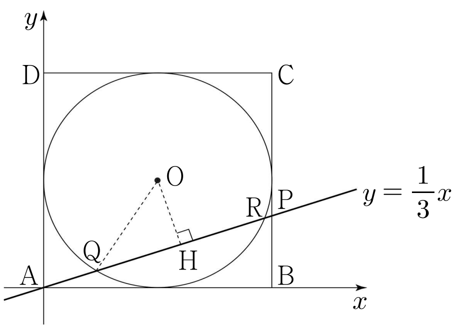
점 $G(5,\ b)$와 직선 $x-2y=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로 $\dfrac{|5-2b|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$

$b=0$ 또는 $b=5$

$a>0$이므로 ㉠에서 $b>0$이다.

따라서 $b=5,\ a=11$이므로 $a+b=16$

21



그림과 같이 직선 AB를 x축, 직선 AD를 y축으로 하는 좌표평면을 잡자.

직선 AP는 기울기가 $\dfrac{1}{3}$이고 원점을 지나므로

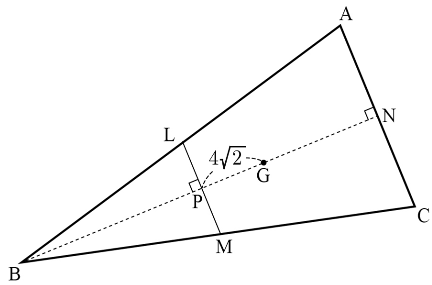
직선 AP의 방정식은 $y=\dfrac{1}{3}x$

원의 중심을 O라 하면 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 10이므로 $O(5,\ 5)$, $\overline{OQ}=5$

점 $O(5,\ 5)$서 직선 $x-3y=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{OH}=\dfrac{|5-15|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\sqrt{10}$

따라서 $\overline{QH}=\sqrt{15}$이므로 $\overline{QR}=2\sqrt{15}$

22



직선 BN과 직선 LM의 교점을 P라 할 때 직선 BN이 선분 AC의 수직이등분선이므로 점 P는 선분 LM의 중점이다. 따라서 점 P의 좌표는

$\left(\dfrac{2+4}{2},\ \dfrac{1-1}{2}\right)$, 즉 $(3,\ 0)$

$\overline{BG}=2\overline{GN}$이고 $\overline{NP}=\overline{BP}$이므로

$(\overline{NP}+4\sqrt{2}):(\overline{NP}-4\sqrt{2})=2:1$

$\overline{NP}^2=(a-3)^2+b^2=(12\sqrt{2})^2$ …… ㉠

한편, 직선 LM과 직선 NP는 서로 수직이므로

$\dfrac{b}{a-3}=1,\ b=a-3$ …… ㉡

무게중심 G가 제1사분면에 있으므로 ㉠, ㉡에서

$a=15,\ b=12$

따라서 $ab=180$

23 ㄱ. $a=0$일 때 $l : y=2$, $m : x-2$

두 직선 l과 m은 서로 수직이다. (참)

ㄴ. a에 관하여 정리하면 $a(x+1)-y+2=0$이므로 직선 l은 a의 값에 관계없이 항상 점 $(-1,\ 2)$를 지난다. (거짓)

ㄷ. $a=0$일 때, ㄱ에서 두 직선은 서로 수직 $a \neq 0$일 때, 두 직선 l, m의 기울기는 각각 a, $-\frac{4}{a}$이다.

$a=-\frac{4}{a}$를 만족하는 실수 a의 값은 존재하지 않으므로 평행이 되기 위한 a의 값은 존재하지 않는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

24 ㄱ. $t=2$이므로 $P(2,1)$

직선 PQ의 방정식은 $y=(x-2)+1 = x-1$

점 Q의 x좌표는 1. (참)

ㄴ. 직선 PQ의 방정식은 $y-\frac{t^2}{4}=\frac{t}{2}(x-t)$,

$y=\frac{t}{2}x-\frac{t^2}{4}$에서 $Q\left(\frac{t}{2},0\right)$

직선 PQ의 기울기는 $\frac{t}{2}$이고,

직선 AQ의 기울기는 $\dfrac{0-1}{\frac{t}{2}-0}=-\frac{2}{t}$

$\frac{t}{2}\times\left(-\frac{2}{t}\right)=-1$이므로

두 직선 PQ와 AQ는 서로 수직이다. (참)

ㄷ. $Q(\sqrt{3},0), P(2\sqrt{3},3)$이므로 삼각형 AQP의 넓이는 $2\sqrt{3}$이다.

점 R는 선분 QA를 $3:2$로 외분하는 점이므로 두 삼각형 RQP와 AQP의 넓이의 비는 $3:1$

그러므로 삼각형 RQP의 넓이는 $6\sqrt{3}$. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ. ㄷ