Ⅱ-1 복소수와 이차방정식 P26-30

1. ⑤	2. ④	3. ①	4. 7	5. ①
6. ③	7. ⑤	8. ③	9. ①	10. 18
11. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$	12. ④	13. ①	14. ①	15. ④
16. 13	17. ①	18. ⑤	19. ⑤	20. ③
21. ②	22. ③			

3 ㄱ. $(\alpha\beta)^2=\alpha^2\beta^2=(2i)(-2i)=4$ 이므로

$\alpha\beta=2$ 또는 $\alpha\beta=-2$

ㄴ. $(\alpha\beta)^2=4$ 에서

$\alpha\beta=2$ 또는 $\alpha\beta=-2$

이때 $\alpha^2+\beta^2=(2i)+(-2i)=0$ 이므로

$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta=2\alpha\beta$

따라서

$(\alpha+\beta)^4=(2\alpha\beta)^2=4\alpha^2\beta^2=16$

ㄷ. $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=2\alpha\beta$,

$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=-2\alpha\beta$이므로

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right)^2=\frac{(\alpha+\beta)^2}{(\alpha-\beta)^2}=\frac{2\alpha\beta}{-2\alpha\beta}=-1$$

제곱한 수가 음수이므로 $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$ 는 실수가 아니다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

4 $\alpha=(2-n-5i)^2=\{(2-n)^2-25\}-10(2-n)i$

α^2이 음의 실수가 되기 위해서는 α가 순허수이어야 한다.

$(2-n)^2-25=0$ 이므로 자연수 n의 값은 7이다.

5 $(x-1)+(y+2)i=2-5i$ 을 만족하기 위해서는

$x-1=2,\ y+2=-5$ 이어야 하므로

$x=3,\ y=-7$이다.

따라서 $xy=-21$이다.

6 ㄱ. $z=a+bi\,(b\neq 0)$에서 $z-\bar{z}=2bi$이므로 순허수이다.

ㄴ. $z\alpha$가 실수가 되는 복소수 α는 $\bar{z}$ 이외에 0도 있다.

ㄷ. $z+\frac{1}{z}=(a+bi)+\frac{1}{a+bi}$

$$=\frac{a(a^2+b^2-1)}{a^2+b^2}+\frac{b(b^2+a^2-1)}{a^2+b^2}i$$

가 실수가 되려면

$$\frac{b(a^2+b^2-1)}{a^2+b^2}=0,\ b\neq 0$$

$a^2+b^2-1=0$

$\therefore z\bar{z}=a^2+b^2=1$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

8 $z=a+bi$라 하자(a, b는 실수)

조건 (가)에 의해

$z+(1-2i)=a+bi+1-2i$
$=(a+1)+(b-2)i$

이 양의 실수 이므로

$a+1>0 \Rightarrow a>-1,\ b=2$ 이다.

조건 (나)에 의해

$z\bar{z}=(a+2i)(a-2i)=a^2+4=7$

이므로 $a=\sqrt{3}$이다.

9 $z=(i-2)x^2-3xi-4i+32$
$=(-2x^2+32)+(x^2-3x-4)i$

$\bar{z}=(-2x^2+32)-(x^2-3x-4)i$

이므로 $z+\bar{z}=-4x^2+64=0$이다.

z가 0이 아닌 복소수 이므로

$\therefore x=-4$

10 $(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$

$(2i)^2=4i^2=-4$

$(1+i)^2\times 2i=2i\times 2i=-4$

주사위를 던져 $0, 3, 5$가 적어도 한 번 나오면 -32가 나올 수 없다. 그리고 $32=2^5$이므로 주사위는 최소한 5번 이상 던져야 한다.

1) 주사위를 5번 던지는 경우

2가 3회, $2i$가 2회 나오면

$(2)^3\times(2i)^2=8\times(-4)=-32$

2) 주사위를 6번 던지는 경우
2가 3회, $1+i$가 2회, $2i$가 1회 나오면
$(2)^3 \times (1+i)^2 \times 2i = 8 \times 2i \times 2i = -32$
3) 주사위를 7번 던지는 경우
2가 3회, $1+i$가 4회 나오면
$(2)^3 \times (1+i)^4 = 8 \times (2i)^2 = -32$
1), 2), 3)에 의하여 가능한 n의 값은 $5, 6, 7$이다.
따라서 구하는 값은 $5+6+7=18$

11 z를 프로그램에 1회 입력시켜 나온 결과는
$z(1+i)$
이것을 다시 입력시켜 나온 결과는 $z(1+i)^2$
이와 같이 10회 반복하여 나온 결과는 $z(1+i)^{10}$
즉, $z(1+i)^{10} = 16+16i$ …… ㉠
한편, $(1+i)^2 = 2i$이므로
$(1+i)^{10} = (2i)^5 = 32i$
㉠에서 $z \cdot 32i = 16+16i$이므로
$z = \dfrac{16+16i}{32i} = \dfrac{1+i}{2i} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$
따라서 처음에 입력한 복소수는 $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$이다.

13 $\alpha^2 = \alpha - \dfrac{1}{2}$이므로 $\alpha^4 = \left(\alpha - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \alpha^2 - \alpha + \dfrac{1}{4}$
$\alpha^4 - \alpha^2 + \alpha = \dfrac{1}{4}$

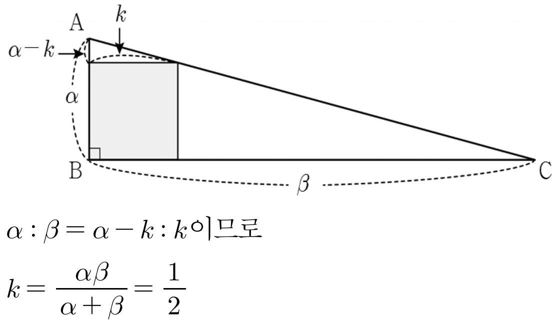
14 이차방정식 $4x^2 + 2(2k+m)x + k^2 - k + n = 0$의 판별식 D가 0이어야 하므로
$$\frac{D}{4} = (2k+m)^2 - 4(k^2 - k + n) = 0$$
$$4(m+1)k + m^2 - 4n = 0$$
위의 식이 k의 값에 관계없이 성립하므로
$$m+1=0,\ m^2-4n=0$$
$$\therefore m=-1,\ n=\frac{1}{4}$$
$$\therefore m+n=-\frac{3}{4}$$

15 이차방정식 $x^2-3x+1=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 $\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=1$이다.
$$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{3}{1} = 3$$

17 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $2-4i$이므로
나머지 한 근은 $2+4i$이다.
따라서 $(2+4i)+(2-4i) = 4 = -a$이므로
$a=-4$,
$(2+4i)(2-4i) = 4+16 = 20 = b$ 이다.
$\therefore a+b=16$ 이다.

18 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=-1$
ㄱ. $\alpha+\beta=-1$
ㄴ. $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta} = \dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta} = -3$
ㄷ. $\alpha^5+\beta^5+\alpha^4+\beta^4-\alpha^3-\beta^3$
$=\alpha^3(\alpha^2+\alpha-1)+\beta^3(\beta^2+\beta-1)$
이때 α, β는 이차방정식 $x^2+x-1=0$의 두 근이므로
$\alpha^2+\alpha-1=0$, $\beta^2+\beta-1=0$
$\alpha^5+\beta^5+\alpha^4+\beta^4-\alpha^3-\beta^3=0$
$\therefore \alpha^5+\beta^5+\alpha^4+\beta^4=\alpha^3+\beta^3$
이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

19 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=2$
직각삼각형에 내접하는 정사각형의 한 변의 길이를 k라 하면



$\alpha : \beta = \alpha - k : k$이므로
$k = \dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} = \dfrac{1}{2}$
따라서 정사각형의 넓이 $k^2 = \dfrac{1}{4}$과 둘레의 길이

$4k=2$를 두 근으로 하는 이차방정식은

$$4(x-2)\left(x-\frac{1}{4}\right)=4x^2-9x+2=0$$

따라서 $m+n=-9+2=-7$

20 $f(x)+x-1=k(x^2-x-3)\cdots\cdots$ ㉠

으로 놓자. $f(1)=-6$이므로 $x=1$을 ㉠에 대입하면

$f(1)+1-1=k(1^2-1-3)$

$-6+1-1=k(1^2-1-3)$, 즉 $k=2$

$k=2$를 ㉠에 대입하면

$f(x)+x-1=2(x^2-x-3)$

$f(x)=2x^2-3x-5$

따라서 $f(3)=4$

21 $\overline{\mathrm{AH}}=\alpha$, $\overline{\mathrm{AE}}=\beta$라 하면

$\overline{\mathrm{PG}}=10-\alpha$, $\overline{\mathrm{PF}}=10-\beta$

직사각형 PFCG 의 둘레의 길이는

$2(10-\alpha)+2(10-\beta)=28$이므로

$\alpha+\beta=6$

직사각형 PFCG의 넓이는

$(10-\alpha)(10-\beta)=46$이므로

$\alpha\beta=6$

따라서 α, β를 두 근으로 하는 이차방정식은

$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$에서

$x^2-6x+6=0$

22 $p+q=1$, $pq=-1$이므로

$p^2+q^2=(p+q)^2-2pq=3$

$p^4+q^4=(p^2+q^2)^2-2p^2q^2=7$

따라서 $r=3$, $s=7$

$a=\dfrac{p^8-q^8}{p-q}=(p^4+q^4)(p^2+q^2)(p+q)$

$=7\times3\times1=21$ 이므로 $t=21$

따라서 $r+s+t=31$