

I-2 나머지정리와 인수분해 P.14-20

- | | | | | |
|--------|--------|---------|--------|---------|
| 1. 11 | 2. ② | 3. ⑤ | 4. ① | 5. 11 |
| 6. ④ | 7. ③ | 8. 63 | 9. ④ | 10. ② |
| 11. 26 | 12. ① | 13. ④ | 14. 24 | 15. 228 |
| 16. ⑤ | 17. 15 | 18. 503 | 19. ⑤ | 20. 24 |
| 21. ③ | 22. ④ | 23. ③ | 24. ⑤ | 25. 24 |
| 26. ⑤ | 27. ⑤ | 28. ④ | | |

$$\begin{aligned}
 4 \quad f(x+a) &= (x+a)^3 + 9(x+a)^2 + 4(x+a) - 45 \\
 &= (x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3) \\
 &\quad + 9(x^2 + 2ax + a^2) + 4(x+a) - 45 \\
 &= x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 \\
 &\quad + 9x^2 + 18ax + 9a^2 + 4x + 4a - 45 \\
 &= x^3 + (3a+9)x^2 + (3a^2+18a+4)x \\
 &\quad + a^3 + 9a^2 + 4a - 45 \quad \dots\dots ㉠
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(x+a) &= x^3 + bx - 3 \text{에서 이차항의 계수가 } 0 \text{이므로} \\
 3a+9 &= 0 \\
 \therefore a &= -3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a = -3 \text{을 } ㉠ \text{의 우변에 대입하면 } x^3 - 23x - 3 \text{이므로} \\
 b = -23 \quad \therefore a+b = -26
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5 \quad ax^3 + b &= (ax+b)Q_1(x) + R_1 \quad \dots\dots ㉡ \\
 ax^4 + b &= (ax+b)Q_2(x) + R_2 \quad \dots\dots ㉢
 \end{aligned}$$

$$㉡, ㉢ \text{에 } x = -\frac{b}{a} \text{를 각각 대입하면}$$

$$R_1 = -\frac{b^3}{a^2} + b, \quad R_2 = \frac{b^4}{a^3} + b$$

$$R_1 = R_2 \text{이므로 } -\frac{b^3}{a^2} + b = \frac{b^4}{a^3} + b$$

$$ab \neq 0 \text{이므로 } b = -a$$

$$\text{따라서 } R_1 = R_2 = 0$$

$$ax^3 - a = a(x-1)(x^2+x+1) \text{이므로}$$

$$a(x-1)(x^2+x+1) = a(x-1)Q_1(x)$$

$$\text{따라서 } Q_1(x) = x^2 + x + 1$$

$$ax^4 - a = a(x-1)(x+1)(x^2+1) \text{이므로}$$

$$a(x-1)(x+1)(x^2+1) = a(x-1)Q_2(x)$$

$$\text{따라서 } Q_2(x) = (x+1)(x^2+1)$$

$$\text{그러므로 } Q_1(2) + Q_2(1) = 7 + 4 = 11$$

$$\begin{aligned}
 7 \quad &\text{다항식 } P(x) \text{를 } (x-5)(x+3) \text{으로 나누었을 때의 몫을 } Q(x), \\
 &\text{나머지를 } R(x) = ax+b(a, b \text{는 상수}) \text{라고 하면 } P(x) = (x-5)(x+3)Q(x) + ax+b
 \end{aligned}$$

$$P(5) = 10, \quad P(-3) = -6 \text{이므로}$$

$$P(5) = 5a + b = 10,$$

$$P(-3) = -3a + b = -6$$

$$\text{위의 두 식을 연립하여 풀면 } a = 2, b = 0$$

$$\text{따라서 } R(x) = 2x \text{이므로}$$

$$R(1) = 2$$

$$\begin{aligned}
 8 \quad &P(x) = (2x^2 - 5x - 3)Q(x) + 2x + 3 \text{이므로} \\
 &(x^2 - 2)P(x) \text{를 } x-3 \text{으로 나눈 나머지 } 7P(3) \text{은} \\
 &7P(3) = 7 \times 9 = 63 \text{이다.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9 \quad &f(x) = (2x-3)(x+1)Q(x) + x+7 \text{에서 } x \text{에} \\
 &3x+1 \text{을 대입하면} \\
 &f(3x+1) = (6x-1)(3x+2)Q(3x+1) + 3x+8 \\
 &= (6x-1)(3x+2)Q(3x+1) + (3x+2) + 6 \\
 &= (3x+2)\{(6x-1)Q(3x+1) + 1\} + 6 \\
 &\text{따라서 } P(x) = 3x+8, \quad r = 6 \text{이므로} \\
 &r \times P(2) = 84
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10 \quad &\text{삼차식 } f(x) \text{를 } x^2 - 3x + 2 \text{로 나누었을 때의 몫을} \\
 &Q(x), \text{나머지를 } ax+b(a, b \text{는 상수}) \text{라고 하면}
 \end{aligned}$$

$$f(x) = (x^2 - 3x + 2)Q(x) + ax + b$$

$$= (x-1)(x-2)Q(x) + ax + b \quad \dots\dots ㉣$$

$$\begin{aligned}
 \text{이때 } f(x+1) &= f(x) + x^2 \text{이므로 } x=0 \text{을 대입하면} \\
 f(1) &= f(0) + 0 = 3
 \end{aligned}$$

$$\text{또 } x=1 \text{을 대입하면}$$

$$f(2) = f(1) + 1 = 4$$

$$f(1) = 3, \quad f(2) = 4 \text{를 } ㉣ \text{에 각각 대입하면}$$

$$f(1) = a + b = 3, \quad f(2) = 2a + b = 4$$

$$\therefore a = 1, \quad b = 2$$

$$\begin{aligned}
 \text{따라서 } f(x) \text{를 } x^2 - 3x + 2 \text{로 나눈 나머지는} \\
 x + 2
 \end{aligned}$$

- 11 조건 (나)에 의해 $f(x) = (x-1)^2(ax+b) + (ax+b)$
 $f(1) = 2$ 이므로 $ax+b = a(x-1)+2$
 $f(x) = (x-1)^2\{a(x-1)+2\} + a(x-1)+2$
 $= a(x-1)^3 + 2(x-1)^2 + a(x-1)+2$
따라서 $f(x)$ 를 $(x-1)^3$ 으로 나눈 나머지는
 $R(x) = 2(x-1)^2 + a(x-1)+2$
 $R(0) = R(3)$ 이므로 $2-a+2 = 8+2a+2$
 $a = -2$
따라서 $R(x) = 2(x-1)^2 - 2(x-1)+2$ 이므로
 $R(5) = 26$
- 12 $P(a) = 0, P(b) = 0$ 이므로 a 와 b 는 $P(x)$ 의 두 근이다.
따라서 $x^2 - 4x - 6 = (x-a)(x-b) = 0$ 이므로
 $a+b = 4$ 이다.
 $P(4) = -6$
- 13 $P(a) = P(b) = P(c) = 0$ 이므로
 $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$
 $P(0) = -abc = -6$ 이므로 $abc = 6$
따라서 서로 다른 세 자연수 a, b, c 는 각각 1, 2, 3 중 하나의 값을 갖는다.
 $\therefore P(6) = (6-a)(6-b)(6-c) = 60$
- 14 $f(0) = 4$ 이고 $f(x)$ 는 $x^2 + x + 1$ 로 나누어떨어지므로
 $f(x) = (x^2 + x + 1)(ax + 4) \dots\dots\textcircled{A}$
 $f(x) + 12$ 는 $x^2 + 2$ 로 나누어떨어지므로
 $f(x) + 12 = (x^2 + 2)(ax + 8) \dots\dots\textcircled{B}$
 $\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 에서
 $(x^2 + x + 1)(ax + 4) = (x^2 + 2)(ax + 8) - 12$
 $ax^3 + (a+4)x^2 + (a+4)x + 4$
 $= ax^3 + 8x^2 + 2ax + 4$
이차항의 계수를 비교하면 $a = 4$
따라서 $f(x) = (x^2 + x + 1)(4x + 4)$ 이므로
 $f(1) = 24$

- 15 $A = 15$ 로 놓으면
 $3587 = 15^3 + 15^2 - 15 + 2 = A^3 + A^2 - A + 2$
 $= (A+2)(A^2 - A + 1)$
 $= (15+2)(15^2 - 15 + 1) = 17 \cdot 211$
 $\therefore a+b = 228$
- 17 각 꼭짓점에 적힌 숫자를 a, b, c, d, e, f 라고 하면
면에 적힌 수는 각각 $abe, ade, acd, abc, bef, def, cdf, bcf$ 이다.
 $abe + ade + acd + abc + bef + def + cdf + bcf$
 $= (b+d)(a+f)(c+e) = 105$
이때 $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ 이므로
 $a+b+c+d+e+f = 3+5+7 = 15$
- 19 다항식 $f(x) = x^2 + ax + b$ 가 $x-m$ 과 $x-n$ 으로 나누어떨어지므로
 $f(x) = (x-m)(x-n) = x^2 - (m+n)x + mn$
 $f(x) = x^2 + ax + b$ 와 계수를 비교하면
 $a = -(m+n), b = mn$
 $g(x) = x^2 + (m+n-mn)x - m^2n - mn^2$
 $= x^2 + (m+n-mn)x - mn(m+n)$
 $= x^2 + (-a-b)x + ab = (x-a)(x-b)$
 $\neg. f(m) = f(n) = 0$
 $\neg. g(x) = (x-a)(x-b)$ 이므로 $g(x)$ 를 $x-a$ 로 나눈 몫은 $x-b$ 이고 나머지는 0이다.
 $\sqsubset. 2m+n=0$ 에서 $n=-2m$ 이므로
 $f(x) = (x-m)(x-2m)$
 $g(x) = (x-m)(x+2m^2)$
즉 $x-m$ 은 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 공약수이다.
따라서 $2m+n=0$ 이면 $f(x)$ 와 $g(x)$ 에 일차식 이상의 공약수가 존재한다.
이상에서 \neg, \neg, \sqsubset 모두 옳다.

20 $Q(x) = -2P(x)$ 이므로

$$P(x)Q(x) = -2\{P(x)\}^2 \text{ 이다.}$$

(나)에 의해 $-2\{P(x)\}^2$ 을 $x^2 - 3x + 2$ 로 나누었을 때의 몫을 $A(x)$ 라 하면

$$-2\{P(x)\}^2 = (x^2 - 3x + 2)A(x) \text{ 이고}$$

$$\{P(x)\}^2 = (x-1)(x-2)\left\{-\frac{1}{2}A(x)\right\} \text{ 이다.}$$

$P(x)$ 는 이차다항식이고

$$\{P(x)\}^2 \text{이 } x-1 \text{과 } x-2 \text{를 인수로 가진다.}$$

$$\text{그러므로 } P(x) = a(x-1)(x-2)$$

$Q(x) = -2a(x-1)(x-2)$ ($a \neq 0$ 인 실수)라 하자.

$$P(0) = 2a = -4 \text{에서 } a = -2 \text{이므로}$$

$$P(x) = -2(x-1)(x-2),$$

$$Q(x) = 4(x-1)(x-2) \text{ 이다.}$$

따라서 $Q(4) = 4 \times 3 \times 2 = 24$ 이다.

21 $f(x) - g(x) = 0$ 은 이차방정식이고 조건 (가)에 의해 $f(x) - g(x) = a(x-1)^2$ (a 는 상수)㉠

조건 (나)에 의해 $f(2) = 2, g(2) = 5$

㉠에 $x = 2$ 를 대입하면

$$f(2) - g(2) = a, \text{ 즉, } a = -3$$

$$f(x) - g(x) = -3(x-1)^2$$

$$\text{나머지 정리에 의해 } f(-1) - g(-1) = -12$$

따라서 -12

22 $\{f(x+1)\}^2 = (x-1)(x+1)(x^2+5) + 9$ 에서

$$\{f(x)\}^2 = x(x-2)(x^2-2x+6) + 9$$

$$= (x^2-2x)(x^2-2x+6) + 9 = (x^2-2x+3)^2$$

$$f(x) < 0 \text{이므로 } f(x) = -x^2 + 2x - 3$$

$f(x+a) = -(x+a)^2 + 2(x+a) - 3$ 에 대하여

$f(x+a) = g(x)$ 라 하면 $g(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 나머지가 -6 이 되기 위해서는

$$g(2) = -(2+a)^2 + 2(2+a) - 3 = -6$$

따라서 $a^2 + 2a - 3 = 0$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 모든 상수 a 의 값의 곱은 -3

$$23 \quad f(x) = (x-a)(x-b)Q(x) + R(x) \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

㉠. ㉠은 x 에 대한 항등식이므로 $x = a$ 를 대입하면

$$f(a) = R(a) \text{이므로 } f(a) - R(a) = 0 \text{ (참).}$$

㉡. (반례) $f(x) = (x-a)(x-b) + x$ 라 하면

$$R(x) = x \text{이고 } f(a) - R(b) = a - b,$$

$$f(b) - R(a) = b - a$$

이 때, $a \neq b$ 이므로

$$f(a) - R(b) \neq f(b) - R(a) \quad (\text{거짓}).$$

㉢. $R(x) = px + q$ 라 하면

$$f(a) = pa + q, f(b) = pb + q$$

$$af(b) - bf(a) = abp + aq + abp - ba = (a-b)q$$

$$R(0) = q \text{이므로 } af(b) - bf(a) = (a-b)R(0) \text{ (참).}$$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉢

$$24 \quad \{P(x)\}^3 + \{Q(x)\}^3 = 12x^4 + 24x^3 + 12x^2 + 16 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \{P(x) + Q(x)\}^3 - 3P(x)Q(x)\{P(x) + Q(x)\} \\ = 12x^4 + 24x^3 + 12x^2 + 16 \end{aligned}$$

$$P(x) + Q(x) = 4 \text{이므로}$$

$$64 - 3P(x)Q(x)\{P(x) + Q(x)\} = 12x^4 + 24x^3 + 12x^2 + 16$$

$$-12P(x)Q(x) = 12x^4 + 24x^3 + 12x^2 - 48$$

$$-P(x)Q(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 4$$

$$= (x-1)(x+2)(x^2+x+2)$$

$$= (x^2+x-2)(x^2+x+2)$$

$P(x) + Q(x) = 4$ 이고 $P(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수

이므로 조건 (가), (나)를 만족시키는 두 이차다항식

$$P(x), Q(x) \text{는 } P(x) = -x^2 - x + 2,$$

$$Q(x) = x^2 + x + 2 \text{이다.}$$

따라서 $P(2) + Q(3) = 10$ 이다.

25 $\sqrt{3} = x$ 라고 하면

A 색종이 한 장의 넓이는 x^2

B 색종이 한 장의 넓이는 $2x$

C 색종이 한 장의 넓이는 1

A 색종이 5장, B 색종이 11장, C 색종이 8장을 겹치지 않게 빈틈없이 이어 붙여서 만든 직사각형의 넓이는 $5x^2 + 22x + 8$ 이다.

이 식을 자연수 계수를 갖는 두 일차식의 곱으로 표현

$$\text{하면 } 5x^2 + 22x + 8 = (5x + 2)(x + 4)$$

즉, 직사각형의 두 변의 길이는 $5x + 2, x + 4$

로 나타낼 수 있다.

구하는 직사각형의 둘레의 길이는

$$2(5x + 2) + 2(x + 4) = 10x + 4 + 2x + 8$$

$$= 12x + 12 = 12 + 12\sqrt{3}$$

따라서 $a = 12, b = 12$ 이고 $a + b = 24$

26 입체도형 P, Q, R, S, T 의 부피가 각각 p, q, r, s, t

$$\text{이므로 } p = a^3, q = b^3, r = a^2, s = b^2, t = ab(a - b)$$

$$p = q + r + s + t \text{ 이므로}$$

$$a^3 = b^3 + a^2 + b^2 + ab(a - b)$$

$$a^3 - b^3 - a^2 - b^2 - ab(a - b) = 0$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) - (a^2 + b^2) - ab(a - b) = 0$$

$$(a - b)(a^2 + b^2) - (a^2 + b^2) = 0$$

$$(a - b - 1)(a^2 + b^2) = 0$$

$$a^2 + b^2 \neq 0 \text{ 이므로 } a - b - 1 = 0$$

$$\text{따라서 } a - b = 1$$

27 (가), (나)에 의하여

$$4x(x + 1)f(x) = x^3 + ax^2 + 2x + b \text{ 이다.}$$

$$1) \text{ 양변에 } x = 0 \text{ 을 대입하면 } b = 0$$

$$2) \text{ 양변에 } x = -1 \text{ 을 대입하면 } a = 3$$

$$\text{따라서 } 4x(x + 1)f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x = x(x + 1)(x + 2)$$

$$\text{양변에 } x = 4 \text{ 를 대입하면}$$

$$80f(4) = 120 \text{ 이므로}$$

$$f(4) = \frac{3}{2} \text{ 이고, } g(4) = 16f(4) = 24 \text{ 이다.}$$

28 (가)에 의하여 $f(x)$ 를 $x + 2, x^2 + 4$ 로 나누었을 때의 몫을 각각 $Q_1(x), Q_2(x)$ 라고 하면 나머지가 $3p^2$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= (x + 2)Q_1(x) + 3p^2 \\ &= (x^2 + 4)Q_2(x) + 3p^2 \end{aligned}$$

사차항의 계수가 1인 $f(x)$ 에서는 $Q_1(x)$ 는 $x^2 + 4$ 를 인수로 갖고, $Q_2(x)$ 는 $x + 2$ 를 인수로 가져야 하므로

$Q_1(x)$ 와 $Q_2(x)$ 의 공통인수를 $x + a$ 라 하면

$$f(x) = (x + 2)(x^2 + 4)(x + a) + 3p^2 \text{ 이다.}$$

(나)에 의하여 $f(1) = f(-1)$ 이므로 $a = -2$ 이고

$$f(x) = x^4 - 16 + 3p^2 \text{ 이다.}$$

(다)에 의하여 $f(\sqrt{p}) = 0$ 이므로

$$p^2 + 3p^2 - 16 = 0, p^2 = 4 \text{ 이다.}$$

따라서 p 는 양수이므로 $p = 2$ 이다.