V-2 유리·무리함수 P. 41-45

16-B 1. (1) $\frac{2x+1}{x(x+3)}$ (2) $\frac{2}{x^2}$

2. (1) $\frac{x+2}{x+1}$ (2) $\frac{x^2-4x-19}{(x+2)(x+5)(x-5)}$

3. (1) $\frac{3x-4}{(x-1)(2x-1)}$ (2) $\frac{(3x+4)(x-1)^2}{(x+1)(x-2)}$

17-A 1. 다항함수: (2), (4)

다항함수가 아닌 유리함수: (1), (3)

2. (1) $\{x \mid x \neq 1$인 실수$\}$ (2) $\{x \mid x \neq 3$인 실수$\}$

3. (1) $f(x) \neq g(x)$ (2) $f(x) = g(x)$

17-B 1. (1) 생략 (2) 생략 2. $a=2,\ b=5$

3. 0

18-A 1. (1) $x=2,\ y=4$ (2) $x=1,\ y=4$

2. $\frac{11}{4}$ 3. $a=1, b=4, c=1$

18-B 1. (1) $-5 \leq x < 3$ (2) $x \geq 4$

2. (1) 3 (2) $\frac{4}{8-x}$

3. (1) $\frac{(x-1)(\sqrt{x+1}-1)}{x}$

(2) $-2x+1-2\sqrt{x(x-1)}$

19-A 1. (1), (2)

2. (1) $\left\{x \mid x \geq \frac{2}{3}\right\}$ (2) $\{x \mid x \geq -1\}$

3. (1) 같지 않다. (2) 같지 않다.

19-B 1. (1) 생략 (2) 생략

2. (1) 정의역 : $\{x \mid x \geq 0\}$, 치역 : $\{y \mid y \geq 0\}$

(2) 정의역 : $\{x \mid x \leq 0\}$, 치역 : $\{y \mid y \leq 0\}$

3. (1) $y=-\sqrt{-4x}$ (2) $y=\sqrt{4x}$ (3) $y=-\sqrt{4x}$

20-A 1. $-\frac{5}{3}$ 2. $a=8, b=-3$ 3. 20

V-2 유리·무리함수 P. 45-51

1. ①	2. ②	3. ②	4. ③	5. ①
6. 16	7. ③	8. ③	9. ①	10. 36
11. ④	12. ①	13. 36	14. 11	15. ③
16. ④	17. ②	18. 48	19. ⑤	20. ④
21. ⑤	22. ①	23. 16	24. 20	25. ①

2 $y=\frac{bx-5}{x+a}=\frac{b(x+a)-(ab+5)}{x+a}$

$=\frac{-ab-5}{x+a}+b$

의 점근선의 방정식은 $x=-a,\ y=b$

따라서 $a=1,\ b=2$이므로 $a+b=3$

3 $y=\frac{3x-14}{x-5}=\frac{3(x-5)+1}{x-5}=\frac{1}{x-5}+3$

$y=\frac{3x-14}{x-5}$의 그래프는 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

$y=\frac{1}{x}$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$y=\frac{3x-14}{x-5}$의 그래프는

$y=(x-5)+3=x-2$에 대하여 대칭이다.

따라서 $k=-2$

4 갑의 속력을 v라 하면 을의 속력은 pv이다. 을이 갑을 따라 잡을 때까지 갑이 달린 거리를 l이라 하면

$\frac{l}{v}=\frac{l+q}{pv}$이므로 $l=\frac{q}{p-1}$

따라서 을이 갑을 따라 잡을 때까지 을이 달린 거리는

$$l+q=\frac{q}{p-1}+q=\frac{pq}{p-1}$$

5 $y=\dfrac{-3x+7}{x-2}$, 즉 $y=\dfrac{1}{x-2}-3$은 $y=x$와 $y=-x$에 대하여 대칭인 유리함수 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다. 따라서 유리함수 $y=\dfrac{-3x+7}{x-2}$의 그래프는 두 직선 $y=x$와 $y=-x$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 직선, 즉 $y=x-5$와 $y=-x-1$에 대하여 대칭이다.

$\therefore\ a+b+c+d=-6$

6 $\mathrm{Q}\left(a,\ \dfrac{8}{a}+3\right)$이라고 하면

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{a^2+\left(\frac{8}{a}\right)^2}$$

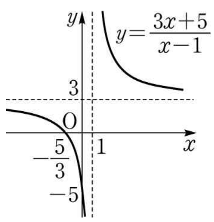
이때 $a^2+\left(\dfrac{8}{a}\right)^2\ge 2\sqrt{a^2\cdot\left(\dfrac{8}{a}\right)^2}=16$

(단, 등호는 $a=\pm2\sqrt{2}$ 일 때 성립)

이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}\ge\sqrt{16}=4$

따라서 $m=4$ 이므로 $m^2=16$

7 유리함수 $y=\dfrac{3x+5}{x-1}=\dfrac{8}{x-1}+3$의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. 점근선의 방정식은 $x=1$, $y=3$이다.

ㄴ. 그래프는 제3사분면을 지난다.

ㄷ. 그래프는 점근선의 교점 $(1,3)$을 지나고 기울기가 1 또는 -1인 직선에 대하여 대칭이다. 즉 $y-3=\pm1(x-1)$

$\therefore y=x+2$ 또는 $y=-x+4$

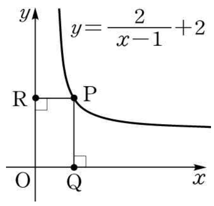
따라서 그래프는 직선 $y=x+3$에 대하여 대칭이 아니다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

8 $y=\dfrac{-2x+6}{x-2}=\dfrac{2}{x-2}-2$이므로 함수 $y=\dfrac{-2x+6}{x-2}$의 그래프는 $y=\dfrac{2}{x+3}+1$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $m=5$, $n=-3$ 이므로 $m+n=2$

9 $x>0$에서 정의된 함수 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 함수 $y=\dfrac{2}{x-1}+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{2}{t-1}+2\right)$ $(t>1)$라고 하면 직사각형 ROQP의 넓이 S는 $S=t\left(\dfrac{2}{t-1}+2\right)$

이때 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}S&=(t-1+1)\left(\frac{2}{t-1}+2\right)\\&=4+2(t-1)+\frac{2}{t-1}\\&\ge 4+2\sqrt{2(t-1)\left(\frac{2}{t-1}\right)}=8\end{aligned}$$

(단, 등호는 $t=2$일 때 성립)

따라서 직사각형 ROQP의 넓이의 최솟값은 8이다.

10 도형 $xy-2x-2y=k$와 직선 $x+y=8$의 교점 P, Q의 x좌표를 각각 α, β 라고 하자.

$y=8-x$를 $xy-2x-2y=k$에 대입하여 정리하면

$x^2-8x+(k+16)=0$ ······㉠

이 방정식의 두 근이 α, β 이므로

$\alpha\beta=k+16=14$ $\therefore\ k=-2$

$k=-2$ 를 ㉠에 대입하여 풀면 $x=4\pm\sqrt{2}$

$\therefore \mathrm{P}\,(4-\sqrt{2},\ 4+\sqrt{2})$,

$\mathrm{Q}\,(4+\sqrt{2},\ 4-\sqrt{2})$

$$\begin{aligned}\therefore\ \overline{\mathrm{OP}}\times\overline{\mathrm{OQ}}&=\overline{\mathrm{OP}}^{\,2}\\&=(4-\sqrt{2})^2+(4+\sqrt{2})^2\\&=36\end{aligned}$$

13 $a-1-b=2\sqrt{b}$에서 a, b가 자연수이므로 $a-1-b$는 정수이다. 따라서 $\sqrt{b}$도 정수이어야 하므로 b는 제곱수이다. 50 이하의 제곱수는

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49

(i) $b=49$일 때

$a-1-49=2\sqrt{49}=14$에서 $\quad a=64$

그런데 a가 50 이하인 자연수이어야 하므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $b=36$일 때

$a-1-36=2\sqrt{36}=12$에서 $\quad a=49$

(i), (ii)에서 b의 최댓값은 36이다.

15 (i) $k \le 0$일 때, 두 그래프는 항상 한 점에서 만난다.

(ii) $k>0$ 일 때, $\quad \sqrt{2kx}=x+1-k$

$$x^2+2(1-2k)x+(1-k)^2=0$$

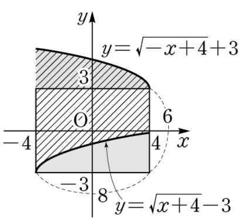
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$$\frac{D}{4}=(1-2k)^2-(1-k)^2<0$$

$$\therefore 0<k<\frac{2}{3}$$

(i), (ii)에서 실수 k의 범위는 $0<k<\dfrac{2}{3}$이다.

18 $y=\sqrt{x+4}-3$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

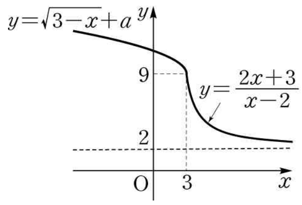


또 $y=\sqrt{-x+4}+3$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 다음 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

위의 그림에서 두 어두운 부분의 넓이가 같으므로 구하는 도형(빗금친 부분)의 넓이는 굵은 선으로 표시된 직사각형의 넓이와 같다.

따라서 구하는 넓이는 $\quad 6\times 8=48$

19 조건 (가)에서 치역이 $\{y\,|\,y>2\}$이고, 조건 (나)에서 함수 f는 일대일함수이므로 주어진 함수의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f(3)=9$이므로 $\quad a=9$

$f(2)=\sqrt{3-2}+9=10$이므로

$f(2)f(k)=10f(k)=40 \qquad \therefore f(k)=4$

따라서 $f(k)=\dfrac{2k+3}{k-2}=4$에서 $\quad k=\dfrac{11}{2}$

20 A의 실지수는 $\dfrac{2a}{2a(2+a)}=\dfrac{1}{2+a}$

B의 실지수는 $\dfrac{8a}{a(4+2a)}=\dfrac{4}{2+a}=4\times\dfrac{1}{2+a}$

따라서 B의 실지수가 A의 실지수의 4배이므로 4.

21 $f(x)=\dfrac{2x+b}{x-a}=\dfrac{2(x-a)+2a+b}{x-a}=\dfrac{2a+b}{x-a}+2$

에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점은 점 $(a,\ 2)$이다.

이때, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점은 점 $(a,\ 2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이므로 그 좌표는 $(2,\ a)$와 같다.

(가)에서 함수 $y=f(x-4)-4$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 그래프와 일치하므로 함수 $y=f(x-4)-4$의 그래프의 두 점근선의 교점은 점 $(a+4,\ -2)$이다.

점 $(2,\ a)$와 점 $(a+4,\ -2)$가 같으므로 $\quad a=-2$

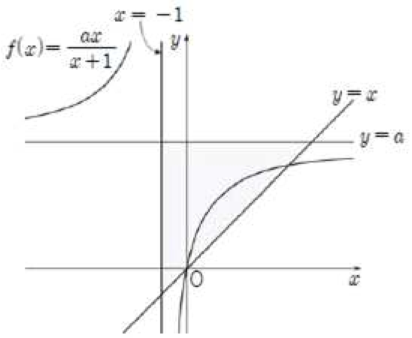
함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{2a+b}{x}$의 그래프를 평행이동한 그래프와 일치하므로 (나)에서

$2a+b=3,\quad b=7$

따라서 $a+b=5$

22 $f(x) = \frac{ax}{x+1} = -\frac{a}{x+1} + a$

이므로 점근선의 방정식은 $x = -1$, $y = a$



두 직선 $x = -1$, $y = a$와 직선 $y = x$로 둘러싸인 부분의 넓이가 18이므로

$\frac{1}{2}(a+1)^2 = 18$

따라서 $a = 5$

23 $A(a,\ \sqrt{a})$, $B(a,\ \sqrt{3a})$

점 C의 y좌표는 점 B의 y좌표와 같으므로

$\sqrt{x} = \sqrt{3a}$, $x = 3a$

따라서 $C(3a,\ \sqrt{3a})$, $D(3a,\ 3\sqrt{a})$

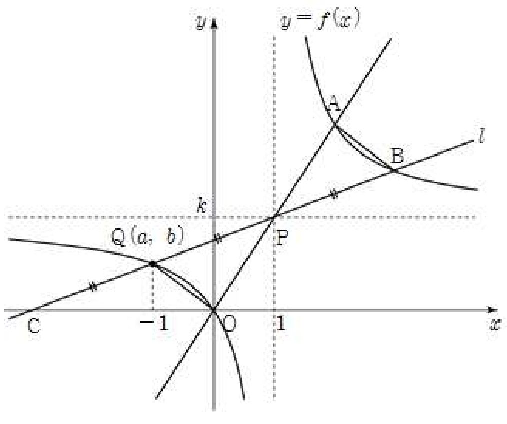
두 점 A, D를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{3\sqrt{a} - \sqrt{a}}{3a - a} = \frac{\sqrt{a}}{a} = \frac{1}{\sqrt{a}}$

$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{4}$이므로 $\sqrt{a} = 4$

따라서 $a = 16$

24



직선 l과 함수 $y = f(x)$의 그래프가 만나는 점 중 B가 아닌 점을 $Q(a,\ b)$라 하자.

삼각형 APB와 삼각형 OPQ는 합동이고,

$S_2 = 2S_1$이므로

$\overline{PB} = \overline{QP} = \overline{CQ}$ ……㉠

$P(1,\ k)$이므로 $b = \frac{k}{2} = f(a)$

$\frac{k}{2} = \frac{k}{a-1} + k$이므로 $a = -1$

$$Q\left(-1,\ \frac{k}{2}\right)$$

또한 ㉠에 의하여 $C(-3,\ 0)$

직선 l의 방정식은 $kx - 4y + 3k = 0$이고 원점과 직선 l 사이의 거리가 1이므로

$$\frac{|3k|}{\sqrt{k^2+16}} = 1,\ k^2 = 2$$

따라서 $10k^2 = 20$

25 삼각형 AFD와 삼각형 EFC는 닮음이므로

$\overline{AD} : \overline{EC} = \overline{DF} : \overline{CF}$

$3 : x = \{f(x) + 2\} : f(x)$

$f(x) = \frac{-6}{x-3} - 2\ (0 \le x \le 2)$

따라서 함수 $y = f(x)$의 그래프의 모양은