Ⅱ-2 이차방정식과 함수 P.33- 40

1. 15	2. ⑤	3. 36	4. 60	5. 7
6. ③	7. ③	8. 24	9. ⑤	10. ④
11. 50	12. ⑤	13. 12	14. ①	15. 20
16. ④	17. ⑤	18. 27	19. 11	20. 39
21. ⑤	22. 13			

1 $f(x)$가 x축과 서로 다른 두 점 $(\alpha, 0), (\beta, 0)$에서 만나므로 $f(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)$라 하자.
$f(2x-5) = a(2x-5-\alpha)(2x-5-\beta)$
의 실근은 $x = \dfrac{\alpha+5}{2}$ 또는 $x = \dfrac{\beta+5}{2}$ 이다.
따라서 모든 실근의 합은 $\dfrac{\alpha+\beta+10}{2} = \dfrac{30}{2} = 15$.

2 이차함수 $y=-x^2+ax+b$의 그래프와 이차함수 $y=x^2-3x+1$의 그래프의 교점의 x좌표는 이차방정식
$-x^2+ax+b=x^2-3x+1$
즉 $2x^2-(3+a)x+1-b=0$
의 두 실근이다. a, b는 유리수이므로 한 근이 $1-\sqrt{2}$이면 나머지 한 근은 $1+\sqrt{2}$이다.
$2x^2-(3+a)x+1-b=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=\dfrac{3+a}{2}=2$, $\alpha\beta=\dfrac{1-b}{2}=-1$
따라서 $a=1$, $b=3$이므로 $a+3b=10$

3 두 이차함수 $y=\dfrac{1}{3}x^2$, $y=x^2$에 $x=a$를 대입하면
$\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{1}{3}a^2\right)$, $\mathrm{Q}(a,\ a^2)$
$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}=a^2-\dfrac{1}{3}a^2=\dfrac{2}{3}a^2$
두 이차함수의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로
$\mathrm{S}\left(-a,\ \dfrac{1}{3}a^2\right)$
$\therefore \overline{\mathrm{PS}}=2a$
이때 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PS}}$이므로
$\dfrac{2}{3}a^2=2a$, $a^2-3a=0$
$\therefore a=3$ 또는 $a=0$
$a>0$이므로
$a=3$
따라서 사각형 PQRS는 한 변의 길이가 $2a=6$인 정사각형이므로 넓이는 $6^2=36$이다.

4 $f(x)=-x^2+px-q=-\left(x-\dfrac{p}{2}\right)^2+\dfrac{p^2}{4}-q$
(가)에 의하여 함수 $f(x)$의 그래프가 x축에 접하므로 $\dfrac{p^2}{4}-q=0$이다.
따라서 $q=\dfrac{p^2}{4}$, $f(x)=-\left(x-\dfrac{p}{2}\right)^2$
$f(x)$의 꼭짓점의 x좌표가 $\dfrac{p}{2}$이므로 (나)에 의하여 $-p\le x\le p$에서 $f(x)$의 최솟값은 $f(-p)$이다.
$f(-p)=-\dfrac{9p^2}{4}=-54$이고 $p^2=24$이다.
$q=\dfrac{p^2}{4}$이므로 $q=6$이고, 따라서 $p^2+q^2=60$이다.

5 $x^2+ax+3=2x+b$
즉, $x^2+(a-2)x+3-b=0$의 두 실근이 -2와 1 이므로 근과 계수의 관계를 이용하면
$-2+1=-1=-a+2 \Rightarrow a=3$
$-2\times 1=-2=3-b \Rightarrow b=5$ 이다.
$\therefore 2b-a=10-3=7$.

6 ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $f(3-x)=f(3+x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이다.
ㄴ. $f(x)=a(x-3)^2+b$라고 하면 $y=f(x)$가 두 점 $(-1,\ 2)$, $(4,\ 17)$을 지나므로
$16a+b=2$ ……㉠
$a+b=17$ ……㉡

ㄷ. $g(x)=f(x+3)=-x^2+18$이므로

$g(-x)=-x^2+18=g(x)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

7 1) $p=-1$ 일 때, $f(x)=-x^2+4x$이므로 $0 \le x \le 2$에서 최솟값은 0이다. $g(-1)=0$

2) $p=\frac{1}{2}$일 때, $f(x)=x^2-2x$이므로 $0 \le x \le 2$에서 최솟값은 -1이다. $g\left(\frac{1}{2}\right)=-1$

따라서 $g(-1)+g\left(\frac{1}{2}\right)=-1$

9 조건 (가)에서 방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $2x^2-6ax-b=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=3a, \alpha\beta=-\frac{b}{2}$이다. $\cdots$ ㉠

조건 (나)에 의해 $\beta-\alpha=2$이므로 $\beta=\alpha+2$라 하자.

㉠에 대입하면

$2\alpha+2=3a, \alpha(\alpha+2)=-\frac{b}{2}$이므로 $\alpha=\frac{3a}{2}-1$

$\rightarrow \left(\frac{3a}{2}-1\right)\left(\frac{3a}{2}+1\right)=\frac{9a^2}{4}-1=-\frac{b}{2}$

$\Rightarrow 9a^2+2b=4$ $\cdots$ ㉡

ㄱ. $a=1$을 ㉡에 대입하면 $9+2b=4$이므로

$b=-\frac{5}{2}$이다, (참)

ㄴ. $f(x)=(x-a)^2-a^2$이므로

$f(x)$의 최솟값은 $f(a)=-a^2$이다.

$g(x)=-(x-2a)^2+4a^2+b$이므로

$g(x)$의 최댓값은 $g(2a)=4a^2+b$이다.

따라서 $f(x) \ge -a^2=f(a)$ 이고

$g(x) \le 4a^2+b=g(2a)$이다.

$-f(\alpha) \le -f(a), g(\beta) \le g(2a)$이다.

그러므로

$f(\beta)-g(\alpha)=g(\beta)-f(\alpha) \le g(2a)-f(a)$다.(참)

ㄷ. $g(\beta)=f(\alpha)+5a^2+b$

$\Rightarrow g(\beta)-f(\alpha)=f(\beta)-g(\alpha)$
$\le g(2a)-f(a)=5a^2+b$

이므로 $\beta=2a$이고 $\alpha=a$이다.

(나)에서 $\beta=\alpha+2$이므로 $2a=a+2$

즉 $a=2$이다.

ㄱ에서 $\alpha\beta=-\frac{b}{2}$이므로 $b=-4a^2$이다.

따라서 $b=-16$이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

10 점 $P(a, b)$는 직선 $y=-\frac{1}{4}x+1$ 위의 점이므로

$b=-\frac{1}{4}a+1$

$b=-\frac{1}{4}a+1$을 a^2+8b에 대입하면

$a^2+8=a^2+8\left(-\frac{1}{4}a+1\right)$

$=a^2-2a+8=(a-1)^2+7$

이때 $A(0, 1)$, $B(4, 0)$이므로 $0 \le a \le 4$

따라서 $a=1$일 때, a^2+8b의 최솟값은 7이다.

11 ㈎에서 이차방정식 $f(x)=4ax-10$의 두 실근은 1, 5이다. $f(x)$의 이차항의 계수가 a이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$f(x)-4ax+10=a(x^2-6x+5)$ 로 놓을 수 있다.

따라서 $f(x)=ax^2-6ax+5a+4ax-10$

$=ax^2-2ax+5a-10 = a(x-1)^2+4a-10$

한편, $a>0$이고 $1 \le x \le 5$에서 $f(x)$의 최솟값이 -8이므로 $f(1)=-8$이다.

$f(1)=4a-10=-8$에서 $a=\frac{1}{2}$

따라서 $100a=50$

12 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=b-a=t$, $\alpha\beta=b-a=t$

$|\alpha-\beta|^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=t^2-\boxed{4t}$

$|\alpha-\beta|=\sqrt{5}$이므로 $t^2-4t-5=0$

$(t-5)(t+1)=0$, 즉 $t=5$ 또는 $t=-1$

$t>0$이므로 $t=\boxed{5}$

$f(-1)=1-a+b=1+t=\boxed{6}$

$\therefore h(t)=4t,\ p=5,\ q=6$

따라서 $\quad p+q+h(1)=5+6+4=15$

13 $\overline{\mathrm{BQ}}=a$라 하면 $\triangle\mathrm{PBQ}$는 직각이등변삼각형이므로 $\overline{\mathrm{BP}}=\sqrt{2}a$이다.

$\triangle\mathrm{APR}$는 $\overline{\mathrm{PA}}=6-\sqrt{2}a$인 직각이등변삼각형이므로

$\overline{\mathrm{PR}}=\sqrt{2}(6-\sqrt{2}a)$

$\overline{\mathrm{CQ}}=\overline{\mathrm{BC}}-\overline{\mathrm{BQ}}=6\sqrt{2}-a$

이때 $\square\mathrm{PQCR}=\dfrac{1}{2}\times(6\sqrt{2}-2a+6\sqrt{2}-a)\times a$

$=6\sqrt{2}a-\dfrac{3}{2}a^2 \ = -\dfrac{3}{2}(a-2\sqrt{2})^2+12$

이므로 $\overline{\mathrm{BQ}}=2\sqrt{2}$일 때, $\square\mathrm{PQCR}$의 넓이의 최댓값은 12이다.

14 이차방정식 $h(x)=0$의 두 근이 2와 6이므로

$h(x)=k(x-2)(x-6)$

으로 놓을 수 있다. 이때 $g(x)$는 일차함수이고 $f(x)$는 이차항의 계수가 -1인 이차함수이므로 함수 $h(x)$는 이차함수이고 이차항의 계수는 -1이다. 즉

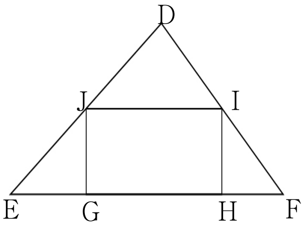
$h(x)=-(x-2)(x-6)=-x^2+8x-12$

$=-(x-4)^2+4$

이므로 함수 $h(x)$는 $x=4$에서 최댓값 4를 갖는다.

따라서 $p=4,\ q=4$이므로 $\quad p+q=8$

15 두 변 JG, JI의 길이를 각각 $x\,\mathrm{m}$, $y\,\mathrm{m}$라 할 때, 삼각형 DJI와 삼각형 DEF는 닮음이므로



$(4-x):4=y:6$

$4y=6(4-x)$, 즉

$y=6-\dfrac{3}{2}x$

오벨리스크의 부피는

$\dfrac{1}{3}\times 10xy=20x-5x^2$

$=-5(x-2)^2+20 \ (0<x<4)$

$x=2$일 때 최대 부피는 $20\,\mathrm{m}^3$이므로

$V=20$

16 $x^2-2ax+5a=x$에서

$x^2-(2a+1)x+5a=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2a+1)^2-20a=4a^2-16a+1=0$

근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 a의 값의 합은 4이다.

17 $y=x^2-2ax+5a=(x-a)^2-a^2+5a$이므로

$\mathrm{A}(a,\ -a^2+5a)$

$0<a<5$이므로 $\overline{\mathrm{OB}}=a,\ \overline{\mathrm{AB}}=-a^2+5a$

$\overline{\mathrm{OB}}+\overline{\mathrm{AB}}=g(a)$라 하면

$g(a)=-a^2+6a=-(a-3)^2+9$

따라서 $0<a<5$에서 $\overline{\mathrm{OB}}+\overline{\mathrm{AB}}$ 최댓값은 9이다.

18 $y=2x(x-a)=2\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{2}$이므로

점 $A\left(\dfrac{a}{2},-\dfrac{a^2}{2}\right)$, 점 $B(a,0)$

함수 $f(x)=-(x-a)(x-a-3)$이고

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 A를 지나므로

$$-\frac{a^2}{2}=-\left(-\frac{a}{2}\right)\left(-\frac{a}{2}-3\right)$$

$a^2-6a=0$, a는 양수이므로 $a=6$

따라서 삼각형 ACB의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times 3\times 18=27$

19 $f(0)=f(4)$이므로 이차함수 $f(x)$의 대칭축은 $x=2$이다.

$f(x)=a(x-2)^2+b$, (a, b는 상수, $a\neq 0$) 이라 하자.

이차함수 $f(x)$의 대칭축이 $x=2$이므로

$f(-1)\neq f(4)$ 이다.

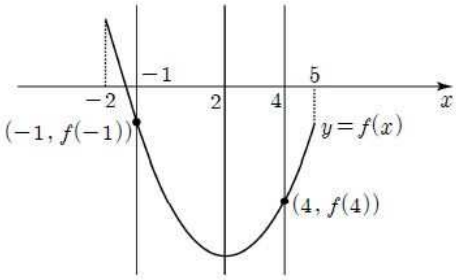
따라서 $f(-1)=|f(4)|=0$에서

$f(-1)=f(4)=0$은 성립하지 않으므로

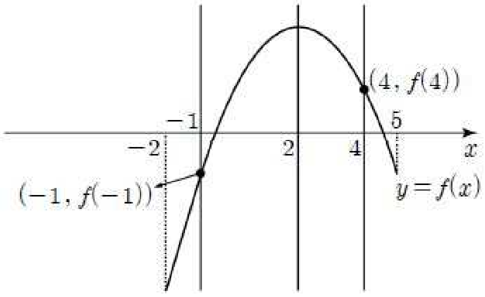
$f(-1)=-|f(4)|<0$ 이고 $|f(-1)|=|f(4)|$

• • • ① 이다.

(i) $a > 0$인 경우



$f(4) < f(-1) < 0$이 되어 ①을 만족시키지 않는다.
(ii) $a < 0$인 경우



①에서 $f(-1) < 0$이므로 $f(4) > 0$이다.
그러므로 $f(-1) + |f(4)| = 0$에서
$f(-1) + f(4) = 13a + 2b = 0$ • • • ② 이다.
$a < 0$이므로 $-2 \le x \le 5$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은
$f(-2) = 16a + b = -19$ • • • ③ 이다.
②와 ③을 연립하면 $a = -2, b = 13$이다.
따라서 $f(x) = -2(x-2)^2 + 13$이므로
$f(3) = 11$이다.

20 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하면 $A(\alpha, 2\alpha + k)$, $B(\beta, 2\beta + k)$, $A_1(\alpha, 0)$, $B_1(\beta, 0)$, $C\left(-\dfrac{k}{2}, 0\right)$이고, α, β는 이차방정식 $-x^2 + 1 = 2x + k$
즉, $x^2 + 2x + k - 1 = 0$의 근이므로
근과 계수의 관계에 의해
$\alpha + \beta = -2$, $\alpha\beta = k - 1$ 이다. ·················· ㉠
삼각형 ACA_1의 넓이를 S_1이라 하면

$S_1 = \dfrac{1}{2}(-2\alpha - k)\left(-\dfrac{k}{2} - \alpha\right) = \left(\dfrac{k}{2} + \alpha\right)^2$이고,

삼각형 BCB_1의 넓이를 S_2이라 하면

$S_2 = \dfrac{1}{2}(2\beta + k)\left(\beta + \dfrac{k}{2}\right) = \left(\dfrac{k}{2} + \beta\right)^2$이다.

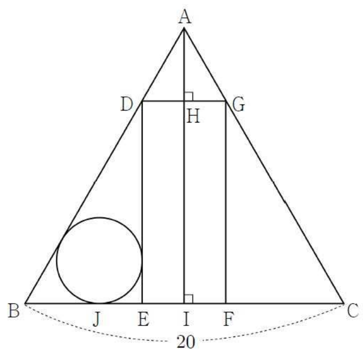
두 삼각형 ACA_1과 BCB_1의 넓이의 합이 $\dfrac{3}{2}$이므로

$\left(\alpha + \dfrac{k}{2}\right)^2 + \left(\beta + \dfrac{k}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{2}$이고,

$(\alpha^2 + \beta^2) + k(\alpha + \beta) + \dfrac{k^2}{2} = \dfrac{3}{2}$이다.

즉, $2(\alpha^2 + \beta^2) + 2k(\alpha + \beta) + k^2 - 3 = 0$이고,
㉠에 의해 $k^2 - 8k + 9 = 0$ 이다.
그러므로 $k = 4 \pm \sqrt{7}$ 이고 $-2 < k < 2$이므로
$k = 4 - \sqrt{7}$이다.
따라서 $p = 4, q = -1$ 이므로 $10p + q = 39$이다.

21



점 A에서 선분 DG, 선분 BC에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하고, 원과 선분 BC와의 교점을 J라 하자.
선분 DH의 길이를 $a(0 < a < 10)$라 하면 선분 AH의 길이는 $\sqrt{3}a$이고 선분 DE의 길이는
$10\sqrt{3} - \sqrt{3}a$이다.
직사각형 $DEFG$의 넓이를 S라 하면
$S = 2a(10\sqrt{3} - \sqrt{3}a) = -2\sqrt{3}(a-5)^2 + 50\sqrt{3}$
따라서 $a = 5$일 때 직사각형 $DEFG$의 넓이는 최대이다.
원의 반지름의 길이를 b라 하면
$\overline{EI} = a$, $\overline{JE} = b$, $\overline{BJ} = \sqrt{3}b$이므로
$a + (1 + \sqrt{3})b = 10$이다.
$a = 5$일 때 $b = \dfrac{5(\sqrt{3} - 1)}{2}$이므로 원의 둘레는

$5(\sqrt{3}-1)\pi$이다.
p, q는 유리수이므로 $p=5, q=-5$이고 $p^2+q^2=50$이다.

22 A의 x좌표를 α, B의 x좌표를 β라고 하자.
α, β는 $x^2-x+k=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=1, \alpha\beta=-k$이다.
$\alpha>0, \beta<0$이므로
$S_1=\frac{1}{2}\alpha^3, S_2=-\frac{1}{2}\beta^3$이다.
$S_1-S_2=\frac{1}{2}(\alpha^3+\beta^3)=20$이고
$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=40$이다.
$\alpha+\beta=1$에서 $\alpha\beta=-13$이므로 $k=13$