V-1 함수 P.31-35

12-B 1. ④ 2. ④ 3. $\{3, 6, 9, 12, 18, 36\}$

13-A 1. $f=g$ 2. $a=2$, $b=1$ 3. 생략

13-B 1. ㄱ, ㄷ 2. ㄱ 3. 12

14-A 1. (1) ㄱ, ㄴ (2) ㄱ, ㄴ (3) ㄱ (4) ㄷ
2. 100 3. 120

14-B 1. 2 2. (1) 16 (2) -1 (3) -2 (4) 5
3. 16

15-A 1. (1) $2x^2-7$ (2) $4x^2+4x-3$
(3) $4x+3$ (4) x^4-8x^2+12
2. 0 3. 10

15-B 1. 7
2. (1) $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ (2) $y=-3x+6$
3. 7

16-A 1. $y=-10x+16$ 2. 4 3. -28

V-1 함수 P.35-41

1. 25	2. 16	3. ⑤	4. ②	5. ②
6. ④	7. 10	8. ③	9. ④	10. ③
11. ③	12. ①	13. ②	14. 490	15. ①
16. ①	17. ③	18. ②	19. ④	20. ③
21. ④	22. ⑤	23. ③	24. ⑤	25. 17
26. 80	27. ③			

1 함수 $f(x)$가 집합 A의 모든 원소 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족하므로

$f(-2)=-f(2)$, $f(-1)=-f(1)$, $f(0)=0$

$f(-2)$와 $f(-1)$이 될 수 있는 값은 각각 5가지이므로 함수 f의 개수는 $5\times5=25$

2 $f(9)=f(72)=2$, $f(18)=f(81)=4$,
$f(27)=f(90)=6$, $f(36)=f(99)=1$,
$f(45)=3$, $f(54)=5$, $f(63)=0$

함수 $f(n)$의 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 하므로

$f^{-1}(0)=63$, $f^{-1}(3)=45$, $f^{-1}(5)=54$이고
$f^{-1}(1)=36$ 또는 $f^{-1}(1)=99$,
$f^{-1}(2)=9$ 또는 $f^{-1}(2)=72$,
$f^{-1}(4)=18$ 또는 $f^{-1}(4)=81$,
$f^{-1}(6)=27$ 또는 $f^{-1}(6)=90$

따라서 집합 X의 개수는 $2\times2\times2\times2=16$

3 ㄱ. $f(12)=f(10\times1+2)=f(1)+2$
$=f(10\times0+1)+2=f(0)+1+2$
$=1+2=3$

ㄴ. $(f\circ f)(999)=f(f(999))=f(27)=9$

ㄷ. $f(100a+10b+c)=f(10a+b)+c$
$=a+b+c$
$f(100c+10b+a)=f(10c+b)+a$
$=c+b+a$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

5 ㄱ. 모든 $x \in X$에 대하여 $f(x) = g(x) = x$이므로

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x) = x$

$\therefore$ $g \circ f$는 항등함수

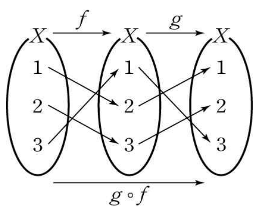
ㄴ. $g \circ f$가 항등함수이면 모든 $x \in X$에 대하여

$g(f(x)) = x$

즉 f의 역함수는 g이고 g의 역함수는 f이다.

f, g는 모두 역함수가 존재하므로 일대일 대응이다.

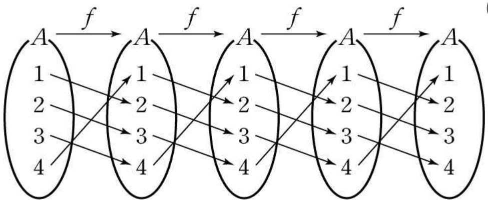
ㄷ. [반례]



위의 그림에서 $g \circ f$가 항등함수이지만 f, g는 모두 항등함수가 아니다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

6



위의 그림에서 $f^4(x) = x$이므로

$f^{2012}(2) = f^{4 \times 503}(2) = 2$

$f^{2013}(3) = f^{4 \times 503 + 1}(3) = f^1(3) = 4$

$\therefore$ $f^{2012}(2) + f^{2013}(3) = 2 + 4 = 6$

7 $g(f(k)) = 3$에서

$f(k) > 0$, $-\{f(k)\}^2 + 4 = 3$

이므로 $f(k) = 1$

$f(k) = |k| - 4 = 1$에서 $k = \pm 5$

따라서 $\alpha = 5$, $\beta = -5$이므로 $\alpha - \beta = 10$

8 $n = a_m \times 10^m + \cdots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0$

일 때,

$f\left(a_m \times 10^m + \cdots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0\right)$

$= f\left(a_m \times 10^{m-1} + \cdots + a_2 \times 10 + a_1\right) + a_0$

$= f\left(a_m \times 10^{m-2} + \cdots + a_2\right) + a_1 + a_0$

$\vdots$

$= a_m + \cdots + a_2 + a_1 + a_0$

$\therefore$ $f(n) = a_m + \cdots + a_2 + a_1 + a_0$

ㄱ. $f(100) = 1$

ㄴ. $(f \circ f)(999) = f(27) = 9$

ㄷ. [반례] $n = 15$일 때, $f(n) = 6$으로 $f(n)$은 6의 배수이지만 n은 6의 배수가 아니다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

14 함수 $y = x^2 - 6x\,(x \geq 3)$의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y = x^2 - 6x\,(x \geq 3)$의 그래프와 직선 $y = x$의 교점과 같다. 즉

$x^2 - 6x = x$, $\quad x(x - 7) = 0$

$\therefore x = 0$ 또는 $x = 7$

이때 $x \geq 3$이므로 $x = 7$

따라서 $(a, b) = (7, 7)$이므로 $10ab = 490$

15 두 함수 f, g의 정의에 의해서

$f(1) = 3$, $f(2) = 9$, $f(3) = 7$, $f(4) = 1$

$g(1) = 7$, $g(2) = 9$, $g(3) = 3$, $g(4) = 1$

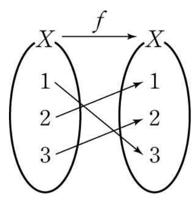
$\therefore (f \circ g^{-1})(1) + (g \circ f^{-1})(7)$

$= f(g^{-1}(1)) + g(f^{-1}(7))$

$= f(4) + g(3) = 1 + 3 = 4$

18 $f^3 = I$이므로 $f(1) = 3$이면

$f(3) = 2$, $f(2) = 1$



이때 함수 f 의 역함수 g 에
대하여 $g^3 = I$ 이므로

$g^{10} = g$, $g^{11} = g^2$

$\therefore g^{10}(2) + g^{11}(3) = g(2) + g(g(3))$
$= 3 + 2 = 5$

19 $(a+3)(2-a) > 0$ 이어야 하므로
$(a+3)(a-2) < 0$, 즉 $-3 < a < 2$
따라서 조건을 만족시키는 정수 a 는
$-2, -1, 0, 1$ 의 4개이다.

20 방정식 $f(x) = f^{-1}(x)$ 의 근은 방정식
$f(x) = x$ 의 근과 같다. $x \geq 1$ 일 때
$x^2 - 2x + 2 = x$ 에서 $x = 1, 2$
따라서 구하는 합은 3이다.

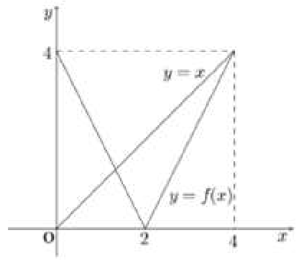
21 $f(2) = 4$, $f^{-1}(1) = 4$ 이므로
$f(2) + f^{-1}(1) = 4 + 4 = 8$

22 $(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(2) = 3$

23 $(g \circ f)(1) = 8$, $(g \circ f)(2) = 9$,
$(g \circ f)(3) = 7$
$g(6) = 9$ 이고 함수 g 는 일대일 대응이므로
$f(2) = 6$
또한 $f(1) = 4$, $f(2) = 6$ 이고 함수 f 는 일대일 대응이므로 $f(3) = 5$
$(g \circ f)(3) = 7$ 에서 $f(3) = 5$ 이므로
$g(5) = 7$
따라서 $f(2) + g(5) = 6 + 7 = 13$

24 ㄱ. $f(f(1)) = f(2) = 0$ (참)

ㄴ. 방정식 $f(x) =$ 의 실근의 개수는 함수 $y = f(x)$ 와 직선 $y = x$ 의 교점의 개수와 같다.



따라서 방정식 $f(x) =$ 의 실근의 개수는 2이다. (참)
ㄷ. $f(f(x)) = f(x)$ 에서 $f(x) = t$ 로 치환하고 방정식 $f(t) = t$ 를 만족하는 해를 구해보면

$|2t - 4| = t$ 에서 $t = \dfrac{4}{3}$ 또는 $t = 4$

(i) $f(x) = \dfrac{4}{3}$ 인 경우

$|2x - 4| = \dfrac{4}{3}$ 에서 $x = \dfrac{4}{3}$ 또는 $x = \dfrac{8}{3}$

(ii) $f(x) = 4$ 인 경우

$|2x - 4| = 4$ 에서 $x = 0$ 또는 $x = 4$

(i), (ii)에 의해 방정식 $f(f(x)) = f(x)$ 의 모든 실근의 합은 $\dfrac{4}{3} + \dfrac{8}{3} + 0 + 4 = 8$ (참)

25 조건 (가)에 의하여 함수 f 는 일대일 대응이다.
집합 X 의 임의의 원소 x 에 대하여
$1 \leq f(x) \leq 7$
조건 (나)에서
$f(f(3)) = f(3) - 6 \geq 1$
즉 $f(3) \geq 7$ 이므로 $f(3) = 7$
$f(f(3)) = f(7) = 7 - 6 = 1$
따라서 $f(3) = 7$, $f(7) = 1$ …… ㉠
$f(7) = 1$ 이므로
$f(f(2)) = f(2) - 4 \geq 2$
즉 $f(2) \geq 6$ 이고 $f(3) = 7$ 이므로 $f(2) = 6$
$f(f(2)) = f(6) = 6 - 4 = 2$
따라서 $f(2) = 6$, $f(6) = 2$ …… ㉡
$f(7) = 1$, $f(6) = 2$ 이므로
$f(f(1)) = f(1) - 2 \geq 3$
즉 $f(1) \geq 5$ 이고 $f(2) = 6$, $f(3) = 7$ 이므로

$f(1)=5$

$f(f(1))=f(5)=5-2=3$

따라서 $f(1)=5$, $f(5)=3$ ⋯⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에 의하여 $f(4)=4$

따라서 $f(2)+f(3)+f(4)=6+7+4=17$

26 원의 중심의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 원의 중심으로부터 두 직선까지의 거리가 같으므로

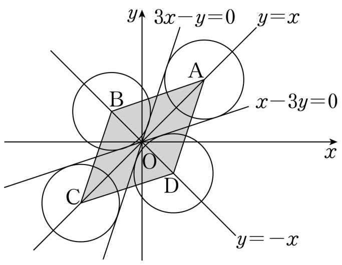
$$\frac{|a-3b|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{|3a-b|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}$$

$a-3b=\pm(3a-b)$

$a-3b=3a-b$에서 $b=-a$

$a-3b=-(3a-b)$에서 $b=a$

따라서 원의 중심은 직선 $y=x$ 또는 직선 $y=-x$ 위에 있다.



(ⅰ) 원의 중심이 직선 $y=x$ 위에 있는 경우

원의 중심인 점 $(a,\ a)$와 직선 $3x-y=0$ 사이의 거리는 4이므로

$$4=\frac{|3a-a|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|2a|}{\sqrt{10}}$$

$a=\pm2\sqrt{10}$

따라서 점 A와 점 C의 좌표는

$\mathrm{A}(2\sqrt{10},\ 2\sqrt{10})$, $\mathrm{C}(-2\sqrt{10},\ -2\sqrt{10})$

(ⅱ) 원의 중심이 직선 $y=-x$ 위에 있는 경우

원의 중심인 점 $(a,\ -a)$와 직선 $3x-y=0$ 사이의 거리는 4이므로

$$4=\frac{|3a-(-a)|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|4a|}{\sqrt{10}}$$

$a=\pm\sqrt{10}$

따라서 점 B와 점 D의 좌표는

$\mathrm{B}(-\sqrt{10},\ \sqrt{10})$, $\mathrm{D}(\sqrt{10},\ -\sqrt{10})$

사각형 ABCD는 두 선분 AC, BD를 대각선으로 하는 마름모이고

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(-2\sqrt{10}-2\sqrt{10})^2+(-2\sqrt{10}-2\sqrt{10})^2}$

$=8\sqrt{5}$

$\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{\{\sqrt{10}-(-\sqrt{10})\}^2+(-\sqrt{10}-\sqrt{10})^2}$

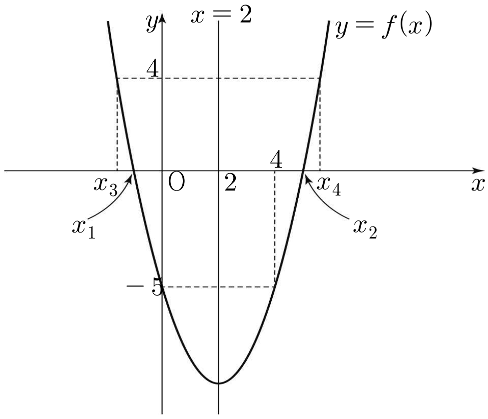
$=4\sqrt{5}$

이므로 사각형 ABCD의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times8\sqrt{5}\times4\sqrt{5}=80$$

27 $f(f(x))=-5$이고 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로

$f(0)=f(4)=-5$, $f(x)=0$ 또는 $f(x)=4$



$f(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 x_1, x_2라 하고

$f(x)=4$를 만족시키는 x의 값을 x_3, x_4라 하면

x_1과 x_2, x_3과 x_4는 각각 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로 $x_1+x_2=4$, $x_3+x_4=4$

따라서 $x_1+x_2+x_3+x_4=4+4=8$