VI-2 조합 P.59

6-A 1. (1) 210 (2) 1 2. (1) 8 (2) 6 3. 190

6-B 1. 60 2. 36 3. 15

VI-2 조합 P.60-63

1. ③	2. ①	3. ④	4. ②	5. ③
6. 60	7. ②	8. 528	9. 450	10. ②
11. ④	12. 6	13. 960		

1 (1) $a = 6$ 일 때, ${}_5C_2 = 10$ 가지,

(2) $a = 5$ 일 때, ${}_4C_2 = 6$ 가지.

총 $10 + 6 = 16$ 가지.

2 합성함수 $f \circ f$의 치역의 원소의 개수가 1이므로 정의역에 속하는 임의의 원소 x에 대하여 $f(f(x)) = a$라고 할 때 a가 될 수 있는 경우의 수는 ${}_4C_1 = 4$(가지)이다.

이때 $f(f(x)) = a$인 경우 a를 포함하는 함수 f의 치역은 $\{a,\ b\}$, $\{a,\ c\}$, $\{a,\ d\}$로 3가지이다.

이제 정의역의 원소를 $\{a,\ b,\ c,\ d\}$라 하고 f의 치역을 $\{a,\ b\}$라고 하면 $f(f(a)) = a$이기 위해서 $f(a) = a$ 이어야 한다.

또 $f(f(b)) = a$이기 위해서 반드시 $f(b) = a$가 되어야 한다.

이때 정의역의 나머지 두 원소 c, d가 a 또는 b에 대응하는 방법의 수는

$$2^2 - 1 = 3$$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$$4 \times 3 \times 3 = 36$$

3 ${}_nC_2 + {}_{n+1}C_3 = 2 \cdot {}_nP_2$에서

$$\frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n+1)n(n-1)}{6} = 2n(n-1)$$

$n(n-1) \neq 0$이므로 양변에 $\dfrac{6}{n(n-1)}$을 곱하면

$$3 + (n+1) = 12$$

$$\therefore\ n = 8$$

4 ${}_nP_2 - {}_7C_2 = \dfrac{n!}{(n-2)!} - \dfrac{7!}{5!\,2!}$

$= n(n-1) - 21 = 21$

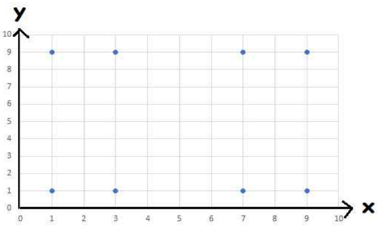
$n(n-1) = 42 = 7 \times 6$ 이므로 $n = 7$

5 ${}_4C_2 \times 3! = 6 \times 6 = 36$

6 ${}_6C_4 \times {}_4C_3 = 15 \times 4 = 60$

7 $A = \{3, 9, 7, 1\}, B = \{9, 1\}$

C의 좌표를 좌표평면에 표시하면 아래와 같다.



삼각형을 만들기 위해서 y좌표가 9인 점들 중에서 2개, y좌표가 1인 점들 중에서 1개를 선택하는 경우의 수가 ${}_4C_2 \times {}_4C_1 = 6 \times 4 = 24$,

y좌표가 9인 점들 중에서 1개, y좌표가 1인 점들 중에서 2개를 선택하는 경우의 수가

${}_4C_1 \times {}_4C_2 = 4 \times 6 = 24$,

총 경우의 수는 $24 + 24 = 48$

8 (ⅰ) 2층 또는 3층 중 한 층의 사물함만을 여학생에게 배정하는 경우

$$2 \times 2! \times {}_5P_3 = 240$$

(ⅱ) 1층의 사물함만을 여학생에게 배정하는 경우

$${}_3P_2 \times {}_4P_3 = 144$$

(iii) 2층, 3층의 사물함을 각각 1개씩 여학생에게 배정하는 경우

$${}_2C_1 \times {}_2C_1 \times 2! \times 3! = 48$$

(iv) 1층의 사물함을 한 여학생에게 배정하고 2층 또는 3층의 사물함을 다른 여학생에게 배정하는 경우

$${}_2C_1 \times {}_4C_1 \times 2! \times 3! = 96$$

따라서 (i), (ii), (iii), (iv)에 의해서 구하는 경우의 수는 $240+144+48+96=528$

9 우선 빨간색 공을 넣는 방법의 수는 ${}_5C_3=10$

모든 바구니에 공이 적어도 하나씩 들어가야 하므로 빨간색 공을 넣지 않은 빈 바구니에 파란색 공을 각각 1개씩 넣는다. 남은 4개의 파란색 공을 서로 다른 5개의 바구니에 각각 2개 이하로 넣는 경우의 수는 다음과 같다.

(i) $2+2$인 경우

파란색 공을 넣는 경우의 수는

${}_5C_2=10$

(ii) $2+1+1$인 경우

파란색 공을 넣는 경우의 수는

${}_5C_3 \times {}_3C_1=30$

(iii) $1+1+1+1$인 경우

파란색 공을 넣는 경우의 수는

${}_5C_4=5$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times(10+30+5)=450$

10 선택한 카드에 적혀 있는 5개의 수의 합이 짝수이고 1부터 8까지의 모든 자연수의 합이 36으로 짝수이다. 여기서 선택한 카드에 적혀 있는 5개의 수의 합이 짝수인 경우는 선택되지 않는 카드 3장에 적혀 있는 세 수의 합이 짝수인 경우와 같다. 세 수의 합이 짝수가 되는 경우는 세 수가 모두 짝수이거나, 세 수 중 짝수 1개, 홀수 2개인 경우이다.

(i) 모두 짝수인 경우의 수는

${}_4C_3=4$

(ii) 짝수 1개, 홀수 2개인 경우의 수는

${}_4C_1 \times {}_4C_2 = 4\times 6=24$

(i), (ii)로부터 구하는 경우의 수는

$4+24=28$

11 정사각형 모양의 노란색 시트지 2장을 창문 네 개 중 두 개를 택하여 붙이는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_4C_2$이다.

나머지 창문 2개를 직각이등변삼각형 모양으로 각각 나누는 경우의 수는 2×2이고, 나누어진 네 개의 영역에 직각이등변삼각형 모양의 시트지 4장을 붙이는 경우의 수는 $4!$이다.

따라서 구하는 경우의 수는

${}_4C_2\times2\times2\times4!=576$

12 $f(2)=4$이고 $x_1<x_2$이면

$f(x_1)>f(x_2)$이므로 1에 대응할 수 있는 Y의 원소는 5 또는 6이다.

또 $f(3)>f(4)$이므로 Y의 원소 1, 2, 3 중 2개를 뽑아 크기가 큰 수부터 차례로 $f(3)$, $f(4)$에 대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수의 개수는

$2\times{}_3C_2=2\cdot3=6$

13 꽃 4송이와 초콜릿 2개를 조건을 만족시키도록 5명의 학생에게 나누어 주는 경우는 다음과 같다.

(1) 1명의 학생이 초콜릿 2개를 받는 경우

초콜릿 2개를 받는 학생을 정하는 경우의 수는 5개이고, 나머지 4명의 학생에게 꽃을 각각 한 송이씩 나누어 주는 경우의 수는

$4!=4\times3\times2\times1=24$

이므로 1명의 학생이 초콜릿 2개를 받는 경우의 수는 $5\times24=120$

(2) 1명의 학생이 꽃 2송이를 받는 경우
4송이의 꽃 중에서 2송이의 꽃을 고르는 경우의 수는 ${}_4C_2 = 6$이고, 이 2송이의 꽃을 받는 학생을 정하는 경우의 수는 5, 남은 두 송이의 꽃을 줄 학생을 정하는 경우의 수는 ${}_4P_2 = 12$ 이고, 꽃을 받지 못한 2명의 학생에세 초콜릿을 각각 1개씩 주는 경우의 수가 1이므로 1명의 학생이 꽃 2송이를 받는 경우의 수는 $6 \times 5 \times 12 \times 1 = 360$

(3) 1명의 학생이 꽃 1송이와 초콜릿 1개를 받는 경우
4송이의 꽃을 4명의 학생에게 각각 1송이씩 주는 경우의 수는 ${}_5P_4 = 120$이고 꽃을 받지 못한 학생에게 초콜릿 1개를 주고 꽃을 받은 학생 중 1명을 택해 남은 초콜릿 1개를 주는 경우의 수는 ${}_4C_1 = 4$ 이므로 1명의 학생이 꽃 1송이와 초콜릿 1개를 받는 경우의 수는 $120 \times 4 = 480$
따라서 (1),(2),(3)에서 구하는 경우의 수는

$$120 + 360 + 480 = 960$$