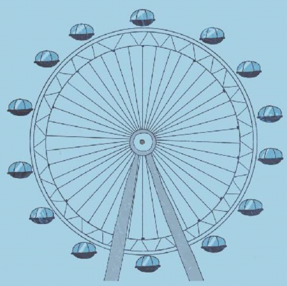


Part 02

지수와 로그

주어지는 모든 힘겨움을 기꺼이 맞는
청춘만이 비로소 별이 될 것이다.
그러므로 흔들리지 않으려고 굳이 애쓸 필요는 없다.
지금 부는 바람이 너의 뿌리를 튼튼하게 만들 것이므로,

- 홍영철의 "너는 가슴을 따라 살고 있는가" 中

☆ 수학Ⅰ 출제경향 ☆
(2021.6. 모평-2022.9. 모평 / 평가원 5회 + 교육청 5회)

	2점	3점	4점	풀만한 4점 (9-12번, 20번)	계
지수함수와 로그함수 (Part 2,3)	10문항	14문항	15문항	8문항	39문항
삼각함수		12문항	18문항	11문항	30문항
수열	1문항	22문항	18문항	6문항	41문항

☆ 지수와 로그, 어떻게 출제 돼? ☆

	2021년 6월	2021년 9월	2022학년도 수능	2022년 3월	2022년 4월	2022년 6월	2022년 7월	2022년 9월	계
06. 거듭제곱과 거듭제곱근	21번(4점)						19번(3점)	11번(4점)	3문항
07. 지수법칙과 지수의 확장	1번(2점)	1번(2점)	1번(2점)	1번(2점)	1번(2점)	1번(2점)	1번(2점)	1번(2점)	8문항
08. 로그의 뜻과 성질	16번(3점)	16번(3점)							2문항
09. 로그의 밑의 변환			16번(3점)	16번(3점)	16번(3점)	21번(4점)	16번(3점)		5문항
10. 상용로그									0문항

06 거듭제곱과 거듭제곱근 / **07** 지수법칙과 지수의 확장 /
08 로그의 뜻과 성질 / **09** 로그의 밑의 변환 / **10** 상용로그

거듭제곱과 거듭제곱근

체크 콕콕!
★★ 거듭제곱근의 계산
★ 거듭제곱근이 자연수가 되는 경우의 수
★★ a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수

STEP1 세상 친절한 개념 이야기

1) 거듭제곱

$3+3+3+3+3$와 같이 같은 수의 덧셈을 간단히 곱셈 3×5으로 표현하기로 약속한 것처럼 $3\times3\times3\times3\times3$와 같이 같은 수의 곱셈을 간단히 거듭제곱 3^5으로 표현하기로 약속했어.

실수 a를 n(n은 자연수)번 곱한 것을 a의 n제곱이라고 하고, a^n으로 나타내.
예를 들어 a를 세 번 곱한 것을 a의 세제곱이라고 하고 a^3으로 나타내.
a, a^2, a^3, $\cdots$, a^n, $\cdots$ 을 통틀어 <u>a의 거듭제곱</u>이라고 하고,
a^n에서 <u>a를 밑, n을 지수</u>라고 해.

[중학교 복습] 지수가 자연수일 때의 지수법칙

[상황]	[지수법칙]
	0이 아닌 실수 a, b와 자연수 m, n에 대하여
① $2^3\times2^5=2^{3+5}=2^8$	① $a^m a^n=a^{m+n}$: 밑이 같은 두 수의 곱
② $(2^3)^5=2^{3\times5}=2^{15}$	② $(a^m)^n=a^{mn}$: 거듭제곱의 거듭제곱
③ $(2\times3)^5=2^5\times3^5$	③ $(ab)^n=a^nb^n$: 곱의 거듭제곱
④ $\left(\dfrac{2}{3}\right)^5=\dfrac{2^5}{3^5}$	④ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$
⑤ $2^5\div2^3=\dfrac{2^5}{2^3}=2^2$ $2^3\div2^3=\dfrac{2^3}{2^3}=1$ $2^3\div2^5=\dfrac{2^3}{2^5}=\dfrac{1}{2^2}$	⑤ $a^m\div a^n=\begin{cases} a^{m-n} & (m>n\text{일 때}) \\ 1 & (m=n\text{일 때}) \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m<n\text{일 때}) \end{cases}$

<u>지수가 자연수</u>일 때 : <u>a^n은 a를 n번 곱한 것</u>이라는 의미야.

왼쪽의 상황에서 거듭제곱을 풀어 적어서 확인한 결과를 [지수법칙]이라고 하는데, 모양은 간단해. 자연스럽게 이해도 되고, 모양이 어느 정도 눈에 들어오기는 하는데, 한가지 아쉬운 점이 있지 않아? 나는 이걸 처음 배울 때 왜 이렇게 나눗셈(÷)의 형태만 지저분할까? 하고 생각했었거든. 걱정마 조금 있으면 '밑이 같은 두 수의 곱'처럼 '밑이 같은 두 수의 나눗셈'도 깔끔하게 정리가 될 거야.

이번 <u>[지수 단원의 목표]</u>는 <u>자연수 지수에 대해 성립하던 지수 법칙이 여전히 성립하도록 하면서 지수를 [자연수]에서 [정수], [유리수], [실수] 범위로 확장</u>해 갈 거야. 하지만 지수가 확장될 때, 여전히 지수법칙이 성립하기 위해서 새로운 수의 표현을 정의하고, 밑의 범위를 축소할 거야. 그 부분을 눈여겨 살펴 보자.

2) 거듭제곱근

0이 아닌 실수 a와 2이상의 자연수 n에 대하여 n제곱하여 a가 되는 수,
즉, n차 방정식 $x^n = a$를 만족시키는 근 x를 <u>a의 n제곱근</u>이라고 해.
(실수 a의 n제곱근은 복소수 범위에서 서로 다른 n개가 존재함이 알려져 있어.)
이 때, a의 제곱근, a의 세제곱근, a의 네제곱근, $\cdots$ 을 통틀어 <u>a의 거듭제곱근</u>이라고 해.

거듭제곱근은 방정식의 근임을 이해해야 해.

<u>a의 n제곱근 $\Leftrightarrow$ n차 방정식 $x^n = a$의 근 $\Leftrightarrow$ n제곱하면 a가 되는 수</u>

16의 네제곱근		네제곱근 16
방정식 $x^4 = 16$의 근 ☞ 4개가 존재 $(x^2-4)(x^2+4)=0$ $x^2 = 4$ 또는 $x^2 = -4$ $x = \pm 2$ 또는 $x = \pm 2i$ (실수 2개, 허수 2개)	<비교>	숫자 앞의 네제곱근은 기호 $\sqrt[4]{}$를 의미 네제곱근 16 ☞ $\sqrt[4]{16}$ 정의 : 16의 네제곱근 중 양의 실수인 것 계산 : $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$

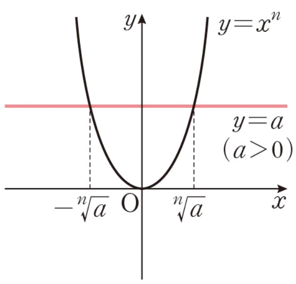
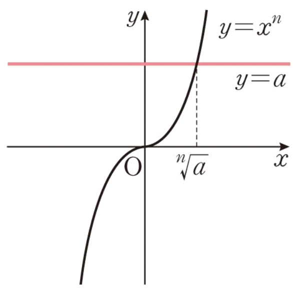
<일반화 : 0이 아닌 실수 a와 2이상의 자연수 n에 대하여>

a의 n제곱근		n제곱근 a
n차 방정식 $x^n = a$의 근 ☞ 복소수 범위에서 n개가 존재	<비교>	숫자 앞의 n제곱근은 기호 $\sqrt[n]{}$을 의미 n제곱근 a ☞ $\sqrt[n]{a}$ 정의 : a의 n제곱근 중 실수인 것 (실수인 것이 $\pm$ 두 개인 경우 양수인 것)

3) a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수

a의 n제곱근은 복소수 범위에서 n개가 존재해. 그 중에 실수인 것은 몇 개 존재할까?
실수 a와 2이상의 자연수 n에 대하여 a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수는 이렇게 생각할 거야.

① n차방정식 $x^n = a$의 서로 다른 실근의 개수
② <u>함수 $y = x^n$, $y = a$ 그래프의 서로 다른 교점의 개수</u>

	n이 짝수인 경우	n이 홀수인 경우
함수 $y = x^n$의 그래프		
$a > 0$	$x = \pm \sqrt[n]{a}$ ☞ 2개	$x = \sqrt[n]{a}$ ☞ 1개
$a = 0$	$x = 0$ ☞ 1개	$x = \sqrt[n]{a} = 0$ ☞ 1개
$a < 0$	없다.	$x = \sqrt[n]{a}$ ☞ 1개

우선 $y=x^n$의 그래프는 n이 홀수일 때는 원점을 지나고, 원점에 대하여 대칭인 그래프가 그려지고, n이 짝수일 때는 원점을 지나고 y축에 대하여 대칭인 그래프가 그려져.

반면 직선 $y=a$은 x축에 평행한 직선이므로 옮기며 교점의 개수를 확인하면 표와 같아.

함수의 그래프를 직접 그려서 이 상황을 이해해 보도록 해봐.

< a의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수 >

① n이 홀수인지, 짝수인지를 확인!

② n이 홀수이면 a에 관계없이 항상 1개($\sqrt[n]{a}$)

n이 짝수이면 : $a>0$일 때 2개($\pm\sqrt[n]{a}$), $a=0$일 때 1개, $a<0$일 때 없다.

4) 거듭제곱근의 성질

양의 실수 a와 2이상의 자연수 n에 대하여 $\sqrt[n]{a}$는 다음과 같이 읽어낼 수 있어야 해. ☞

① 방정식 $x^n=a$의 양의 실근
② a의 n제곱근 중 양수인 것
③ n제곱근 a

☆ $\sqrt[n]{a}$는 직관적으로 'n제곱하여 a가 되는 실수' 라고 이해하자.

[거듭제곱근의 성질]

$a>0$, $b>0$이고, m, n이 2이상의 정수일 때

① $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ ② $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

③ $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$ ④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

☆ $\sqrt[n]{a^n}=a$ ☆ 자연수 p에 대하여 $\sqrt[mp]{a^{np}}=\sqrt[m]{a^n}$

☆ 참고 ; $a<0$일 때 $\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases} |a| & (n\text{은 짝수인 자연수}) \\ a & (n\text{은 홀수인 자연수}) \end{cases}$

거듭제곱근의 성질은 간단해 보이지만, 단순히 식의 형태를 암기할 것이 아니라 위에서 정리한 것처럼 직관적인 의미를 이해하려는 노력이 실수를 줄일 수 있도록 도와줄 거야. 예를 들어 ① 성질을 'n제곱하여 a가 되는 실수($\sqrt[n]{a}$)와 n제곱하여 b가 되는 실수($\sqrt[n]{b}$)를 곱하면 n제곱하여 ab가 되는 실수($\sqrt[n]{ab}$)가 되는구나' 하고 소리 내어 읽어보길 바라.

[거듭제곱근의 성질 확인하기] ① 성질만 해볼게

① $a>0$, $b>0$이고, n이 2이상의 정수일 때, 지수법칙에 의하여

$(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n=ab$

이 때, $\sqrt[n]{a}>0$, $\sqrt[n]{b}>0$이므로 두 수의 곱 $\sqrt[n]{ab}>0$이다.

따라서 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$는 n번 곱해서 ab가 되는 양의 실수 이므로 ab의 양의 n제곱근이고 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$이 성립한다.

5) 거듭제곱근의 대소 비교

$a>0$, $b>0$일 때, 2이상의 자연수 m, n에 대하여 다음이 성립해. 양수 조건이 있어야 가능해.

① $a<b \Leftrightarrow a^n<b^n \Leftrightarrow \sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$

② $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a<b$

☞ 양변에 거듭제곱 또는 거듭제곱근 씌워서 대소비교가 가능해.

STEP2 내 손으로 적어보는 수능 개념

☺ a의 거듭제곱근이란?

☺ a의 n제곱근이란?

☺ n제곱근 a란?

☺ a의 n제곱근의 개수 :

☺ a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수

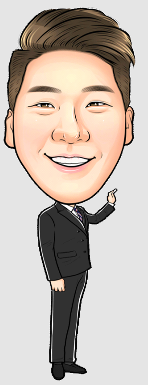
	n이 짝수인 경우	n이 홀수인 경우
$a>0$		
$a=0$		
$a<0$		

☺ 거듭제곱근의 성질

① ②

③ ④

STEP3 종영쌤의 달콤꿀팁



[거듭제곱과 거듭제곱근] 개념에서 출제되는 유형은 크게 두 가지야.

① 간단한 거듭제곱근의 계산 ② a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수

a의 거듭제곱을 이해하기 어렵다고 하는 경우는 없는데, a의 거듭제곱근을 이해하기 어렵다는 친구들이 간혹 있어. [a의 n제곱근] vs [n제곱근 a] vs [a의 n제곱근 중 실수인 것] 비슷한 이 세 용어 때문에 이해하기에 어려움을 겪는 것 일거야.

[a의 n제곱근]는 n차 방정식 $x^n=a$의 근으로 복소수 범위에서 n개가 존재하고,

[n제곱근 a]는 $\sqrt[n]{a}$를 가리키는 용어야. a의 n제곱근 중 실수인 것을 의미해.

[a의 n제곱근 중 실수인 것]은 n차 방정식 $x^n=a$의 실근으로 $y=x^n$, $y=a$ 그래프 교점의 x좌표를 의미해. [a의 n제곱근 중 실수인 것]의 개수가 궁금하다면 함수의 그래프에서 서로 다른 교점의 개수를 구해보면 돼.

a의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 구해야 할 때는 이렇게 생각하자.

① n이 홀수인지, 짝수인지를 확인!

② n이 홀수이면 a에 관계없이 항상 1개($\sqrt[n]{a}$)

n이 짝수이면 : $a>0$일 때 2개($\pm\sqrt[n]{a}$), $a=0$일 때 1개, $a<0$일 때 없다.

STEP4 한걸음 더 친해지기

개념문제 01 [1] [2]

$\sqrt{4}\times\sqrt[3]{8}$ 의 값은?

개념문제 02 [1] [2]

-8의 세제곱근을 모두 구하시오.

개념문제 03 [1] [2]

다음을 간단히 하시오.

1) $\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}}\times\sqrt{\dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}}}\times\sqrt{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}}=$

(단, $a>0$)

2) $\sqrt{\sqrt{\dfrac{2^{10}+4^{5}}{2^{2}+4}}}=$

개념문제 04 [1] [2]

<2005년 9월 모의평가 평가원 5번>

세 수 $A=\sqrt[3]{\sqrt{10}}$, $B=\sqrt{5}$, $C=\sqrt[3]{\sqrt{28}}$ 의 대소 관계를 나타내시오. [3점]

STEP5 기출문제 씹어먹기

기출문제 01 1 2 3

<2018년 3월 학력평가 나형 14번>

x에 대한 이차방정식 $x^2 - \sqrt[3]{81}\,x + a = 0$의 두 근이 $\sqrt[3]{3}$과 b일 때, ab의 값은?
(단, a, b는 상수이다.) [4점]

기출문제 02 1 2 3

<2022년 7월 학력평가 수학 19번>

$n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 $2n^2 - 9n$의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $f(3)+f(4)+f(5)+f(6)$의 값을 구하시오. [3점]

기출문제 03 1 2 3 <2020년 6월 모의평가 가형 12번>

자연수 n이 $2 \le n \le 11$일 때, $-n^2+9n-18$의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하도록 하는 모든 n의 값의 합은? [3점]

기출문제 04 1 2 3 <2022년 9월 모의평가 수학 11번>

함수 $f(x)=-(x-2)^2+k$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수가 2일 때, 상수 k의 값은? [4점]

$\sqrt{3}^{\,f(n)}$의 네제곱근 중 실수인 것을 모두 곱한 값이 -9이다.

Unit 07

3주완성 개념끝판왕!

지수법칙과 지수의 확장

체크 콕콕! ★★★ 지수법칙을 활용한 간단한 계산
★ 지수법칙과 곱셈공식
★★ 지수가 유리수일 때 자연수 값을 가질 조건

STEP1 세상 친절한 개념 이야기

숫자를 처음 배울 때, 자연수를 다루다가 점차 다루는 수의 범위가 정수, 유리수, 실수, 복소수로 확장되었던 것과 마찬가지로, 지수를 [자연수]에서 [정수], [유리수], [실수]범위로 점점 확장하려고 해.

우리 목표는 지수의 수체계를 확장하더라도 [지수법칙]이 여전히 성립하도록 새로운 수의 표현을 정의하는 것이야. 지수가 확장되더라도 [지수법칙]이 여전히 성립하기 위해서 밑의 범위를 점점 축소해가는 모습도 눈여겨 봐두면 좋아.

이번 시간에 배우는 [개념]은 증명과정보다 [지수가 실수까지 확장되더라도 여전히 지수법칙은 성립]한다는 사실이 중요하고, 지수가 확장된 상태에서 지수법칙을 능숙하게 사용할 수 있도록 충분히 많은 계산문제를 풀어볼 필요가 있어.

[집합과 명제] 단원에서 한 단원에 두 개념이 함께 들어있는 경우 앞의 개념을 제대로 이해하고 그것을 바탕으로 뒤의 개념을 학습해야 함을 의미한다고 했었지? [지수와 로그] 단원에서는 지수를 이해하고, 지수의 관점에서 로그를 바라보고 비교해서 정리해야 한다는 것을 기억하자.

1) 지수의 확장 - 정수

지수가 자연수일 때 성립하던 지수법칙이 지수가 정수로 확장되더라도 여전히 성립하도록 새로운 수들을 정의할 거야. 지수가 정수로 확장되며 더 이상 a^x은 a를 x번 곱한 것이라는 의미를 갖지 않아. 철저하게 지수법칙이 여전히 성립하도록 한다는 것이 목표인데, 여기에서 가장 핵심적인 역할을 하는 지수법칙은 $a^m \times a^n = a^{m+n}$이야.

0이 아닌 실수 a에 대하여 m, n이 정수일 때도 지수법칙 $a^m \times a^n = a^{m+n}$이 성립하도록 할 거야.

$a^m \times a^0 = a^{m+0} = a^m$ 이 성립하도록 $a^0 = 1$라고 정의하자.

$a^m \times a^{-m} = a^{m+(-m)} = a^0 = 1$이 성립하도록 $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$라고 정의하자.

[0 또는 음의 정수인 지수의 정의]

0이 아닌 실수 a에 대하여 $a^0 = 1$ (0^0은 정의하지 않아)

0이 아닌 실수 a에 대하여 $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$, $a^{-n} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^n = \dfrac{1}{a^n}$($n$은 자연수)

※ 지수가 자연수일 때 밑의 조건은 실수 a, 지수가 정수일 때 밑의 조건은 0이 아닌 실수 a

$2^5 \div 2^3 = 2^2$

$2^3 \div 2^3 = 1 = 2^0$

$2^3 \div 2^5 = \dfrac{1}{2^2} = 2^{-2}$

☞ 이제는 밑이 같은 두 수의 곱셈 $a^m \times a^n = a^{m+n}$ 처럼
밑이 같은 두 수의 나눗셈 $a^m \div a^n = a^{m-n}$으로 정의할 수 있어.

2) 지수의 확장 - 유리수

지수가 정수일 때 성립하던 지수법칙이 지수가 유리수로 확장되더라도 여전히 성립하도록 새로운 수들을 정의할 거야. 지수를 유리수로 확장하는데 핵심적인 역할을 하는 지수법칙은 $(a^m)^n = a^{mn}$이야.

양의 실수 a에 대하여 지수가 유리수일 때도 지수법칙 $(a^m)^n = a^{mn}$이 성립하도록 할 거야.
$a > 0$이고, 지수가 유리수일 때도 지수법칙이 성립하려면
두 정수 $m, n\,(n \geq 2)$에 대하여 $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n} \times n} = a^m$이므로
$a^{\frac{m}{n}}$은 a^m의 양의 n제곱근인 $\sqrt[n]{a^m}$이야.

[유리수인 지수의 정의]
양수 a와 두 정수 $m, n\,(n \geq 2)$에 대하여
① $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ ☞ 문제에서 $\sqrt[n]{a^m}$이 나오면 $a^{\frac{m}{n}}$으로 나타내자.
② $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ ☞ 문제에서 $\sqrt[n]{a}$이 나오면 $a^{\frac{1}{n}}$으로 나타내자.

예를 들어 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + 3^0 + 2^{\frac{1}{3}} \times \sqrt[3]{4}$의 값은 $2^2 + 3^0 + 2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = 4 + 1 + 2 = 7$

※ 지수에 유리수가 있다면 지수의 분모는 거듭제곱근을 의미해.
※ 지수가 유리수일 때 밑의 조건은 양의 실수 a

※ 지수가 유리수일 때, 밑의 조건이 양의 실수이어야 하는 이유
$1 = (\sqrt{1})^2 = \sqrt{1^2} = \sqrt{(-1)^2} = (\sqrt{-1})^2 = i^2 = -1$ ☞ $1 = -1$이라는 모순
만약 밑이 음의 실수일 때도 지수법칙이 성립한다면 모순이 생겨.
따라서 지수가 유리수로 확장되면서 밑의 조건은 양의 실수로 축소되어야만 해.

※ 이 정도는 눈에 익혀두자! $(a > 0)$
① $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ ② $a^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$ ③ $a^{\frac{3}{2}} = a\sqrt{a}$ ④ $a^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{a\sqrt{a}}$

3) 지수의 확장 - 실수

지수가 실수의 범위까지 확장하려면 지수가 무리수인 경우를 정의할 수 있으면 돼.
예를들어 $\sqrt{2}$는 무한소수 $1.414213\cdots$이므로 유리수의 수열
$1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142,\ \cdots$ 는 $\sqrt{2}$에 점점 가까워질 거야.
이때 이러한 유리수를 지수로 가지고, 밑이 양수 a인 수열 $a^1,\ a^{1.4},\ a^{1.41},\ a^{1.414},\ \cdots$ 이 어떤 수에 한없이 가까워짐이 알려져 있는데 이 수를 $a^{\sqrt{2}}$로 정의하자.

지수가 무리수인 경우는 일정한 값에 점점 가까워지는데, 이 일정한 값으로 정의한다.

☆ 사실 지수가 무리수인 수의 근삿값을 다루는 경우는 없어. 지수를 실수 전체로 확장한 것은 나중에 지수 함수를 정의하고 싶기 때문이고, 우리는 지수가 유리수인 수들까지만 주로 다룰 거야.

지수를 확장하더라도 여전히 [지수법칙]이 성립한다는 것이 핵심이고, 따라서 지수가 실수이기만 하면 마음껏 지수법칙을 사용할 수 있다. 자, 드디어 <u>지수법칙의 최종 완결판</u>!

$a>0$, $b>0$이고, x, y가 실수일 때
① $a^x \times a^y = a^{x+y}$ ☞ 밑이 같은 두 수의 곱은 지수의 덧셈이 된다.
② $a^x \div a^y = a^{x-y}$ ☞ 밑이 같은 두 수의 나눗셈은 지수의 뺄셈이 된다.
③ $(a^x)^y = a^{xy}$ ☞ 거듭제곱의 거듭제곱은 지수의 곱셈이 된다.
④ $(ab)^x = a^x b^x$ ☞ 곱의 거듭제곱은 지수를 분배할 수 있다.

예를 들어 $\left(2^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = 2^2 = 4$: 지수법칙이 여전히 성립해.
예를 들어 $2^{\pi}\times 2^{\sqrt{2}} = 2^{\pi+\sqrt{2}}$: 표현할 수 있지만 어느 정도 크기의 값인지는 관심 없어.

STEP2 내 손으로 적어보는 수능 개념

☺ **정수 지수의 정의 :** 0이 아닌 실수 a, 자연수 n에 대하여

$a^0 =$ $\qquad$ $a^{-n} =$

☺ **유리수 지수의 정의 :** 양의 실수 a, 두 정수 $m, n\,(n \geq 2)$에 대하여

$a^{\frac{m}{n}} =$

☺ **실수 지수의 지수법칙 :** 양의 실수 a, b,, 실수 x, y에 대하여

① $a^x \times a^y =$

② $a^x \div a^y =$

③ $(a^x)^y =$

④ $(ab)^x =$

STEP3 종영쌤의 달콤꿀팁

지수가 자연수일 때 a^m은 a를 m번 곱한 것을 나타내는 표현이었는데, 지수를 [정수]-[유리수]-[실수]로 확장하면서 더 이상 m번 곱한 것이라는 의미를 갖지는 않아. 지수를 확장하더라도 지수법칙 $a^x \times a^y = a^{x+y}$, $(a^x)^y = a^{xy}$이 성립하도록 새로운 수들을 정의했어.

양수 a, ★에 대하여
① $a\times$ ★ $= a$가 성립하려면 ★ $=1$이 되어야 하고,
② $a\times$★$=1$가 성립하려면 ★ $=\dfrac{1}{a}$이 되어야 하고,
③ (★)$^n = a$가 성립하려면 ★ $=\sqrt[n]{a}$가 되어야 한다.

간단한 수학적인 지식에 의해 지수를 확장해나갔어. 증명과정을 강조하기보다 그 흐름을 자연스럽게 받아들일 수 있도록 최대한 강조했으니 여러번 읽어보며 이해하려 노력하자.

지수가 무리수일 때, 그 정의나 근삿값을 다루는 경우는 없을 거야. 다만 '지수를 실수까지 확장하더라도 여전히 지수법칙은 성립한다는 점'과 '지수를 실수까지 확장한 것은 나중에 정의역이 실수인 함수를 다루기 위함'이라고 기억해둬. 지수법칙은 우리말로 '밑이 같은 두 수의 곱은 지수의 덧셈이 되고, 밑이 같은 두 수의 나눗셈은 지수의 뺄셈이 된다'라고 읽으며 생각해보자.

STEP4 한걸음 더 친해지기

개념문제 01 1 2

<2021 수능 / 2022 수능 외>

(1) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}} \times 3^{-\frac{7}{4}}$의 값은? [2점]

(2) $(-\sqrt{2})^4 \times 8^{-\frac{2}{3}}$의 값은? [2점]

(3) $\left(\sqrt{3^{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{2}}$의 값은? [2점]

(4) $\left(2^{\sqrt{3}} \times 4\right)^{\sqrt{3}-2}$의 값은? [2점]

개념문제 02 1 2

1보다 큰 실수 a에 대하여 다음을 만족하는 유리수 k의 값을 구하시오.

(1) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}} = a^k$

(2) $\dfrac{\sqrt{a\sqrt{a^3}}}{\sqrt[3]{a}} = a^k$

개념문제 03 1 2

$a^2 = 5$일 때, $\dfrac{a^3 - a^{-3}}{a + a^{-1}}$의 값을 구하시오. (단, $a \neq 0$)

개념문제 04 1 2

$7^m = 27$, $63^n = 81$인 실수 m, n에 대하여 $\dfrac{3}{m} - \dfrac{4}{n}$의 값을 구하시오.

STEP5 기출문제 씹어먹기

기출문제 01 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$

<2013년 6월 학력평가 나형 15번>

어떤 물질의 부패지수 P와 일평균 습도 H(%), 일평균 기온 t(℃) 사이에는 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$P=\frac{H-65}{14}\times(1.05)^t$$

일평균 습도가 72%, 일평균 기온이 10℃인 날에 이 물질의 부패지수를 P_1이라 하자.
일평균 습도가 79%, 일평균 기온이 x℃인 날에 이 물질의 부패지수가 $4P_1$일 때, x의 값은?
(단, $1.05^{14}=2$로 계산한다.) (4점)

기출문제 02 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$

<2017년 4월 학력평가 나형 17번>

두 자연수 a, b에 대하여

$\sqrt{\dfrac{2^a\times5^b}{2}}$ 이 자연수, $\sqrt[3]{\dfrac{3^b}{2^{a+1}}}$ 이 유리수

일 때, $a+b$의 최솟값은? [4점]

기출문제 03 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ <2018년 3월 학력평가 나형 25번>

두 실수 a, b에 대하여

$$2^{a}+2^{b}=2,\ 2^{-a}+2^{-b}=\frac{9}{4}$$

일 때, 2^{a+b}의 값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

기출문제 04 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ <2018년 4월 학력평가 나형 27번>

2 이상의 자연수 n에 대하여 $\left(\sqrt{3^{n}}\right)^{\frac{1}{2}}$과 $\sqrt[n]{3^{100}}$이 모두 자연수가 되도록 하는 모든 n의 값의 합을 구하시오. [4점]