



## 원과 직선의 위치 관계

•좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다.

### ◆ 원과 직선의 위치 관계는 어떻게 알 수 있을까?

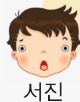
#### 개 념 열 기

축구 경기에서는 공이 골라인을 완전히 넘어갔을 경우에 득점으로 인정한다. 이때 정확한 공의 위치는 골라인 판독기로 확인할 수 있다.

다음 그림은 축구공과 골라인을 한 평면 위에 나타낸 것이다. 축구공을 나타내는 원과 골라인을 나타내는 직선  $l$ 에 대한 세 학생의 말에 해당하는 것을 ㉠, ㉡, ㉢ 중에서 각각 찾으시오.

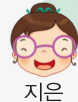


원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만난다.



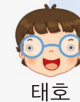
서진

원과 직선이 한 점에서 만난다.



지은

원과 직선이 만나지 않는다.



태호

위의 개념 열기에서 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나는 것은 ㉢, 원과 직선이 한 점에서 만나는 것은 ㉡, 원과 직선이 만나지 않는 것은 ㉠이다.

좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 알아보자.

원과 직선의 방정식이 각각

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \dots\dots ①$$

$$y = mx + n \quad \dots\dots ②$$

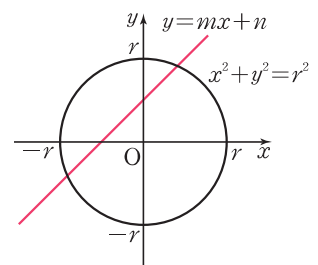
일 때, ②를 ①에 대입하여  $x$ 에 대한 식으로 정리하면

$$x^2 + (mx + n)^2 = r^2$$

$$\text{즉, } (m^2 + 1)x^2 + 2mnx + n^2 - r^2 = 0 \quad \dots\dots ③$$

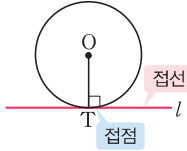
이다.

이때 원과 직선의 교점의 개수는 이차방정식 ③의 실근의 개수와 같다.



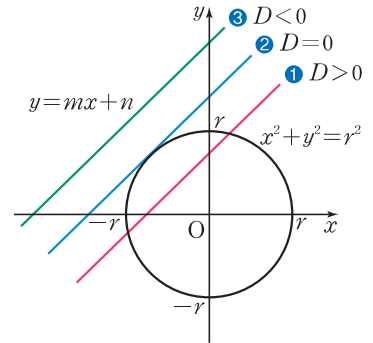
중학교 수학2

직선  $l$ 이 원  $O$ 와 한 점에서 만날 때, 직선  $l$ 은 원  $O$ 에 접한다고 한다. 이때 직선  $l$ 을 원  $O$ 의 접선, 만나는 점  $T$ 를 접점이라고 한다.



따라서 ③의 판별식을  $D$ 라고 하면 원과 직선의 위치 관계는 다음과 같다.

- ①  $D > 0$ 이면 서로 다른 두 점에서 만난다.  
거꾸로 서로 다른 두 점에서 만나면  $D > 0$ 이다.
- ②  $D = 0$ 이면 한 점에서 만난다(접한다).  
거꾸로 한 점에서 만나면  $D = 0$ 이다.
- ③  $D < 0$ 이면 만나지 않는다.  
거꾸로 만나지 않으면  $D < 0$ 이다.



예제  
1

원  $x^2 + y^2 - 5x - 3 = 0$ 과 직선  $y = -x - 1$ 의 위치 관계를 말하시오.

**풀이**  $y = -x - 1$ 을  $x^2 + y^2 - 5x - 3 = 0$ 에 대입하면

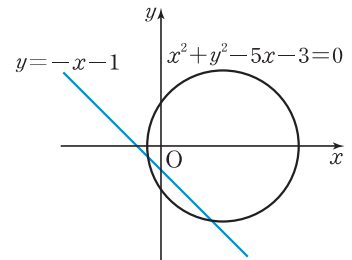
$$x^2 + (-x-1)^2 - 5x - 3 = 0$$

이 식을 정리하면  $2x^2 - 3x - 2 = 0$

이 이차방정식의 판별식  $D$ 에서

$$D = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25 > 0$$

따라서 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.



**답** 서로 다른 두 점에서 만난다.

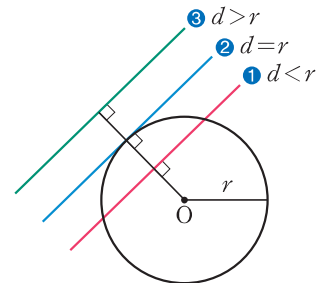
문제  
01

다음 원과 직선의 위치 관계를 말하시오.

- (1)  $x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0$ ,  $y = -x + 4$       (2)  $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ ,  $2x - y + 1 = 0$

원과 직선의 위치 관계는 다음과 같이 원의 중심과 직선 사이의 거리  $d$ 와 원의 반지름의 길이  $r$ 를 비교해서도 알 수 있다.

- ①  $d < r$ 이면 서로 다른 두 점에서 만난다.  
거꾸로 서로 다른 두 점에서 만나면  $d < r$ 이다.
- ②  $d = r$ 이면 한 점에서 만난다(접한다).  
거꾸로 한 점에서 만나면  $d = r$ 이다.
- ③  $d > r$ 이면 만나지 않는다.  
거꾸로 만나지 않으면  $d > r$ 이다.



## 예제 2

원  $x^2+y^2=5$ 와 직선  $y=2x+k$ 가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수  $k$ 의 값의 범위를 구하시오.

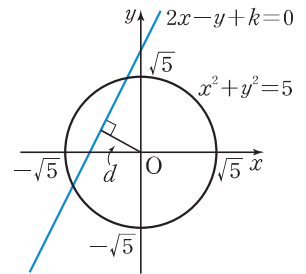
**풀이** 원  $x^2+y^2=5$ 의 중심  $(0, 0)$ 과 직선  $2x-y+k=0$  사이의

$$\text{거리 } d \text{는 } d = \frac{|k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

$$\text{원의 반지름의 길이 } r \text{는 } r = \sqrt{5}$$

$$\text{이때 } d < r \text{이므로 } \frac{|k|}{\sqrt{5}} < \sqrt{5}, |k| < 5$$

따라서 구하는  $k$ 의 값의 범위는  $-5 < k < 5$



**다른 풀이**  $y=2x+k$ 를  $x^2+y^2=5$ 에 대입하면  $x^2+(2x+k)^2=5$

$$\text{이 식을 정리하면 } 5x^2+4kx+k^2-5=0$$

$$\text{이 이차방정식의 판별식 } D \text{에서 } \frac{D}{4} = (2k)^2 - 5(k^2-5) = -k^2+25 > 0$$

따라서 구하는  $k$ 의 값의 범위는  $-5 < k < 5$

**답**  $-5 < k < 5$

## 문제 02

원  $x^2+y^2=10$ 과 직선  $y=-\frac{1}{3}x+k$ 의 위치 관계가 다음과 같을 때, 상수  $k$ 의 값 또는 범위를 구하시오.

- (1) 서로 다른 두 점에서 만난다.
- (2) 한 점에서 만난다.
- (3) 만나지 않는다.

## 문제 03

의사소통

원  $(x-3)^2+(y+1)^2=5$ 와 직선  $x-2y+k=0$ 이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수  $k$ 의 값의 범위를 구하려고 한다. 다음 두 학생의 대화에서 한 가지 방법을 택하여  $k$ 의 값의 범위를 구하고, 자신의 풀이 방법을 친구에게 설명하시오.

점과 직선 사이의 거리를 이용하여 구할 거야.

윤도



판별식을 이용하여 구할 거야.

유진

