

02

원과 직선의 위치 관계

• 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다.

원과 직선의 위치 관계는 어떻게 알 수 있을까?

개념 열기

다음 그림은 축구공과 골라인을 한 평면 위에 나타낸 것이다. 축구공을 나타내는 원과 골라인을 나타내는 직선 l 에 대한 세 학생의 말에 해당하는 것을 ㉠, ㉡, ㉢ 중에서 각각 찾으시오.



축구 경기에서는 공이 골라인을 완전히 넘어갔을 경우에 득점으로 인정한다. 이때 정확한 공의 위치는 골라인 판독기로 확인할 수 있다.

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만난다.



서진

원과 직선이 한 점에서 만난다.



지은

원과 직선이 만나지 않는다.



태호

위의 개념 열기에서 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나는 것은 ㉡, 원과 직선이 한 점에서 만나는 것은 ㉠, 원과 직선이 만나지 않는 것은 ㉢이다.

좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 알아보자.

원과 직선의 방정식이 각각

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \dots\dots ㉠$$

$$y = mx + n \quad \dots\dots ㉡$$

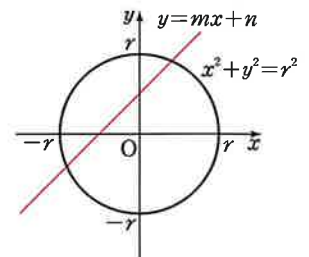
일 때, ㉡를 ㉠에 대입하여 x 에 대한 식으로 정리하면

$$x^2 + (mx + n)^2 = r^2$$

$$\text{즉, } (m^2 + 1)x^2 + 2mnx + n^2 - r^2 = 0 \quad \dots\dots ㉢$$

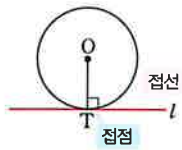
이다.

이때 원과 직선의 교점의 개수는 이차방정식 ㉢의 실근의 개수와 같다.



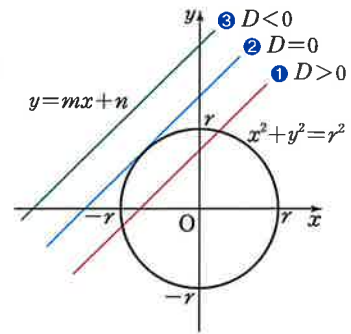
중학교 수학2

직선 l 이 원 O 와 한 점에서 만날 때, 직선 l 은 원 O 에 접한다고 한다. 이때 직선 l 을 원 O 의 접선, 만나는 점 T 를 접점이라고 한다.



따라서 ③의 판별식을 D 라고 하면 원과 직선의 위치 관계는 다음과 같다.

- ① $D > 0$ 이면 서로 다른 두 점에서 만난다.
거꾸로 서로 다른 두 점에서 만나면 $D > 0$ 이다.
- ② $D = 0$ 이면 한 점에서 만난다(접한다).
거꾸로 한 점에서 만나면 $D = 0$ 이다.
- ③ $D < 0$ 이면 만나지 않는다.
거꾸로 만나지 않으면 $D < 0$ 이다.



예제 1

원 $x^2 + y^2 - 5x - 3 = 0$ 과 직선 $y = -x - 1$ 의 위치 관계를 말하시오.

풀이 $y = -x - 1$ 을 $x^2 + y^2 - 5x - 3 = 0$ 에 대입하면

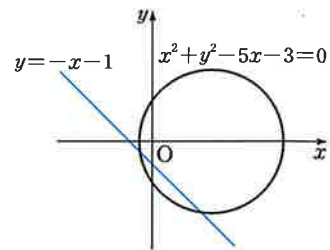
$$x^2 + (-x-1)^2 - 5x - 3 = 0$$

이 식을 정리하면 $2x^2 - 3x - 2 = 0$

이 이차방정식의 판별식 D 에서

$$D = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25 > 0$$

따라서 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.



답 서로 다른 두 점에서 만난다.

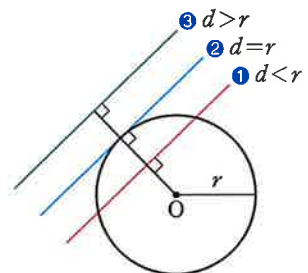
문제 01

다음 원과 직선의 위치 관계를 말하시오.

- (1) $x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0$, $y = -x + 4$ (2) $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$, $2x - y + 1 = 0$

원과 직선의 위치 관계는 다음과 같이 원의 중심과 직선 사이의 거리 d 와 원의 반지름의 길이 r 를 비교해서도 알 수 있다.

- ① $d < r$ 이면 서로 다른 두 점에서 만난다.
거꾸로 서로 다른 두 점에서 만나면 $d < r$ 이다.
- ② $d = r$ 이면 한 점에서 만난다(접한다).
거꾸로 한 점에서 만나면 $d = r$ 이다.
- ③ $d > r$ 이면 만나지 않는다.
거꾸로 만나지 않으면 $d > r$ 이다.



예제 2

원 $x^2+y^2=5$ 와 직선 $y=2x+k$ 가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 k 의 값의 범위를 구하시오.

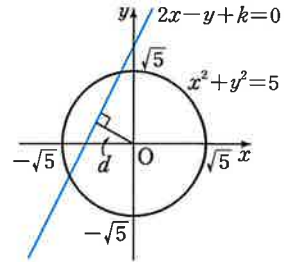
풀이 원 $x^2+y^2=5$ 의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $2x-y+k=0$ 사이의

$$\text{거리 } d \text{는 } d = \frac{|k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

원의 반지름의 길이 r 는 $r=\sqrt{5}$

이때 $d < r$ 이므로 $\frac{|k|}{\sqrt{5}} < \sqrt{5}$, $|k| < 5$

따라서 구하는 k 의 값의 범위는 $-5 < k < 5$



다른 풀이

$y=2x+k$ 를 $x^2+y^2=5$ 에 대입하면 $x^2+(2x+k)^2=5$

이 식을 정리하면 $5x^2+4kx+k^2-5=0$

이 이차방정식의 판별식 D 에서 $\frac{D}{4} = (2k)^2 - 5(k^2 - 5) = -k^2 + 25 > 0$

따라서 구하는 k 의 값의 범위는 $-5 < k < 5$

답 $-5 < k < 5$

문제 02

원 $x^2+y^2=10$ 과 직선 $y=-\frac{1}{3}x+k$ 의 위치 관계가 다음과 같을 때, 상수 k 의 값 또는 범위를 구하시오.

- (1) 서로 다른 두 점에서 만난다.
- (2) 한 점에서 만난다.
- (3) 만나지 않는다.

문제 03

의사소통

원 $(x-3)^2+(y+1)^2=5$ 와 직선 $x-2y+k=0$ 이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 k 의 값의 범위를 구하려고 한다. 다음 두 학생의 대화에서 한 가지 방법을 택하여 k 의 값의 범위를 구하고, 자신의 풀이 방법을 친구에게 설명하시오.

점과 직선 사이의 거리를 이용하여 구할 거야.



윤도

판별식을 이용하여 구할 거야.



유진