정답 및 풀이

1) 정답 7
합이 5인 경우:(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)
합이 6인 경우:(2,4), (3,3), (4,2)
따라서 합이 5 또는 6인 경우의 수는 7가지다.

2) 정답 81
500원, 100원, 50원, 10원 짜리 동전이 3개씩 있으므로 각각 1개 또는 2개 또는 3개를 사용할 수 있다. 즉, 경우의 수는 $3\times3\times3\times3=81=3^4$이다.

3) 정답 16
$120=2^3\times3\times5$ 이므로 약수의 개수는 $(3+1)\times(1+1)\times(1+1)=16$개다.

4) 정답 24
$(a+b+c)(p+q+r+s)(x+y)$의 전개식에서 항의 개수는 $3\cdot4\cdot2=24$

5) 정답 8
$(x+y)(a+b+c+d)$의 전개식에서 항의 개수는 $2\cdot4=8$

6) 정답 48
A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 2가지이다. 따라서 모든 경우의 수는 $4\times3\times2\times2=48$가지다.

7) 정답 6
$A\to B\to C$: $3\times2=6$가지이다.

8) 정답 8
(ⅰ) 집 → 학교로 가는 방법의 수는 2
(ⅱ) 집 → 도서관 → 학교로 가는 방법의 수는 $3\cdot2=6$
따라서 구하는 방법의 수는 $2+6=8$

9) 정답 10
5의 배수는 5, 10, 15, 20, 25, 30의 6개, 7의 배수는 7, 14, 21, 28의 4개다.
$\therefore$구하는 경우의 수는 $6+4=10$가지

10) 정답 7
합이 7인 경우:(1, 6), (2, 5), (3, 4)의 3가지
합이 9인 경우:(1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5)의 4가지
$\therefore$구하는 경우의 수는 7가지

11) 정답 6

100원	0	1	2	3	4	5
50원	10	8	6	4	2	0

$\therefore$6가지

12) 정답 6
5의 배수$=\{5,\ 10,\ 15,\ 20\}$
7의 배수$=\{7,\ 14\}$
$\therefore$5의 배수 또는 7의 배수가 나오는 경우의 수는 $4+2=6$

13) 정답 4

100원	0	1	2	3
50원	6	4	2	0

$\therefore$구하는 경우의 수는 4가지

14) 정답 4
합이 3이 되는 경우: (1, 2)의 1가지
합이 7이 되는 경우: (1, 6), (2, 5), (3, 4)의 3가지
$\therefore$구하는 경우의 수는 4가지

15) 정답 376
$120=2^3\times3\times5$
$a=(3+1)(1+1)(1+1)=16$
$b=(1+2+2^2+2^3)(1+3)(1+5)=360$
$\therefore a+b=16+360=376$

16) 정답 12
$3\times2\times2=12$가지

17) 정답 56
$7\times8=56$가지

18) 정답 13
7의 배수의 개수는 7개, 8의 배수의 개수는 6개다.
$\therefore$구하는 경우의 수는 $7+6=13$가지

19) 정답 59
$5\times59=295$이므로 300미만의 자연수 중 5의 배수의 개수는 59개다.

20) 정답 10
30미만의 수는 $10, 12, 13, 14, 20, 21, 23, 24$ 인 8가지, 3의 배수는 $12, 21, 24, 30, 42$인 5가지가 있다. 이 때, $12, 21, 24$는 중복되므로 모든 경우의 수는 $13-3=10$가지다.

21) 정답 14
$ax-b=1 \Rightarrow x=\frac{1+b}{a}$가 자연수가 되는 $(a,\ b)$인 경우의 수를 구하면
$(1,1), \cdots, (1,6)$인 6가지,
$(2,1), (2,3), (2,5)$인 3가지,
$(3,2), (3,5)$인 2가지,
$(4,3), (5,4)\ (6,5)$인 3가지가 있다.
따라서 모든 경우의 수는 14가지다.

22) 정답 9
10원짜리 동전 5개, 50원짜리 동전 8개, 100원짜리 동전 7개로 700원짜리 음료수 값을 지불하는 방법은 아래 표와 같다.

10원	0	0	0	0	0	5	5	5	5
50원	0	2	4	6	8	1	3	5	7
100원	7	6	5	4	3	6	5	4	3

따라서 음료수 값을 지불하는 경우의 수는 9이다.

23) 정답 27
100원짜리 동전 3개, 500원짜리 동전 2개, 1000원짜리 지폐 2장으로 지불할 수 있는 금액의 종류를 구할 때, 1000원짜리 지폐 2장은 500원짜리 동전 4개와 같다. 적어도 1개 이상의 동전 또는 지폐를 사용해야 할 때,
100원짜리 동전 3개, 500원짜리 동전 6개로 지불할 수 있는 금액의 종류의 수를 구하면
$4\times7-1=27$이다.

24) 정답 20
학생 $A,\ B,\ C,\ D,\ E$ 의 각각의 가방을
$a,\ b,\ c,\ d,\ e$라 하자. 무심코 가방을 들었을 때, 2명만 자신의 가방을 드는 경우의 수는
$(A,B), (A,C), (A,D), (A,E), (B,C), (B,D), (B,E)$
$(C,D), (C,E), (D,E)$
10이다. 예를 들어 $A,\ B$는 자신을 가방을 들고, 나머지는 다른 사람의 가방을 드는 경우는 다음과 같다.

C	d	e
D	e	c
E	c	d

즉, 경우의 수는 2이다. 따라서 자기 자신의 가방을 드는 경우의 10가지 각각 의 경우의 수는 2이므로 모든 경우의 수는 $10\times2=20$이다.

25) 정답 20
5개의 의자 $A,\ B,\ C,\ D,\ E$에 5명의 수험생
$a,\ b,\ c,\ d,\ e$ 중 2명의 수험생만이 자기 자리에 앉는 경우는 다음과 같다.
$(A,B), (A,C), (A,D), (A,E), (B,C), (B,D), (B,E)$
$(C,D), (C,E), (D,E)$
예를 들어 $A,\ B$ 의자에 $a,\ b$가 앉는 경우
$A\quad B\quad C\quad D\quad E$
$a\quad b\quad d\quad e\quad c$
$a\quad b\quad e\quad c\quad d$
경우의 수는 2이다. 마찬가지로 $A,\ B,\ C,\ D,\ E$에서 2개를 선택하는 경우의 수는 10이므로 5개의 의자 $A,\ B,\ C,\ D,\ E$에 5명의 수험생$a,\ b,\ c,\ d,\ e$ 중 2명의 수험생만이 자기 자리에 앉는 경우의 수는 $2\times10=20$이다.

26) 정답 4

500원	5	4		
100원	1	6	5	4
50원	1	1	3	5

$\therefore$구하는 경우의 수는 4가지

27) 정답 16
$540=2^2\times3^3\times5$
전체 양의 약수의 개수는 $3\times4\times2=24$개
홀수의 개수는 $3^3\times5$의 양의 약수의 개수와 같으므로 $4\times2=8$개
$\therefore$짝수의 개수는 $24-8=16$개

28) 정답 207
$72=2^3\times3^2$
$a=(3+1)(2+1)=12$
$b=(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2)=195$
$\therefore a+b=207$

29) 정답 21
$450=2\times3^2\times5^2$
전체 양의 약수의 개수는 $(1+1)(2+1)(2+1)=18$개
그 중 홀수의 개수는 $3^2\times5^2$의 약수의 개수와 같으므로 $(2+1)(2+1)=9$개다.
$\therefore$짝수의 개수 $m=18-9=9$
5의 배수가 아닌 약수의 개수는 2×3^2의 약수의 개수와 같으므로 $(1+1)(2+1)=6$개
$\therefore$5의 배수의 개수 $n=18-6=12$
$\therefore m+n=9+12=21$

30) 정답 96
만의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 4가지이므로 만들 수 있는 자연수의 개수는 ${}_4P_1\times{}_4P_3=96$개다.

31) 정답 60
다섯 가지 수로 만들 수 있는 세 자리 자연수는 ${}_5P_3=5\times4\times3=60$가지이다.

32) 정답 15
사전식으로 배열해보면
A______ $:3\times2\times1=6$(개)
B______ $:3\times2\times1=6$(개)
CA____ $:2\times1=2$(개)
여기까지 배열한 문자가 14개이고, 다음에 나오는 문자가 CBAD이므로 CBAD는 15번째 문자이다.

33) 정답 ④
a□□□인 경우의 수는 $3\times2\times1=6$
b□□□인 경우의 수는 $3\times2\times1=6$
c□□□인 경우의 수는 $3\times2\times1=6$
이 때, 19번째는 $dabc$이고, 20번째는 $dacb$이다.

34) 정답 60
서로 다른 5개의 원소에서 3개를 택한 순열의 수이므로 ${}_5P_3=60$개다.

35) 정답 120
서로 다른 6개의 원소에서 3개를 택한 순열의 수와 같으므로 ${}_6P_3=120$개

36) 정답 48
백의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 4가지, 십과 일의 자리에는 백의 자리에 온 숫자를 제외한 숫자가 올 수 있으므로 ${}_4P_2$가지이다.
$\therefore 4\times{}_4P_2=48$개

37) 정답 240
일의 자리와 백의 자리의 수가 3의 배수인 경우의 수는 ${}_2P_2=2$가지이다.
나머지 다섯 자리에 5개의 수를 나열하는 경우의 수는 5!가지이다.
$\therefore$구하는 경우의 수는 $2\times5!=240$가지이다.

38) 정답 6
${}_nP_2=30=6\times5 \quad \therefore n=6$

39) 정답 6
${}_nP_3=4{}_nP_2$에서
$n(n-1)(n-2)=4n(n-1)$
$n-2=4 \quad \therefore n=6$

40) 정답 8
${}_nP_4=5\cdot{}_nP_3$에서
$n(n-1)(n-2)(n-3)=5n(n-1)(n-2)$
$n-3=5 \quad \therefore n=8$

41) 정답 8
${}_nP_3=336=8\times7\times6 \quad \therefore n=8$

42) 정답 144
남학생 3명을 묶어서 한 사람으로 보면 4명을 일렬로 세우는 방법은 4!가지이고, 그 각각에 대하여 묶음 속에서 남학생 3명을 세우는 방법은 3!가지이다.
$\therefore$구하는 경우의 수는 $4!\times3!=144$가지

43) 정답 ①
남학생 3명을 묶어서 한 명으로 보면 3명을 일렬로 줄 세우는 방법은 3!가지이고, 그 각각에 대하여 묶음 속에서 남학생 3명을 줄 세우는 방법은 3!가지이다.
$\therefore$구하는 경우의 수는 $3!\times3!=36$가지

44) 정답 48
a, b를 묶어서 한 개로 보면 4개를 일렬로 방법은 4!가지이고, 그 각각에 대하여 묶음 속에서 a, b를 세우는 방법은 2!가지이다.
$\therefore$구하는 경우의 수는 $4!\times2!=48$가지

45) 정답 240
7을 세우는 방법은 2가지이고, 나머지 1, 2, 3, 5, 8을 세우는 방법은 $5!=120$가지이다.
$\therefore$구하는 경우의 수는 $2\times5!=240$가지

46) 정답 36
홀수 번째 자리에 홀수를 세우는 방법은 3!가지, 짝수 번째 자리에 짝수를 세우는 방법은 3!가지이다.
$\therefore$구하는 경우의 수는 $3!\times3!=36$가지

47) 정답 144
$4!\times3!=144$가지

48) 정답 18
네 개의 숫자를 일렬로 세우는 방법은 4!가지이다. 천의 자리에 0이 오는 경우의 수는 3!가지이다.

$\therefore$구하는 경우의 수는 $4!-3!=18$가지

49) 정답 4
${}_nP_4=4{}_{n-1}P_2$에서
$n(n-1)(n-2)(n-3)=4(n-1)(n-2)$
$n(n-3)=4$
$n^2-3n-4=0$
$(n-4)(n+1)=0 \quad \therefore n=4$

50) 정답 8
${}_nP_4={}_nP_3+24{}_nP_2$에서
$n(n-1)(n-2)(n-3)=n(n-1)(n-2)+24n(n-1)$
$(n-2)(n-3)=n-2+24$
$n^2-6n-16=0$, $(n+2)(n-8)=0$
$\therefore n=8$

51) 정답 5
${}_9P_5={}_8P_5+k\times{}_8P_4$에서
$9\times8\times7\times6\times5=8\times7\times6\times5\times4+k\times8\times7\times6\times5$
$9=4+k \quad \therefore k=5$

52) 정답 240
A, B를 묶어서 하나로 보면 5명을 일렬로 나열하는 방법의 수는 $5!$가지이고, 그 각각에 대하여 묶음 속에서 A, B를 세우는 방법은 $2!$가지이다.
$\therefore$구하는 경우의 수는 $5!\times2!$가지이다.

53) 정답 144
초등학생 2명을 묶어서 한 사람으로 보면 중학생을 제외한 3명을 일렬로 세우는 방법은 $3!$가지이고, 묶음 속에서 초등학생 2명을 세우는 방법은 $2!$가지이므로 $3!\times2!$가지이다.
그 각각에 대하여 양끝 및 사이의 4개의 자리에서 2개의 자리에 중학생 2명을 세우는 방법은 ${}_4P_2$가지이다.
$\therefore$구하는 경우의 수는 $3!\times2!\times{}_4P_2=144$가지

54) 정답 144
먼저 홀수 3개를 일렬로 세우는 방법은 $3!$가지이고, 그 각각에 대하여 양끝 및 사이의 4개의 자리 중에서 3개의 자리에 짝수 3개를 세우는 방법은 ${}_4P_3$가지이다.
$\therefore$구하는 경우의 수는 $3!\times{}_4P_3=144$가지

55) 정답 480
남학생 4명을 일렬로 세우는 방법은 $4!$가지이고, 그 각각에 대하여 양끝 및 사이의 5개의 자리 중에서 2개의 자리에 여학생 2명을 세우는 방법은 ${}_5P_2$가지이다.
$\therefore$구하는 경우의 수는 $4!\times{}_5P_2=480$가지

56) 정답 25
십의 자리에 들어갈 수 있는 숫자는 $1, 3, 5, 7, 9$의 5가지,
일의 자리에 들어갈 수 있는 숫자는 $0, 2, 4, 6, 8$의 5가지
따라서 구하는 두 자리 자연수의 개수는 ${}_5P_1\times{}_5P_1=25$가지

57) 정답 300
천의 자리에 올 수 있는 숫자는 $1, 2, 3, 4, 5$의 5(개),
백의 자리에 올 수 있는 숫자의 개수는 5(개),
십의 자리에 올 수 있는 숫자의 개수는 4(개),
일의 자리에 올 수 있는 숫자의 개수는 3(개)
따라서 구하는 자연수의 개수는
${}_5P_1\times{}_5P_3=300$(개)

58) 정답 252
$0, 1, 2, \cdots, 9$ 일 때 세 자리 자연수의 개수는 $9\cdot10\cdot10=900$가지이다. 또, 세 자리 자연수 중에서 2가 포함되지 않은 자연수의 개수는 $8\cdot9\cdot9=648$가지이다.
따라서 구하는 방법의 수는 $900-648=252$가지이다.

59) 정답 290
20명중에서 부장과 차장을 선택하는 방법의 수는 ${}_{20}P_2=20\times19=380$
2학년이 아닌 10명 중에서 부장과 차장을 선택하는 방법의 수는 ${}_{10}P_2=10\times9=90$
따라서 구하는 방법의 수는 $380-90=290$

60) 정답 12
모든 경우의 수는 ${}_6C_2=\dfrac{6\times5}{2}=15$이다.
이 때, 적어도 한 명은 여자인 경우는 모두 남자인 경우의 수를 전체 경우의 수에서 뺀 값과 같다. 즉, 남자 3명 중에서 2명의 대표를 뽑는 경우의 수는 ${}_3C_2=\dfrac{3\times2}{2}=3$이다. 따라서 구하는 경우의 수는 $15-3=12$이다.

61) 정답 10
${}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2}=10 \quad \therefore 10$회

62) 정답 28
${}_8C_2=\dfrac{8\times7}{2}=28$회

63) 정답 15

${}_6C_2 = \dfrac{6\times5}{2} = 15$번

64) 정답 56
8명의 학생들 중에서 3명의 학생들을 뽑는 조합의 수이므로 구하는 경우의 수는 ${}_8C_3 = 56$가지이다.

65) 정답 18
${}_6C_1 \times {}_3C_1 = 6\times3 = 18$가지

66) 정답 36
전체 경우의 수에서 A, B 둘 다 포함되지 않는 경우를 빼면 A, B 중에서 적어도 한 명은 포함되는 경우가 구해진다.
따라서 ${}_8C_3 - {}_6C_3 = 56-20 = 36$가지이다.

67) 정답 3
회장으로 갑을 뽑아두고 나머지 세 사람 중에서 부회장을 한 명 뽑으면 되는 것이므로 경우의 수는 ${}_3C_1 = 3$가지이다.

68) 정답 60
가로로 나열된 5개의 평행선 중에서 2개, 세로로 나열된 4개의 평행선 중에서 2개를 선택하면 하나의 평행사변형이 결정되므로 구하는 평행사변형의 개수는
${}_5C_2 \times {}_4C_2 = 10\cdot6 = 60$

69) 정답 6
${}_nC_{n-3} = {}_{n-1}P_2$에서 ${}_nC_3 = {}_{n-1}P_2$이므로
$\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6} = (n-1)(n-2)$
$\therefore n = 6$

70) 정답 20
자기의자에 다시 앉는 두 사람을 선택하는 방법은 ${}_5C_2$가지이다.
세 사람 a, b, c가 자기 의자에 앉지 않는 방법은 다음과 같이 2가지이다.

a자리	b자리	c자리
b	c	a
c	a	b

$\therefore$구하는 경우의 수는 ${}_5C_2 \times 2 = 20$가지

71) 정답 15
전체 경우의 수는 ${}_7C_2$가지
2명 모두 남자인 경우의 수는 ${}_4C_2$가지
$\therefore$구하는 경우의 수는 ${}_7C_2 - {}_4C_2 = 15$가지

72) 정답 28
8개에서 2개를 택한 조합의 수와 같으므로 ${}_8C_2 = 28$가지

73) 정답 10
5개에서 2개를 택한 조합의 수와 같으므로 ${}_5C_2 = 10$번이다.

74) 정답 5
${}_7C_r = {}_7C_{r-3}$에서 $7-r = r-3$ $\therefore r = 5$

75) 정답 70
키가 가장 큰 선수는 미리 뽑아놓고 키가 가장 작은 선수를 제외한 8명에서 4명을 뽑는 방법의 수이므로 ${}_8C_4$가지이다.

76) 정답 56
디오와 카이는 미리 뽑아놓고 나머지 8명에서 5명을 뽑는 방법의 수이므로 ${}_8C_5 = 56$가지이다.

77) 정답 60
${}_4C_2 \times {}_5C_3 = 60$가지

78) 정답 18
가로선 3개 중 2개와 세로줄 4개 중 2개에 의해 하나의 평행사변형이 결정되므로 평행사변형의 개수는 ${}_3C_2 \times {}_4C_2 = 18$개

79) 정답 40
${}_4C_1 \times {}_5C_2 = 40$가지

80) 정답 6
${}_8C_2 \times n! = {}_8P_6$
$\dfrac{8\cdot7}{2} \times n! = \dfrac{8!}{2!}$, $n! = 6!$ $\therefore n = 6$

81) 정답 112
A가 선출되고 B를 제외한 8명 중에서 3명이 선출되는 경우의 수는 ${}_8C_3 = 56$가지이다.
또, B를 선출하고 A를 제외한 8 명 중에서 3명이 선출되는 경우의 수는 ${}_8C_3 = 56$가지이다.
따라서 구하는 경우의 수는 $56+56 = 112$가지이다.

82) 정답 31
삼각형은 7개의 점 중에서 3개의 점을 뽑는 경우의 수는 ${}_{7}C_{3}=35$가지이다. 이 중 한 직선 위에 있는 3개의 점을 뽑는 경우는 삼각형이 만들어질 수 없다. 즉, ${}_{4}C_{3}=4$가지
따라서 구하는 경우의 수는 $35-4=31$가지이다.

83) 정답 36
주어진 문제는 문자 c를 제외한 나머지 3개의 문자 a, b, d를 나열하고 3개의 문자 사이사이 및 양 끝의 4개의 자리 중에서 2개의 자리를 뽑아 문자 c를 배열하면 된다. 따라서 구하는 방법의 수는 $3! \times {}_{4}C_{2}=36$(개)다.

84) 정답 70
남학생과 여학생 9명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_{9}C_{3}=84$이다. 이때 3명이 모두 남학생인 경우의 수는 ${}_{5}C_{3}=10$이고 3명이 모두 여학생인 경우의 수는 ${}_{4}C_{3}=4$이므로 두 경우의 수를 전체 경우의 수에서 빼주면 된다. 따라서 구하는 경우의 수는 $84-(10+4)=70$이다.

85) 정답 560
$p={}_{8}C_{4}\times{}_{4}C_{3}\times{}_{1}C_{1}=280$
$q=\dfrac{{}_{8}C_{3}\times{}_{5}C_{3}\times{}_{2}C_{2}}{2!}=280$
$\therefore p+q=560$

86) 정답 10
(i)4명을 2명, 2명의 2조로 나누어 타는 방법은 $\dfrac{{}_{4}C_{2}\times{}_{2}C_{2}}{2!}=3$가지
(ii)4명을 1명, 1명, 2명의 3조로 나누어 타는 방법은 $\dfrac{{}_{4}C_{1}\times{}_{3}C_{1}\times{}_{2}C_{2}}{2!}=6$가지
(iii)4명을 1명, 1명, 1명, 1명의 4조로 나누어 타는 방법은 1가지
$\therefore$구하는 경우의 수는 $3+6+1=10$가지

87) 정답 456
(i)10명을 3명, 7명의 2조로 나누는 방법은 ${}_{10}C_{3}\times{}_{7}C_{7}=120$가지
(ii)10명을 4명, 6명의 2조로 나누는 방법은 ${}_{10}C_{4}\times{}_{6}C_{6}=210$가지
(iii)10명을 5명, 5명의 2조로 나누는 방법은 $\dfrac{{}_{10}C_{5}\times{}_{5}C_{5}}{2!}=126$가지
$\therefore$구하는 경우의 수는 $120+210+126=456$

88) 정답 3
${}_{10}C_{n-1}={}_{10}C_{2n+2}$
(i)$n-1=2n+2$일 때, $n=-3$ $\therefore$모순
(ii)$n-1=10-(2n+2)$일 때, $3n=9$ $\therefore n=3$

89) 정답 100
모든 경우의 수는 ${}_{10}C_{3}=\dfrac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$이다.
이 때, 3명중 적어도 여자 한 명이 대표로 뽑히는 경우의 수는 전체 경우의 수에서 남자 6명중에서 대표 3명이 뽑히는 경우의 수를 제외한 수와 같다. 즉, 남자 중에서 대표 3명이 뽑히는 경우의 수는 ${}_{6}C_{3}=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$이다.
따라서 구하는 경우의 수는 $120-20=100$이다.

90) 정답 432
남학생 3명 중 2명을 뽑는 경우 ${}_{3}C_{2}=3$가지
여학생 4명 중 2명을 뽑는 경우 ${}_{4}C_{2}=6$가지
4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4!$
따라서 총 경우의 수는 $3\times6\times4!=432$가지이다.