정답 및 풀이

문제 1.
정답 (1) $x=0$에서 불연속 (2) $x=0$에서 불연속

문제 2.
정답 (1) $x=0$에서 연속 (2) $x=2$에서 불연속

문제 3.
정답 (1) 연속 (2) 불연속

문제 4.
정답 (1) 연속 (2) 연속

문제 5.
정답
(1) $x=0$에서 불연속 (2) $x=0$에서 불연속
(3) $x=0$에서 불연속 (4) $x=0$에서 연속

문제 6.
정답
(1) $x=1$에서 불연속 (2) $x=1$에서 불연속
(3) $x=1$에서 연속 (4) $x=1$에서 불연속

문제 7.
정답
(1) 모든 실수에서 연속이다.
(2) $x \neq -1$, $x \neq 2$인 모든 실수에서 연속이다.

문제 8.
정답 (1) 연속 (2) 불연속

문제 9.
정답 (1) 연속 (2) 불연속 (3) 연속 (4) 불연속

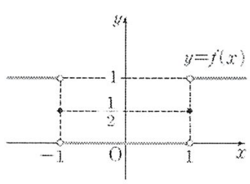
문제 10.
정답 (1) $(-\infty,\ -1)$, $(-1,\ 1)$, $(1,\ \infty)$ (2) $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ \infty)$

문제 11.
정답 (1) $(-\infty, \infty)$ (2) $(-\infty, 3]$

문제 12.
정답 (1) $(-\infty, \infty)$ (2) $(-\infty, 9]$

문제 13.
정답 (1) $(-\infty, \infty)$ (2) $(-\infty, \infty)$ (3) $(-\infty,\ 0)$ 또는 $(0, \infty)$

문제 14.
정답



(i) $|x|<1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}=0$$

(ii) $|x|=1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n}=\frac{1}{2}$이므로

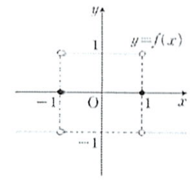
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}=\frac{1}{2}$$

(iii) $|x|>1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n}=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x^{2n}}+1}=1$$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 위 그림과 같고, 함수 $y=f(x)$는 $x \neq -1$, $x \neq 1$인 모든 실수 x에서 연속이다.

문제 15.
정답



(i) $|x|<1$인 경우 $\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}=1$$

(ii) $x=1$, $x=-1$인 경우 $\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n}=1$이므로

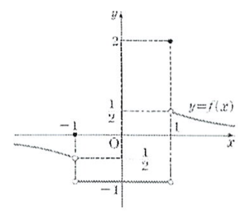
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}=0$$

(iii) $|x|>1$인 경우 $\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n}=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x^{2n}}-1}{\frac{1}{x^{2n}}+1}=-1$$

함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 위의 그림과 같다.
따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 불연속이고, $x=-1$, $x=1$을 제외한 모든 실수 x에서 연속이다.

문제 16.
정답



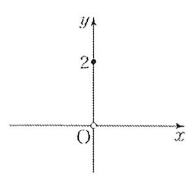
함수

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2x} & (|x|>1)\\ -1 & (|x|<1)\\ 2 & (x=1)\\ 0 & (x=-1)\end{cases}$$

의 그래프는 오른쪽과 같고
함수 $y=f(x)$는 $x \neq -1$, $x \neq 1$인 모든 실수 x에서 연속이다.

문제 17.
정답
(1) 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 함수가 정의되어 있지 않다.
따라서 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이다.
(2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$, $f(a)=2$이므로 $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$이다.
따라서 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이다.
(3) $\lim\limits_{x\to a-} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=2$이므로
$x=a$에서 극한값이 존재하지 않는다.
따라서 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이다.

문제 18.
정답



$$f(-x)=\begin{cases}0 & (x\le -1,\ x\ge 1)\\ -x & (-1<x<0,\ 0<x<1)\\ 1 & (x=0)\end{cases}$$ 이므로

$$f(x)+f(-x)=\begin{cases}0 & (x\le -1,\ x\ge 1)\\ 0 & (-1<x<0,\ 0<x<1)\\ 2 & (x=0)\end{cases}$$

즉, $f(x)+f(-x)=\begin{cases}0 & (x\neq 0)\\ 2 & (x=0)\end{cases}$

함수 $y=f(x)+f(-x)$의 그래프는 위의 그림과 같다.
따라서 함수 $f(x)+f(-x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

문제 19.
정답 불연속

문제 20.
정답
(1) $x=c$에서 정의되어 있고 $\lim_{x\to c} f(x)$가 존재하며
$\lim_{x\to c} f(x)=f(c)=b$이므로 함수 $y=f(x)$는 $x=c$에서 연속이다.
(2) $\lim_{x\to c-} f(x)=a$, $\lim_{x\to c+} f(x)=b$이므로 $\lim_{x\to c} f(x)$가 존재하지 않는다.
따라서 함수 $y=f(x)$는 $x=c$에서 불연속이다.
(3) $\lim_{x\to c} f(x)=b$, $f(c)=a$이므로 $\lim_{x\to c} f(x)\neq f(c)$이다.
따라서 함수 $y=f(x)$는 $x=c$에서 불연속이다.

문제 21.
정답 8

문제 22.
정답 6

문제 23.
정답 $a=-4$, $b=-2$, $c=-3$

문제 24.
정답 $\frac{5}{4}$

문제 25.
정답 0

문제 26.
정답 (1) $a=4$, $b=4$ (2) $a=3$, $b=\frac{2}{3}$

문제 27.
정답 -2

문제 28.
정답 3

문제 29.
정답 1

문제 30.
정답 $a=-3$, $b=1$
문제해설
함수 $f(x)$는 $x\neq 1$인 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이면 모든 실수에서 연속이다.
함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이 되려면 $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)=b$

$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+ax+1}{x-1}=b$에서 $\lim_{x\to 1}(2x^2+ax+1)=0$이므로
$a+3=0$에서 $a=-3$
$a=-3$을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-3x+1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(2x-1)=1$$

따라서 $b=1$

문제 31.
정답 $\frac{9}{4}$
문제해설
함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로 $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$
$x\neq 0$일 때, $f(x)=\frac{x^2+2x+\sqrt{x+4}-2}{x}$에서

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x+\sqrt{x+4}-2}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{(x+2)+\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}\right\}=\frac{9}{4}$$

따라서 $f(0)=\frac{9}{4}$

문제 32.
정답 (1) 2 (2) -2

문제 33.
정답 (1) $a=-6$, $b=5$ (2) $a=3$, $b=-2$

문제 34.
정답 $a=\frac{1}{3}$

문제 35.
정답 $a=-2$, $b=2$

문제 36.
정답 $a=-\sqrt{2}$, $b=\frac{\sqrt{2}}{4}-1$

문제 37.
정답
(1) 모든 실수에서 연속이다.
(2) $x\neq -3$, $x\neq 2$인 모든 실수에서 연속이다.

문제 38.
정답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제 39.
정답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제 40.
정답
일차함수 $f(x)=x+2$, 이차함수 $g(x)=x^2$은 모든 실수 x에서 연속이다.
따라서 연속함수의 성질에 의하여
함수 $f(x)g(x)=(x+2)x^2=x^3+2x^2$은 모든 실수,
즉 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속이다.
또, 연속함수의 성질에 의하여
함수 $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x+2}{x^2}$는 $x\neq 0$인 실수,
즉 구간 $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ \infty)$에서 연속이다.

문제 41.
정답 (1) $(-\infty,\ \infty)$ (2) $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(1,\ \infty)$

문제 42.

정답 ㄴ, ㄷ

문제해설

ㄱ. $\lim_{x \to 0-} \{f(x)+g(x)\} = 0+(-1) = -1$

$\lim_{x \to 0+} \{f(x)+g(x)\} = 0+1 = 1$

$\lim_{x \to 0-} \{f(x)+g(x)\} \neq \lim_{x \to 0+} \{f(x)+g(x)\}$이므로

$f(x)+g(x)$는 $x=0$에서 연속이 아니다.

ㄴ. $\lim_{x \to 0} f(x)g(x) = f(0)g(0) = 0$이므로

$f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. $\lim_{x \to 0} f(x-1) = f(0-1) = 1$이므로

$f(x-1)$은 $x=0$에서 연속이다.

따라서 연속인 함수는 ㄴ, ㄷ

문제 43.

정답

(1) $(-\infty, \infty)$ (2) $(-\infty, -3)$, $(-3, -1)$, $(-1, \infty)$

(3) $(-\infty, -1)$, $(-1, \infty)$

문제해설

(1) 함수 $f(x)-2g(x)$는 모든 실수에서 연속이므로 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.

(2) 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $g(x) \neq 0$인 모든 실수에서 연속이다.

즉, $x^2+4x+3 \neq 0$에서 $x \neq -1$, $x \neq -3$인 모든 실수에서 연속이므로 구간 $(-\infty, -3)$, $(-3, -1)$, $(-1, \infty)$에서 연속이다.

(3) 함수 $\dfrac{1}{f(x)+g(x)}$는 $f(x)+g(x) \neq 0$인 모든 실수에서 연속이다. 즉, $(x^2-1)+(x^2+4x+3) \neq 0$에서 $x \neq -1$인 모든 실수에서 연속이므로 구간 $(-\infty, -1)$, $(-1, \infty)$에서 연속이다.

문제 44.

정답 (1) $(-\infty, \infty)$ (2) $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$, $(2, \infty)$

문제 45.

정답

(1) 최댓값과 최솟값을 갖는다.

(2) 최댓값과 최솟값을 갖지 않는다.

문제 46.

정답 (1) 최댓값은 3 최솟값은 -1 (2) 최댓값은 4 최솟값은 2

문제 47.

정답 (1) 최댓값: 2, 최솟값: -2 (2) 최댓값: $\dfrac{1}{2}$, 최솟값: -1

문제 48.

정답

(1) 최댓값은 1, 최솟값은 -2 (2) 최댓값은 $\dfrac{17}{4}$, 최솟값은 2

(3) 최댓값은 -1, 최솟값은 없다 (4) 최댓값, 최솟값은 없다

문제 49.

정답

(1) 최댓값 4, 최솟값 0 (2) 최댓값 2, 최솟값 $\dfrac{1}{3}$

(3) 최댓값 4, 최솟값 2 (4) 최댓값 3, 최솟값 0

문제 50.

정답

(1) $x=0$에서 최댓값 $f(0)=0$을 가진다.

$x=1$에서 최솟값 $f(1)=-1$을 가진다.

(2) 최댓값과 최솟값은 없다.

(3) $x=0$에서 최댓값 $f(0)=0$을 가진다. 최솟값은 없다.

(4) $x=1$에서 최솟값 $f(1)=-1$을 가진다. 최댓값은 없다.

문제 51.

정답

(1) $x=2$에서 최댓값 $f(2)=3$을 가진다.

$x=-1$에서 최솟값 $f(-1)=0$을 가진다.

(2) $x=6$에서 최댓값 $f(6)=1$을 가진다.

$x=-2$에서 최솟값 $f(-2)=-1$을 가진다.

(3) $x=-2$에서 최댓값 $f(-2)=3$을 가진다.

$x=-1$에서 최솟값 $f(-1)=2$를 가진다.

문제 52.

정답

(1) $f(x)=x^4+2x^3+x+1$로 놓으면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 0]$에서 연속이고 $f(-1)=-1<0$, $f(0)=1>0$이므로 사이값 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1, 0)$에 적어도 하나 존재한다.

즉, 방정식 $x^4+2x^3+x+1=0$은 열린구간$(-1, 0)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

(2) $f(x)=x^2+x-\sqrt{x+1}$로 놓으면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 3]$에서 연속이고 $f(0)=-1<0$, $f(3)=10>0$이므로 사이값 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(0, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

즉, $\sqrt{x+1}=x^2+x$는 열린구간 (0, 3)에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

문제 53.

정답

$f(x)=x^3-\dfrac{x^2+1}{x+1}$로 놓으면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 [0, 2]에서 연속이고 $f(0)=-1<0$, $f(2)=\dfrac{19}{3}>0$이므로 사이값 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 (0, 2)에 적어도 하나 존재한다.

즉, 방정식 $x^3-\dfrac{x^2+1}{x+1}=0$은 열린구간 (0, 2)에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

문제 54.

정답

$f(x)=x^3+x^2-3$으로 놓으면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 [1, 2]에서 연속이고 $f(1)<0$, $f(2)>0$이므로 사이값 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 (1, 2)에 적어도 하나 존재한다.

즉, 방정식 $x^3+x^2-3=0$은 열린구간 (1, 2)에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

문제 55.

정답

$f(0)\times f(1)$의 값이 음수이므로 $(0, 1)$에서 적어도 하나 존재한다.

문제 56.

정답

(1) $f(-2)\times f(3)$의 값이 음수이므로 $(-2, 3)$에서 적어도 하나 존재한다.

(2) $f(1)\times f(2)$의 값이 음수이므로 $(1, 2)$에서 적어도 하나 존재한다.

문제 57.

정답

$f(0) \times f(1)$의 값이 음수이므로 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나 존재한다.

문제 58.

정답

(1) $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$이라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1,\ 0]$에서 연속이고 $f(-1)=-15<0$, $f(0)=1>0$이다. 따라서 사이값 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 -1과 0 사이에 적어도 하나 존재한다. 즉, 방정식 $x^3-6x^2+9x+1=0$은 열린구간 $(-1,\ 0)$에서 적어도 하나의 실근을 가진다.

(2) $f(x)=\sqrt{2x^2-1}-2$라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 연속이고 $f(1)=-1<0$, $f(2)=\sqrt{7}-2>0$이다. 따라서 사이값 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 1과 2 사이에 적어도 하나 존재한다. 즉, 방정식 $\sqrt{2x^2-1}-2=0$은 열린구간 $(1,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 가진다.

문제 59.

정답

$f(x)=x^3-2x-3$이라고 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 연속이고 $f(1)=-4<0$, $f(2)=1>0$이므로 사이값 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 1과 2 사이에 적어도 하나 존재한다.
즉, 삼차방정식 $x^3-2x-3=0$은 열린구간 $(1,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.