2017학년도 2학기 강의노트

수학Ⅱ

정국필 著

全州大學校師範大學附設高等學校

【목 차】

Ⅱ. 함수

Ⅲ. 수열

잔소리 몇 마디만 하고 시작하겠습니다

본 수업 교재는 2017년 2학기에 1학년을 대상으로 수학수업을 진행하며 보충교재로 사용하기 위해 제작한 강의노트입니다. 평소학생들이 필기를 하는 습관을 가지지 못해 필기가 필요한 중요한 내용을 놓치는 경우가 많아 안타까워 하던 차에 '보충 설명을 자료로 남기자'라는 생각으로 만들게 되었습니다. 따라서 본 강의노트는 수학책에 있는 내용을 재구성하여 설명하는 것에 많은 비중을 두고 집필되었습니다.

본 강의노트는 고등학교 1학년 수업을 하면서 수업시간에 나누어 주던 자료에 일부 첨가하여 2014년 6월에 제작하였으며, 2017년에 새롭게 편집하여 만들었습니다. 본문에 대한 설명은 지난 십여년 동안 강의하면서 학생들이 자주 곤란을 느끼는 부분에 대한 설명에 많은 비중을 두었으며, 본 강의노트에 있는 문제는 최근 실시된 정기고사의 문제와 새롭게 개발한 문제들을 수록하였습니다. 본 강의노트에 있는 내용은 교정을 보지 않은 상태로 간혹 오타와 오류가 있을 수 있습니다. 이를 감안하여 주시기 바라며, 작은 실수가 있더라도 넓은 마음으로 이해해주시기 바랍니다.

본 강의노트는 앞부분에 개념설명, 뒷부분에 연습문제가 있습니다. 문제만 풀려하지 말고 설명을 충분히 익힌 후에 문제를 풀기 바랍니다. 본 문제지에 있는 문제는 많지 않습니다. 본 문제지에 있는 문제를 다 풀 수 있다면 조금 더 난이도 있는 문제지를 풀어보기를 권합니다.

수학을 잘하고자 하는 학생들을 위해 몇 가지 당부를 드립니다.

수학은 정의로부터 시작되는 학문입니다.

똑같은 시간을 수학공부를 해도 수학을 잘하는 학생과 못하는 학생으로 나눠지는 가장 큰 이유는 수학을 공부하는 방법의 차이 때문에 발생합니다. 수학을 잘하는 학생은 수학적 개념의 정의를 이해하고 개념을 숙지하는데 많은 시간을 할애하지만, 계산에만 치중하여 공부하는 경향을 보이는 학생들은 수학을 잘하기가 쉽지 않습니다. 수학공부를 잘하기 위해서는 반드시 정의를 이해하고 이를 바탕으로 하는 설명과 증명을 꼭 익숙하게 공부한 이후에 문제와 계산을 통해 이해하고 있는 수학개념이 바르게 이해되었는지 확인하는 순서로 공부를 해야 합니다.

수학은 귀납적으로 공부하는 것도 도움이 많이 됩니다.

수학을 공부하는 데 있어서 이론과 실제의 괴리에 대한 어려움을 호소하는 학생이 많은데 이를 해결하기 위해서는 수학개념의 일반성과 예외성을 잘 구분할 수 있으면 됩니다. 이는 이론이 만들어진 과정의 반대 과정이라고 할 수 있는 다양한 사례를 찾아보는 과정이 도움이 될 것입니다.

외울 것과 이해할 것을 구분하여 학습해야 합니다.

수학은 기본적으로 이해하는 학문입니다. 하지만 정의, 정리 등이 암기가 되어있지 않다면 수학은 더 이상 나아갈 수 없습니다. 우리가 아무리 한국어를 잘 구사한다 하더라도 일상적으로 사용하는 단어를 기억하지 못한다면 우리는 한마디도 말을 할 수 없을 것입니다. 수학교과서에서 중요하다고 여겨지는 내용은 박스안에 내용이 담겨져 있습니다. 이는 반드시 암기가 되어야 하며, 암기를 하기 앞서 해당 내용을 충분히 이해를 해야 합니다.

꼬리에 꼬리를 무는 질문을 통해 개념을 정교하게 다듬어야 합니다.

수학뿐만 아니라 모든 학문을 공부할 때에는 반드시 자신에게 질문하는 습관이 필요합니다. 또한 자신의 질문에 완벽한 설명이 가능해질 때까지 스스로를 괴롭혀야 합니다. 이렇게 하다 보면 단순히 읽고 넘어갈 때와는 이해의 폭이 달라짐을 느낄 수 있습니다. 다른 친구들에게 자주 설명해 주는 습관을 갖는 것도 많은 도움이 됩니다. 자신이 생각하지 못했던 문제들을 친구들이 제기할 때 이를 해결하다 보면 점점 더 수학 실력이 비약적으로 발전하는 것을 발견할 수 있을 것입니다.

문제가 안 풀린다고 바로 해답을 보는 습관을 갖지 않기 바랍니다.

해답을 보면 금방 이해할 수 있겠지만 시간이 지나면 바로 잊혀 집니다. 심하게 고민한 흔적은 뇌에 학습 흔적을 남깁니다. 이 흔적은 시간이 지나도 쉽게 잊혀 지지 않습니다. 문제가 풀리지 않는다면 다양한 시도를 통해 그 문제가 뇌 속에 기억할 수 있도록 하시기 바랍니다.

노트정리를 하는 습관을 갖기를 바랍니다.

많은 학생들이 신학기에는 노트 정리를 시도하지만 몇 주 지나면 슬그머니 정리를 포기하곤 합니다. 대부분의 학생들은 정리가 필요하다는 말을 들었지만 정리의 방법을 잘 알지 못합니다. 노트 정리라는 것은 시시콜콜한 모든 것을 적는 것이 아닙니다. 정말 중요한 요점(要點)을 정리하는 것입니다. 중요한 것을 축약해서 정리하는 습관을 들이다 보면 적은 양의 DATA를 보고도 그 이면에 있는 많은 양의 정보들을 기억할 수 있게 될 것입니다.

노트정리의 Tip을 알려드립니다.

1. 노트에 정리할 때에는 이미 알고 있는 내용은 빈칸으로 남겨 두세요. 알고 있는 내용을 정리하다보면 시간낭비 한다는 생각도 들고 '내가 왜 이 짓을 하고 있지'라는 반문을 하게 되어 노트필기에 대한 무용론만 생각하게 됩니다.

2. 교과서의 목차에 따라 내용을 정리하세요. 중요하다고 생각하지만 그 체계가 잡혀 있지 않다면 그러한 노트는 쓰레기와 별 반 다를 것이 없습니다. 교과서의 목차는 수학을 공부하는데 있어 체계를 형성하고 있어 좋은 방향타가 될 것입니다.

3. 불현 듯 떠오르는 아이디어를 메모해 두세요. 공부를 하다보면 어느 날 갑자기 자신이 똑똑해져 있음을 발견할 때가 있습니다. 이럴 때 이해되고 새롭게 재구성한 정보들을 기록해 두세요. 시간이 지나면 이 좋은 아이디어가 잊혀집니다. 이럴 때 노트를 꺼내어서 찾아보면 그날 똑똑해졌던 시간으로 다시 돌아갈 수 있을 것입니다.

2학기 수업을 통해 수학공부의 체계가 잡혀 수학 실력이 한층 더 발전하기를 주님의 이름으로 기원하겠습니다.

2017년 8월 14일

가루비인지 보슬비인지 추적추적 비가내리는 어느 여름 밤. 늦게까지 학교에 남아서

단원 : Ⅳ-1 함수1	**월 일**

1. 함수의 조건

(1) 배경지식

① 대응 : 두 집합 X, Y에 대하여 **어떠한 관계에 의해** 집합 X의 각 원소에 대하여 집합 Y의 원소를 짝지어 주는 것. (주인공은 X이다)

② 대응관계의 표현 : $x \to y$(X의 원소 x가 Y의 원소 y에 대응할 때)

$f : X \to Y$ (대응관계 f에 의해 X의 각 원소가 Y의 오직 하나의 원소에 대응할 때)

③ 함수 : 위의 대응관계에서 X와 Y사이의 **관계** f

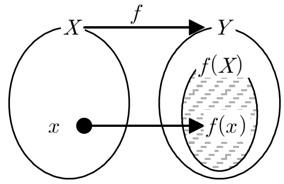
④ 함수의 표현 : $y=f(x)$ (Y의 원소 y는 X의 원소 x와 f에서 설명하는 관계에 있다. - 주인공은 y이다)

⑤ 정의역 : 대응의 주체가 되는 x를 전부 모은 **집합** X

⑥ 공역 : 대응의 대상이 되는 y를 포함하는 집합 Y

⑦ 치역 : x에 의해 대응이 되는 y값만을 모든 집합 $f(X)$

⑧ 함숫값 : x에 의해 대응된 y값 $f(x)$



(2) 함수의 성립 조건

① 반드시 X의 모든 원소는 대응하는 Y의 원소 y가 존재해야 한다.

② 한 x에 대응되는 y값이 두 개 이상 존재할 수 없다.

③ 참고 : Y의 원소 중에는 X에 의해 대응되지 않는 원소가 있을 수 있다.

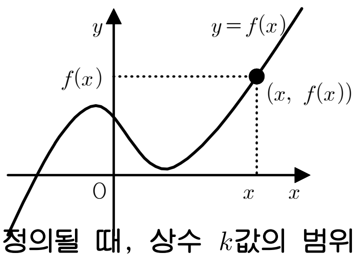
(3) 함수의 그래프

① x에 의해 대응하는 함숫값 $f(x)$의 순서쌍 전체의 집합

: $\{(x,\ f(x)) \mid x \in X\}$

② 예를 들어 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 상반원

: $\{(x,\ f(x)) \mid x^2+f(x)^2=2^2,\ f(x) \ge 0\}$



(4) 정의역이 $\{x \mid -1 \le x \le 3\}$, 공역이 $\{y \mid 0 \le y \le 5\}$인 함수 $f(x)=-x+k$가 정의될 때, 상수 k값의 범위를 구하여라.

함수가 되기 위해서는 정의역의 모든 x값의 함숫값 $f(x)$가 공역에 존재해야 한다.
또한 $f(x)=-x+k$는 기울기가 -1이므로 x값이 증가함에 따라 함숫값 $f(x)$가 감소하는 함수이다.
따라서 $x=-1$일 때 $f(-1)$는 최댓값을 가지므로 $f(-1) \le 5$ 가 성립해야 한다. 따라서 $-(-1)+k \le 5$ 이므로 $k \le 4$ …①
$x=3$일 대 $f(3)$는 최솟값을 가지므로 $f(3) \ge 0$ 가 성립해야 한다. 따라서 $-(3)+k \ge 0$ 이므로 $k \ge 3$ … ②
①식과 ②식을 모두 만족해야 하므로
따라서 $3 \le k \le 4$

2. 함수의 종류

(1) 일대일함수

① X의 원소가 각각 **서로 다른** Y의 원소에 대응되는 관계

② $x_1 \ne x_2$이면 $f(x_1) \ne f(x_2)$

③ 예) $X=\{1,2,3\}$, $Y=\{1,2,3,4\}$, $f(x)=x+1$

(2) 일대일 대응

① X의 원소가 각각 **서로 다른** Y의 원소에 **빠짐없이** 대응되는 관계

② $x_1 \ne x_2$이면 $f(x_1) \ne f(x_2)$, $n(X)=n(Y)$

③ 예) $X=\{1,2,3\}$, $Y=\{1,4,9\}$, $f(x)=x^2$

(3) 항등함수

① 정의역의 모든 원소 x에 대하여 자기 자신에게 대응 되는 관계

② $f(x)=x$

③ 예) 직선 $y=x$

(4) 상수함수

① 정의 역의 모든 원소 x의 함숫값이 같은 함수

② 예) 직선 $y=c$ (단, c는 상수)

(5) 다음을 구하여라.

① 집합 $X=\{-2,\ 0,\ 2\}$에 대하여 X에서 X로의 세 함수 $f,\ g,\ h$는 각각 일대일 대응, 항등함수, 상수함수이다. $f(-2)=g(2)=h(0)$이고 $f(-2)+f(2)=f(0)$일 때,
$f(2)g(-2)h(2)$의 값은?

$g(x)$가 항등함수 이고 $g(2)=2$ 이므로 $f(-2)=g(2)=h(0)=2$,
$h(x)$가 상수함수 이고 $h(0)=2$ 이므로 $h(-2)=h(0)=h(2)=2$
$f(x)$가 일대일 함수 이고 공역이 $\{-2,\ 0,\ 2\}$ 이고 $f(-2)+f(2)=f(0)$ 이므로 $(-2)+(2)=(0)$ 이어야 하므로
$f(0)=0,\ f(-2)=2$ 이므로 $f(2)=-2$ 이다.
따라서 $f(2)g(-2)h(2)=(-2)\times(-2)\times(2)=8$

② 모든 자연수 n에 대하여 함수f를 $f(n)=(3^n$의 일의자리 자연수)로 정의할 때,
$f(1)+f(2)+f(3)+\ \cdots\ +f(10)$ 을 구하여라.

$f(1)=3=f(5)=f(9)$
$f(2)=9=f(6)=f(10)$
$f(3)=7=f(7)$
$f(4)=1=f(8)$
이므로 $f(1)+f(2)+\cdots+f(10)=(3+9+7+1)\times2+(3+9)=52$

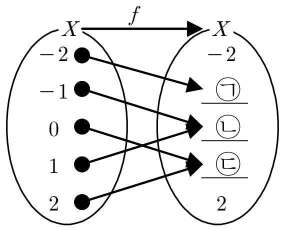
3. 새롭게 정의된 함수

(1) 새롭게 정의된 함수를 해결

① 새롭게 정의된 함수에서는 대응관계를 그림으로 그려본다.
② 함수식으로 주어져 있다면 주어진 규칙대로 함숫값을 하나씩 계산해본다.
③ $f(ax+b)=\triangle$ 꼴로 주어진 함수를 $f(x)=\ \cdots$꼴로 나타낸다.
(즉, $ax+b$를 t로 치환하여 $f(t)=\ \cdots$로 나타낸 다음 함숫값을 구한다.)

(2) 집합 $X=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$에 대하여 함수 $f:X\to X$ 를

$f(x)=\begin{cases} x-1 & (x>0) \\ 1 & (x=0) \\ x+1 & (x<0) \end{cases}$ 로 정의할 때, 다음을 구하여라.



① 오른쪽 대응 관계에서 밑줄 친 부분에 알맞은 수를 구하여라.
㉠ : $f(-2)=(-2)+1=-1$, ㉡ : $f(-1)=f(1)=0$, ㉢ : $f(2)=2-1=f(0)=1$

② 함수 f의 치역을 구하여라.
$\{-1,\ 0,\ 1\}$

(3) 함수 $f(x)$에 대하여 $f(3x-1)=9x^2-6x$라 할 때 다음을 구하여라.

① $f(-1)$의 값을 구하여라.
$f(-1)$은 $f(3x-1)$에서 $x=0$이면 되므로
$f(-1)=f(3\times0-1)=9\times0-6\times0=0$

② $f(-4)$의 값을 구하여라.
$f(-4)$은 $f(3x-1)$에서 $x=-1$이면 되므로
$f(-4)=f(3\times(-1)-1)=9\times(-1)^2-6\times(-1)=15$

③ $f(x)$를 구하여라.
$3x-1=t$라 하자. 그러면 $3x=t+1$ 이므로
$9x^2-6x=(3x)^2-2\times(3x)=(t+1)^2-2(t+1)=t^2+2t+1-2t-2=t^2-1$
따라서 $f(t)=t^2-1$ 이므로 $f(x)=x^2-1$

(4) $f\left(\dfrac{x+1}{2}\right)=2x-3$일 때, 다음을 구하여라.

① $f(x)$의 값을 구하여라.
$\dfrac{x+1}{2}=X$라 하자. 그러면 $x=2X-1$ 이므로 $2x-3=2(2X-1)-3=4X-5$ 따라서 $f(X)=4X-5$ 이므로 $f(x)=4x-5$

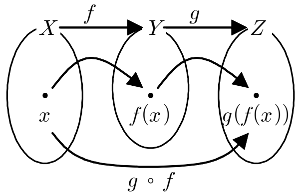
② $f\left(\dfrac{x-2}{4}\right)$의 값을 구하여라.
$f(x)=4x-5$이므로 $f\left(\dfrac{x-2}{4}\right)=4\times\left(\dfrac{x-2}{4}\right)-5=x-2-5=x-7$, 따라서 $f\left(\dfrac{x-2}{4}\right)=x-7$

③ $f(2)$의 값을 구하여라.
$f(x)=4x-5$이므로 $f(2)=4\times2-5=3$

단원 : Ⅳ-1 함수2　　　월　　일

1. 합성함수

(1) 합성함수



① 합성함수의 정의 : 두 함수 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$에 대하여 X의 각 원소 x에 Z의 원소 $g(f(x))$를 대응시키는 새로운 함수

② 합성함수의 표현 : $g \circ f : X \to Z$ 또는 $z = g(f(x))$

③ 합성함수는 왼쪽의 함수부터 변환을 시작한다. (←방향으로 계산한다)

④ 같은 함수를 여러차례 합성할 때는 규칙을 찾아낸다.

(2) 합성함수의 성질

① 교환법칙이 성립하지 않는다. 즉, $f \circ g \neq g \circ f$

② 결합법칙이 성립한다. 즉, $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

③ $f: X \to X$ 일 때, $f \circ I = I \circ f = f$ (단, I는 항등함수)

(3) 다음은 두 함수 f, g에 대하여 $(g \circ f)(x)$를 구하는 과정이다. (　　)안에 알맞은 식을 써넣어라.

① $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 2x - 3$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$= g(x^2 - 1)$

$= 2(x^2 - 1) - 3$

$= (2x^2 - 5)$

② $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2 - x - 2$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$= g(2x + 1)$

$= ((2x+1)^2) - (2x + 1) - 2$

$= (4x^2 + 2x - 2)$

(4) 두 함수 $f(x) = \begin{cases} -2x + 5 & (x \geq 2) \\ 1 & (x < 2) \end{cases}$, $g(x) = x^2 + x - 2$에 대하여

$(f \circ g)(-1) + (g \circ f)(3)$의 값을 구하여라.

$g(-1) = -2$, $f(3) = -1$ 이므로

$f(g(-1)) + g(f(3)) = f(-2) + g(-1)$

$f(-2) = 1$, $g(-1) = -2$ 이므로

$(f \circ g)(-1) + (g \circ f)(3) = 1 + (-2) = -1$

(5) 세 함수 $f(x) = x - 2$, $g(x) = 2x + 1$, $h(x)$에 대하여 $(h \circ g \circ f)(x) = g(x)$가 성립할 때, $h(-1)$의 값을 구하여라.

[sol1] $(h \circ g \circ f)(x) = h(g(f(x))) = h(g(x-2)) = h(2(x-2)+1) = h(2x-3)$ 이다.

$(h \circ g \circ f)(x) = g(x)$이므로 $h(2x-3) = g(x) = 2x+1$ 이다.

$2x - 3 = -1$ 이면 $x = 1$ 이므로 $h(-1) = h(2\times(1) - 3) = g(1) = 2\times1+1 = 3$

[sol2] $h(2x-3) = 2x+1$ 이므로 $2x - 3 = X$ 라 하면 $x = \dfrac{X+3}{2}$ 이므로 $2x+1 = 2\times\dfrac{X+3}{2} + 1 = X+4$ 이다.

따라서 $h(X) = X+4$ 이므로 $h(x) = x+4$

$h(-1) = -1+4 = 3$

(6) $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 1$로 대응되는 함수 $f: \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$에 대하여

$f^1(x) = f(x)$, $f^2(x) = f(f(x))$, $f^3(x) = f(f^2(x)) = f(f(f(x)))$, $\cdots$

로 정의할 때, $f^5(1) + f^6(2) + f^7(3)$의 값을 구하여라.

$f(1) = 2$ 이고 $f^2(1) = (f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(2) = 3$, $f^3(1) = (f \circ f \circ f)(1) = f(f(f(1))) = f(f(2)) = f(3) = 1$ 이다.

따라서 $f^3 = I$ 항등함수) 이므로 $f^{3n} = I^n$ 이 성립하고 $f^{3n}(x) = I^n(x) = x$ 가 성립한다.

따라서 $f^5(1) = f^2(1) = f(f(1)) = f(2) = 3$

$f^6(2) = f^3(2) = I(2) = 2$

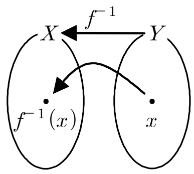
$f^7(3) = f^4(3) = f(3) = 1$

따라서 $f^5(1) + f^6(2) + f^7(3) = 3+2+1 = 6$

2. 역함수

(1) 역함수

① 역함수의 정의 : 함수 $f : X \to Y$가 일대일 대응일 때, Y의 각 원소 y에 대하여 $y=f(x)$인 X의 원소 x를 대응시키는 새로운 함수



② 역함수의 표현 : f^{-1}

③ 역함수 예 : $y=f(x)$ 의 역함수가 $y=f^{-1}(x)$일 때, $f(1)=2$, $f(2)=4$이면 $f^{-1}(2)=1$, $f^{-1}(4)=2$ 이다.

④ 역함수의 성질 (단, I는 항등함수)

❶ $f^{-1}\circ f=f\circ f^{-1}=I$ ❷ $(f^{-1})^{-1}=f$ ❸ $f\circ g=I \Leftrightarrow f=g^{-1},\ g=f^{-1}$

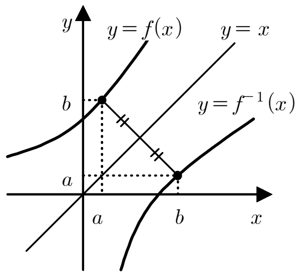
❹ $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$ ❺ $f(a)=b$ 이면 $f^{-1}(b)=a$

(2) 역함수의 존재

① 역함수의 존재성 : 역함수도 함수 이므로 반드시 대응하는 치역이 2개이상이면 안된다. $y=f^{-1}(x)$에 대하여 $x_1=x_2$일 때, $f^{-1}(x_1)\neq f^{-1}(x_2)$ 이면 역함수가 존재하지 않는다.

② $f(x)=x^2$ 에 대하여 $y=x^2$의 역함수는 존재하지 않는다. $y=1$ 이면 $x=\pm 1$이므로 $y=f^{-1}(x)$에 대하여 $x=1$이면 $y=\pm 1$ 이다. 따라서 역함수는 존재하지 않는다.

(3) 역함수의 그래프



① $y=f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$가 존재할 때, 두 함수 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$는 $y=x$에 대하여 대칭이다.

② 예를 들어 $y=2x+4$의 역함수는 $x=2y+4$ 이다.

(4) 다음은 일대일 대응인 함수의 역함수를 구하는 과정이다. <보기>의 과정을 참고하여 표의 빈칸을 채워 각 함수의 역함수를 구하여라.

역함수 구하기	x에 대하여 정리하기	y와 x를 서로 바꾸기	역함수의 정의역
<보기> $y=2x \quad (x\geq 1)$	$x=\frac{1}{2}y$	$y=\frac{1}{2}x$	$\{x\mid x\geq 2\}$
① $y=-4x+4 \quad (x\geq 0)$	$x=-\frac{1}{4}y+1$	$y=-\frac{1}{4}x+1$	$\{x\mid x\leq 4\}$ …㉠
② $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3} \quad (x>1)$	$x=3y+1$	$y=3x+1$	$\{x\mid x>0\}$ … ㉡
③ $y=x^2 \quad (x\geq 0)$	$x=\sqrt{y}$	$y=\sqrt{x}$	$\{x\mid x\geq 0\}$

㉠ : 역함수의 정의역은 원함수의 치역이므로 $y=-4x+4 \quad (x\geq 0)$ 의 치역은 y값이므로 y값의 범위가 역함수의 정의역이 된다. 따라서 $x\geq 0$ 이므로 $-4x\leq 0$, $y=-4x+4\leq 4$ 이므로 $y\leq 4$, 따라서 역함수의 정의역은 $\{x\mid x\leq 4\}$ 이다.

㉡ : $x>1$ 이므로 $\frac{1}{3}x>\frac{1}{3}$, $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}>\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0$ 이므로 $y>0$, 따라서 역함수의 정의역은 $\{x\mid x>0\}$

(5) 함수 $f(x)=2x+1$에 대하여 $(f^{-1}\circ f\circ f^{-1})(3)$의 값을 구하여라.

$f(x)=2x+1$이므로 역함수를 구하면 $x=\frac{f(x)-1}{2}$ 이므로 $f^{-1}(x)=\frac{x-1}{2}$ 이다.

$f\circ f^{-1}=I$(항등함수) 이므로 $(f\circ f^{-1})(3)=I(3)=3$, $(f^{-1}\circ f\circ f^{-1})(3)=f^{-1}(3)$

$f^{-1}(3)=\frac{3-1}{2}=1$

(6) 일차함수 $f(x)=3x-8$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표를 구하여라.

[sol1] $f(x)=3x-8$의 역함수를 구하면 $f^{-1}(x)=\frac{x+8}{3}$ 이므로 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 교점을 구하면

$3x-8=\frac{x+8}{3}$, $3(3x-8)=x+8$, $9x-x=8+24$ 이므로, 따라서 $x=4$, $f(4)=3\times 4-8=4$

따라서 교점은 $(4,\ 4)$

[sol2] 역함수는 원함수를 $y=x$축에 대하여 대칭인 함수이므로 원함수와 역함수의 교점은 $y=x$그래프와도 교점이 된다.

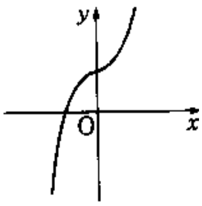
따라서 $f(x)=3x-8$과 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 교점은 $y=3x-8$과 $y=x$와의 교점을 구하면 된다.

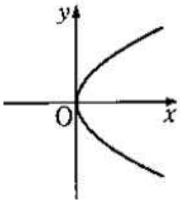
따라서 $3x-8=x$ 이므로 $2x=8$. 따라서 $x=4$, $y=4$

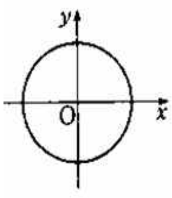
따라서 교점은 $(4,\ 4)$

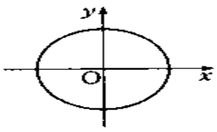
함수	단원 종합평가	이름:	월 일	점수 :

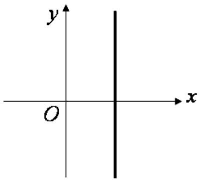
1. 다음 중에서 함수의 그래프인 것은?

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

모든 x의 범위에서 함수가 되는 것은 ①번 뿐이다.

2. 집합 $X=\{1, 4\}$를 정의역으로 갖는 두 함수 $f(x)=-2x+1$과 $g(x)=x^2+ax+b$가 서로 같을 때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

$f(1)=-1,\ f(4)=-7$ 이고 두 함수 $f,\ g$가 같은 함수이므로 $f(1)=g(1)=a+b+1=-1$
따라서 $a+b=-2$

3. 함수 $f(x)=2x^2$, $g(x)=x+3$에 대하여 $(g\circ f)(-1)$의 값을 구하면?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

$f(-1)=2$ 이므로 $(g\circ f)(-1)=g(f(-1))=g(2)=5$

4. 함수 $f(x)=ax+b$에 대하여 $f(2)=-1$, $f^{-1}(2)=3$이 성립할 때, $f^{-1}(2)$의 값은? (단 a, b는 상수)

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

문제에 나와 있는 것처럼 $f^{-1}(2)=3$

5. 다음 함수의 역함수를 구하여라.

$$y=\frac{1}{3}x-5$$

$y=3x+15$

6. 다음 중 옳은 것은?

① 모든 일대일 대응은 일대일함수이다.
② 모든 함수는 반드시 역함수를 가진다.
③ 모든 일대일 함수는 역함수가 존재한다.
④ 두 함수의 상등을 따질 때는 정의역만 고려하면 된다.
⑤ 함수란 반드시 수식을 통해 그 관계식이 표현되어야 한다.

정답①

7. 함수 $f(x)=ax+b$에 대하여 $f(1)=1,\ \ f(2)=0$이라 할 때, $f^{-1}(0)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

$f(2)=0$ 이므로 $f^{-1}(0)=2$

8. 다음 중 역함수가 존재하는 함수는?

① $y=x-3$ ($x,\ y$는 모든 정수)
② $y=x^2+1$ (x는 모든 자연수, $y\geq 1$)
③ $y=|x-1|$ ($x,\ y$는 모든 실수)
④ $x^2+y^2=1$ ($-1<x<1,\ 0<y<1$)
⑤ $y=x^2-2x+1$ (x는 모든 실수, $y\geq 0$)

정답 ①

9. 두 함수 $f(x)=x-1,\ g(x)=2x+1$에 대하여 함수 h가 $(f\circ h)(x)=g(x)$를 만족시킬 때, $h(1)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

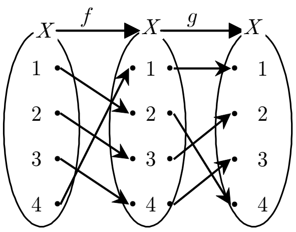
$f^{-1}(x)=x+1$ 이므로 $(f^{-1}\circ f\circ h)(x)=(f^{-1}\circ g)(x)$
$h(1)=f^{-1}(g(1))=f^{-1}(3)=4$

10. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 함수

$f\ :\ X \to X$

$g\ :\ X \to X$

가 오른쪽 그림과 같이 정의되었을 때, 다음 물음에 답하여라.



(1) $f(1)+g(2)$의 값을 구하여라.

$f(1)=2,\ g(2)=4$ 이므로 $f(1)+g(2)=6$

(2) $g^{-1}(4)+f^{-1}(2)$의 값을 구하여라.

$g(2)=4,\ f(1)=2$ 이므로 $g^{-1}(4)+f^{-1}(2)=2+1=3$

(3) $(g\circ f)^{-1}(4)$의 값을 구하여라.

$(g\circ f)(1)=4$ 이므로 $(g\circ f)^{-1}(4)=1$
또는
$(g\circ f)^{-1}(4)=(f^{-1}\circ g^{-1})(4)=f^{-1}(g^{-1}(4))=f^{-1}(2)=1$

11. 함수 $f(x)$에 대하여 $f(x-2)=x^2-4x$라 할 때 $f(-2)$의 값을 구하여라.

$f(x-2)=f(-2)$ 가 되려면 $x=0$ 이므로
$x=0\ :\ f(0-2)=0^2-4\times 0=0$

12. 두 함수

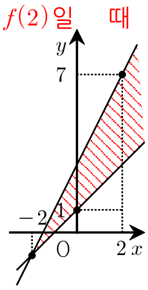
$f(x)=-x+3\ ,\quad g(x)=x^2-2x-3$

에 대하여 $(f\circ g)(-1)+(g\circ f)(3)$의 값을 구하여라.

$g(-1)=1+2-3=0,\ f(0)=3$
$f(3)=0,\ g(0)=-3$ 이므로
$f(g(-1))+g(f(3))=f(0)+g(0)=3-3=0$

13. 두 집합 $X=\{x|0\le x\le 2\},\ Y=\{y|1\le y\le 7\}$을 각각 정의역, 공역으로 하는 함수 $f(x)=mx+2m-1\ (m>0)$이 있다. 이 때 실수 m의 값의 범위를 구하여라.

$f(x)=m(x+2)-1$ 이므로 $y=f(x)$ 는 $(-2,\ -1)$을 지나고 기울기가 $m(>0)$인 직선이다.
$y=f(x)$가 함수가 되기 위해서는 $f(0),\ f(2)$일 때 $1\le y\le 7$의 범위의 함숫값을 가져야 하므로 $y=f(x)$의 기울기 m은 $(0,\ 1)$을 지나는 직선의 기울기(1)보다 커야 하며, $(2,\ 7)$을 지나는 직선의 기울기(2)보다 작아야 한다. 따라서 m의 범위는 $1\le m\le 2$ 이다.



14. $f(1)=2,\ f(2)=3,\ f(3)=1$로 대응되는 함수 $f:\{1,\ 2,\ 3\}\ \to\ \{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 함수의 지수, $f^1(x),\ f^2(x),\ f^3(x),\ \cdots$ 를

$f^1(x)=f(x),\ f^2(x)=f(f(x)),$
$f^3(x)=f(f^2(x))=f(f(f(x))),\ \cdots$

로 정의할 때,

$f^{100}(1)+f^{101}(2)-f^{102}(3)$의 값을 구하여라.

함수 f가 1:1 대응이고 정의역과 공역의 원소가 3개이므로
반드시 $f^3(x)=x$ 가 된다.
따라서 $f^{99}(x)=x$ 이므로 $f^{100}(1)=f(f^{99}(1))=f(1)=2$
$f^{101}(2)=f^2(f^{99}(2))=f^2(2)=f(3)=1$
$f^{102}(x)=x$이므로 $f^{102(3)}=3$
따라서 $f^{100}(1)+f^{101}(2)-f^{102}(3)=2+1-3=0$

15. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}1-x & (x\text{는 유리수})\\ x & (x\text{는 무리수})\end{cases}$$

일 때, $f(x)+f(1-x)$의 값을 구하여라.

x가 유리수이면 $1-x$도 유리수이므로
$f(x)+f(1-x)=1-x+\{1-(1-x)\}=1$
x가 무리수이면 $1-x$도 무리수이므로
$f(x)+f(1-x)=x+(1-x)=1$
따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+f(1-x)=1$

16. 함수 f는 임의의 실수 $x,\ y$에 대하여 $f(x+y)=f(x)+f(y)$를 만족한다. $f(2)=3$일 때, $f(-2)$의 값을 구하여라.

$f(0+0)=f(0)+f(0)$ 이므로 $f(0)=0$
$f(2-2)=f(2)+f(-2)$ 이므로
$f(-2)=f(0)-f(2)=-3$

17. 함수 $f(x)$에 대하여 정의역과 공역이 각각 $X=\{x|-1\le x\le 1\},\ Y=\{y|\ -1\le y\le 3\}$일 때, 함수 $f(x)=ax+b\ (a<0)$는 일대일 대응이다. 이 때 $a,\ b$값을 구하여라.

$a<0$ 이므로 $f(x)$는 감소함수이다.
따라서 $f(-1)>f(1)$ 이 성립되어야 한다.
또한 일대일 대응 이므로 $f(-1)$은 최댓값 3이고
$f(1)$은 최솟값 -1이다.
$f(-1)=\ -a+b=3$
$f(1)=a+b=\ -1$
따라서 $a=\ -2,\ b=1$

18. 정의역 X의 원소의 개수 $n(X)=a$, 공역 Y의 원소의 개수 $n(Y)=b$ 이라 할 때, X에서 Y로의 함수의 개수는 b^a이다.
집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 집합 X에서 X로의 함수의 개수를 p, 일대일 함수의 개수를 q, 항등함수의 개수를 r, 상수함수의 개수를 s라고 할 때, 함수이면서 일대일 함수도 아니고 항등함수도 아니고 상수함수도 아닌 함수의 개수는?

함수의 개수 $p=3^3=27$
일대일 함수(일대일 대응)의 개수 $q=3!=3\times2\times1=6$
항등함수의 개수 $r=1$
상수함수의 개수 $s=3$ 이고 항등함수는 일대일함수에 포함되므로
$27-(6+3)=18$

19. 자연수 전체의 집합 $\mathbb{N}$ 에서 $\mathbb{N}$ 으로의 함수 f를

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2} & (x\text{는 짝수})\\ x-3 & (x\text{는 홀수})\end{cases}$$

로 정의할 때, $(f\circ f\circ f)(20)$의 값을 구하여라.

$f(20)=10,\ f(10)=5,\ f(5)=2$ 이므로
$(f\circ f\circ f)(20)=2$

20. 자연수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(n)=\begin{cases}n-2 & (n\geq 100)\\ f(f(n+4)) & (n<100)\end{cases}$$

에 대하여 $f(80)$의 값을 구하여라.

$f(80)=f(f(84))$
$f(84)=f(f(88))$
$f(88)=f(f(92))$
$f(92)=f(f(96))$
$f(96)=f(f(100))$
$f(100)=98$
$f(98)=f(f(102))=f(100)=98$ 이므로
$f(96)=f(f(100))=f(98)=98$
$f(92)=f(f(96))=f(98)=98$
같은 방법으로 $f(80)=98$

21. 일차함수 $f(x)=ax+b$는 모든 실수 x에 대하여 $f\circ f=f$가 성립할 때, $a+b$의 값을 구하여라. (단 $a,\ b$는 상수)

일차함수 $f(x)=ax+b$는 모든 실수 x에 대하여 역함수가 존재하므로 $f^{-1}\circ f\circ f=f^{-1}\circ f=I$(항등함수)
따라서 $f(x)=x$ 이므로 $a=1,\ b=0$

22. 두 함수 $f(x)=2x-1,\ g(x)=\dfrac{1}{2}x-1$에 대하여 $\left(f^{-1}\circ g\right)^{-1}(3)$의 값을 구하여라.

$(f^{-1}\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f$ 이므로
$(g^{-1}\circ f)(3)=g^{-1}(f(3))=g^{-1}(5)$
한편 $g(12)=5$ 이므로 $g^{-1}(5)=12$

23. 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$일 때, 함수 $f(3x)$의 역함수는?

문제를 객관식으로 냈어야 했는데 주관식으로 출제해서 미안~~ ㅠ_ㅠ

$f^{-1}(x)=g(x)$ 이고 $h(x)=3x$라 하면
$h^{-1}(x)=\dfrac{1}{3}x$ 이고 $f(3x)=f(h(x))=(f\circ h)(x)$ 이므로
$\{f(3x)\}^{-1}=(f\circ h)^{-1}(x)=\left(h^{-1}\circ f^{-1}\right)(x)=h^{-1}\left(f^{-1}(x)\right)$
$=h^{-1}(g(x))=\dfrac{1}{3}g(x)$

단원 : Ⅳ-3 유리함수	월 일

1. 유리함수

(1) 배경지식

① 유리식 : 두 다항식 A, B에 대하여 $\frac{A}{B}$ $(B\neq 0)$의 꼴로 나타내어지는 식을 **유리식**이라 한다.

② 분수식 : 두 다항식 A, B에 대하여 $\frac{A}{B}$ $(B\neq 0)$ 유리식의 **분모 B가 일차이상의 다항식**인 유리식

③ 점근선 : 곡선이 어떤 직선과 한없이 가까워지지만 서로 만나지 않을 때, 그 직선을 **점근선**이라 한다.

(2) 유리함수의 뜻

① 유리함수의 정의 : 함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 **유리식**일 때, 함수 $f(x)$를 **유리함**수라 한다.

② 분수함수의 정의 : $f(x)$가 x에 대한 **분수식**일 때, 함수 $y=f(x)$를 **분수함수**라 한다.

③ 유리함수의 형태 : $y=\frac{k}{x-p}+q$ $(k\neq 0)$

(3) 다음 함수를 다항함수, 분수함수, 유리함수로 구분하여라.

① $y=\frac{x+1}{2}$ (다항, 분수, 유리)

② $y=\frac{2}{x+1}$ (다항, 분수, 유리)

③ $y=\frac{3x^2+6x}{x+2}$ (다항, 분수, 유리)

④ $y=\frac{1}{2x}+2$ (다항, 분수, 유리)

2. 유리함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프

(1) $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq 0)$의 그래프의 성질

① 정의역과 치역은 모두 0을 제외한 모든 실수전체의 집합. 따라서 $\mathbb{R}-\{0\}$(단 $\mathbb{R}$은 모든 실수전체의 집합)
따라서 $x=0$일 때에는 함숫값이 존재하지 않는다.

② 원점과 직선 $y=\pm x$에 대하여 대칭

③ 점근선은 x축과 y축

④ $k>0$ 이면 x, y는 서로 같은 부호이므로 제 I, III 사분면에 있다.

⑤ $k<0$ 이면 x, y는 서로 다른 부호이므로 제 II, IV 사분면에 있다.

⑥ $|k|$의 값이 커질수록 그래프는 원점에서 멀어진다.

(2) 다음 분수함수의 그래프를 그리고, 각 함수의 점근선을 구하여라.

① $y=\frac{1}{x}$

② $y=-\frac{2}{x}$

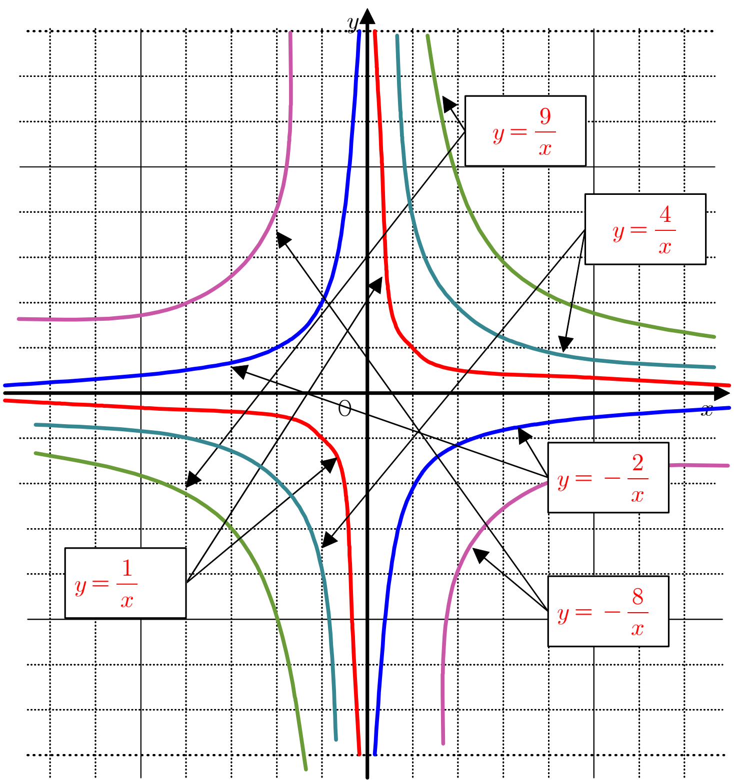
③ $y=\frac{4}{x}$

④ $y=-\frac{8}{x}$

⑤ $y=\frac{9}{x}$

⑥ $xy=16$
(그래프는 생략함)

모든 분수함수의 점근선은 $x=0$, $y=0$



3. 유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$의 그래프

(1) $y=\dfrac{k}{x-p}+q\ (k\neq 0)$의 그래프의 성질

① $y=\dfrac{k}{x}$그래프를 x축 방향으로 p만큼, y축 방향으로 q만큼 평행이동한 함수이다.

② 정의역은 $\mathbb{R}-\{p\}$ 이고, 치역은 $\mathbb{R}-\{q\}$ 이다. (단 $\mathbb{R}$은 모든 실수전체의 집합)
따라서 $x=p$ 일 때에는 함숫값이 존재하지 않는다.

③ 점근선은 $x=p,\ y=q$

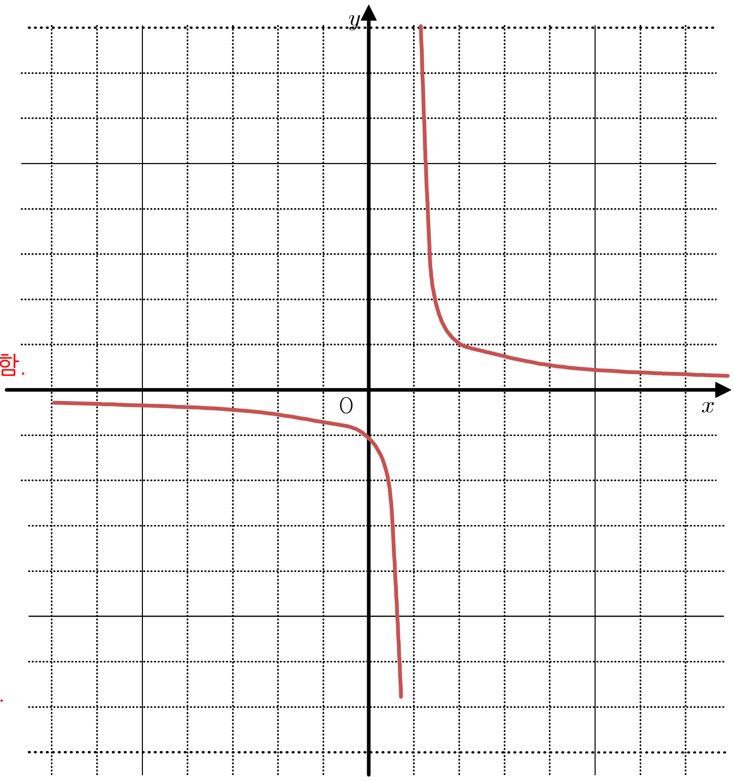
④ 모든 $y=\dfrac{x\text{에 대한 1차 다항식}}{x\text{에 대한 1차 다항식}}$ 꼴은 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$의 꼴로 고칠 수 있다.

⑤ 점$(p,\ q)$, 직선 $y-q=\pm(x-p)$에 대하여 대칭

⑥ $y=\dfrac{cx+d}{ax+b}$의 점근선 구하기 : $x=\left(ax+b=0\text{을 만족하는 } x\text{값}, -\dfrac{b}{a}\right)$, $y=\left(\text{분모 분자의 계수의 비}, \dfrac{c}{a}\right)$

⑦ $f(x)=\dfrac{cx+d}{ax+b}$의 역함수는 (분모의 상수 b)와 (분자의 x의 계수 c)를 부호를 바꾸고 위치를 바꾼 식
$f^{-1}(x)=\dfrac{-bx+d}{ax-c}$ 이다.

(2) 다음 분수함수의 그래프를 그리고,
각 함수의 점근선을 구하여라.



① $y=\dfrac{1}{x-1}$ 점근선은 $\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$

② $y=\dfrac{2}{x-2}$ 점근선은 $\begin{cases}x=2\\y=0\end{cases}$, 그래프는 생략함.

③ $y=\dfrac{4}{x+1}+2$ 점근선은 $\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}$, 그래프는 생략함.

④ $y=\dfrac{-3x}{x+3}$ 점근선은 $\begin{cases}x=-3\\y=-3\end{cases}$, 그래프는 생략함.

⑤ $y=\dfrac{-x+9}{x-1}$ 점근선은 $\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$, 그래프는 생략함.

⑥ $xy-3x+2=0$ 점근선은 $\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$, 그래프는 생략함.

(3) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ 의 역함수를 구하여라.

$(x-1)y=x+1$ 이므로 $y=x$에 대하여 대칭이동한 식(역함수)를 구하면 $(y-1)x=y+1$

y에 관하여 정리하면 $xy-y=x+1$, 따라서 $y=\dfrac{x+1}{x-1}$

참고로 $y=\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}+1$ 이므로 점근선 $y=1,\ x=1$을 서로 바꿔도 같은 식이므로 역함수는 처음식과 같다.

(4) $y=\dfrac{bx+c}{x+a}$이 $(3,\ 0)$을 지나고 점근선이 $x=2,\ y=-3$ 일 때, 상수 $a,\ b,\ c$ 의 값을 구하여라.

점근선이 $x=2, y=-3$ 이므로 $a=-2,\ b=-3$ 이다. $(3,\ 0)$을 지나므로 $0=\dfrac{-3\times 3+c}{3-2}$ 이므로 $c=9$

(5) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$에 대하여 합성함수 $(f\circ f\circ f)(x)$의 그래프가 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭일 때, 상수$a,\ b$의 값은?

(3)에 의하여 $f(x)=f^{-1}(x)$ 이므로 $(f\circ f\circ f)(x)=f(x)$ 이고, 유리함수는 점근선의 교점에 대하여 대칭이므로 $(a,\ b)$는 함수 $f(x)$의 점근선의 교점이다. 따라서 $(a,\ b)=(1,\ 1)$, $\therefore\ a=1,\ b=1$

단원 : Ⅳ-4 무리함수	월 일

1. 무리함수의 뜻

⑴ 배경지식

① 무리식 : 근호 안에 문자를 포함하는 식 중에서 유리식이 아닌 식

② 무리식의 값이 실수가 되기 위한 조건 : $\sqrt{P(x)}$ 에 대하여 $P(x) \geq 0$

⑵ 무리함수의 뜻

① 무리함수의 정의 : 함수 $y = f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 **무리식**일 때, 함수 $f(x)$를 **무리함**수라 한다.

② 무리함수의 정의역 : $\sqrt{P(x)}$ 에서 $P(x) \geq 0$이기 위한 x의 범위

③ 무리함수의 치역 : $\sqrt{P(x)} \geq 0$ 일 때 y의 범위

③ 유리함수의 형태 : $y = \sqrt{a(x-p)} + q \ (a \neq 0)$

⑶ 다음 무리함수의 정의역과 치역을 구하여라.

① $y = \sqrt{2x}$

② $y = \sqrt{x-2} + 1$

③ $y = \sqrt{-x-4} + 2$

④ $y = -\sqrt{-3x+6} - 1$

2. 무리함수 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프

⑴ $y = \sqrt{ax} \ (a \neq 0)$의 그래프의 성질

① 정의역은 $ax \geq 0$ 이기 위한 x의 범위 이므로

$a > 0$ 이면 $x \geq 0$인 모든 실수, $a < 0$ 이면 $x \leq 0$ 인 모든 실수

② 치역은 $\sqrt{ax} \geq 0$ 이므로 $y \geq 0$인 모든 실수

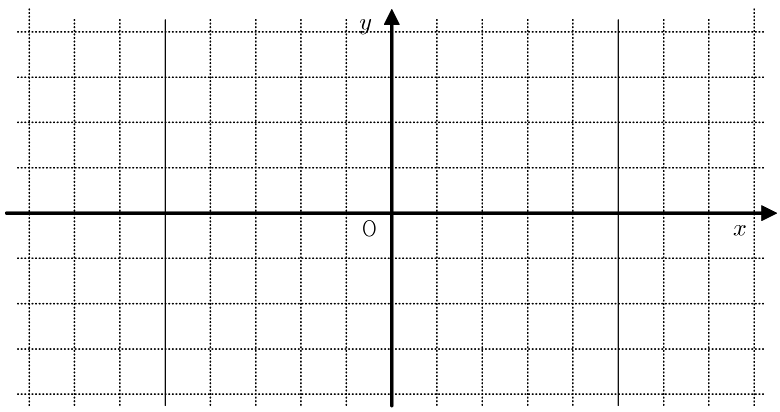
③ 공역이 치역과 같다고 하면 $y = \sqrt{ax}$ 는 일대일 대응이다. ⇔ **역함수가 존재한다.**

④ $y^2 = ax$ 이므로 $x = \dfrac{y^2}{a}$ 가 된다. 따라서 $y = \dfrac{x^2}{a}$는 $y = \sqrt{ax}$ 의 역함수이므로 $y = x$에 대칭이다.

⑤ $|a|$의 값이 클수록 그래프는 x축에서 멀어진다.

⑵ 다음 무리함수의 그래프를 그리고 정의역과 치역을 구하여라.

① $y = \sqrt{x}$



② $y = \sqrt{\dfrac{1}{4}x}$

③ $y = \sqrt{4x}$

④ $y = -\sqrt{x}$

⑤ $y = \sqrt{-x}$

⑥ $y = -\sqrt{-x}$

3. 무리함수 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$의 그래프

(1) $y=\sqrt{a(x-p)}+q$의 그래프의 성질

① $y=\sqrt{ax}$ 그래프를 x축 방향으로 p만큼, y축 방향으로 q만큼 평행이동한 함수이다.

② 정의역은 $a(x-p)\ge 0$ 이기 위한 x의 범위 이므로

$a>0$ 이면 $x\ge p$인 모든 실수, $a<0$ 이면 $x\le p$ 인 모든 실수

③ 치역은 $\sqrt{a(x-p)}\ge 0$ 이므로 $y\ge q$인 모든 실수

④ $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프는 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$꼴로 고쳐서 생각한다.

⑤ $a>0$이면 증가하는 함수이므로 $x=p$일 때 최솟값q 이고.

$a<0$이면 감소하는 함수이므로 $x=p$일 때 최댓값 q 를 갖는다.

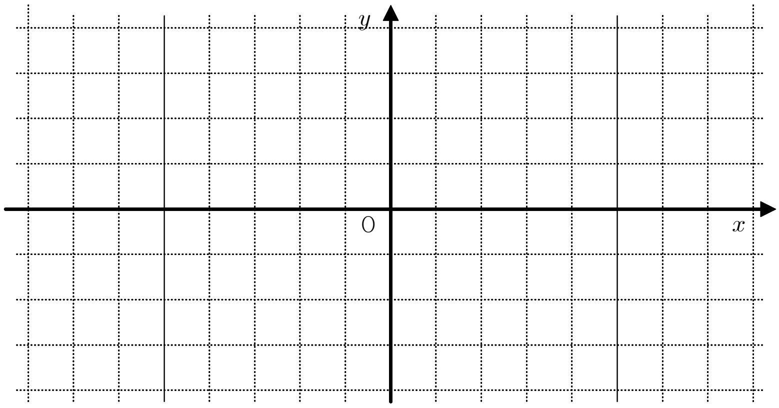
(2) 다음 무리함수의 그래프를 그리고(①~③), 정의역과 치역을 구하여라(①~④).

① $y=\sqrt{x-2}-2$

② $y=\sqrt{-x+2}-3$

③ $y=-\sqrt{x-2}-2$

④ $y=\sqrt{-x^2+2x+3}-1$



(3) 다음 무리함수를 $y=\pm\sqrt{a(x-p)}+q$ 꼴로 변형하고 y의 최댓값 또는 최솟값을 구하여라.

① $y=\sqrt{2x-2}+1$

② $y=-\sqrt{2x+6}+2$

③ $y=-\sqrt{-x-2}+3$

④ $y=-2\sqrt{-x-1}-4$

(4) $y=\sqrt{-3x+a}+b$ 의 정의역이 $\{x\,|\,x\le 1\}$, 치역이 $\{y\,|\,y\ge 3\}$일 때, 상수 a, b값을 구하여라.

(4) $y=\sqrt{x-1}$ 의 그래프와 직선 $y=x+k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 상수 k의 범위를 구하여라.

유리함수, 무리함수	단원종합평가	이름:	월 일	점수 :

※ 다음 명제가 옳으면 ○표, 틀리면 X표 하시오.[1-3]

1. 분수함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ 의 그래프는 $k>0$ 이면 반드시 제1사분면과 제3사분면을 지난다. (X)

2. 분수함수 $y=\dfrac{-1}{x}$의 그래프는 평행이동을 통해 분수함수 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프와 포갤 수 있다.(X)

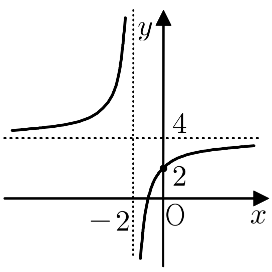
3. 무리함수 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$와 그 역함수의 교점은 $y=x$와의 교점과 같다.(O)

4. 분수함수 $y=\dfrac{3}{x-2}+1$ 의 점근선을 바르게 구한 것은?

① $(2,\ 1)$ ② $(-2,\ 1)$ ③ $x=2,\ y=1$
④ $x=-2,\ y=1$ ⑤ $y=\pm(x+2)+1$

정답 ③

5. 분수함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, $p+q+k$의 값으로 옳은 것은?(단, $k,\ p,\ q$는 상수)



① -2 ② -4 ③ 2 ④ 4 ⑤ 8

$p=-2,\ q=4$ ($\because$ 점근선)
$x=0$ 일 때 $y=1$ 이므로
$2=\dfrac{k}{0-(-2)}+4$
따라서 $k=-4$
$\therefore\ p+q+k=-2+4+(-4)=-2$

6. 분수함수 $y=\dfrac{1}{x-1}+2$ 에 대한 설명 중 옳은 것은?

① 역함수는 $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$이다.
② 제3사분면을 지나지 않는다.
③ 점 $(1,\ 1)$에 대하여 대칭이다.
④ $y=\dfrac{2}{x}$ 를 평행이동하면 겹쳐진다.
⑤ 정의역은 $x=1$, 치역은 $y=2$ 이다.

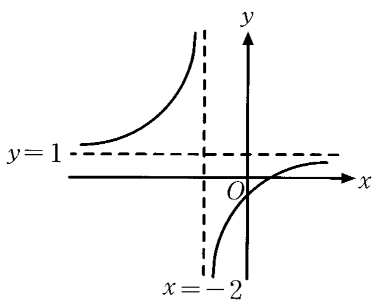
점근선이 $x=1,\ y=2$ 이므로 대칭점은 $(1,\ 2)$
역함수는 $y=\dfrac{1}{x-2}+1=\dfrac{x-1}{x-2}$
$x=0$ 일 때 $y=1$ 이므로 3사분면을 지나지 않는다.
정답 ②

7. 분수함수 $y=\dfrac{-x+3}{x-2}$의 그래프를 $y=\dfrac{c}{x-a}+b$라 할 때, 상수 $a,\ b,\ c$ 의 합 $a+b+c$의 값은?

① -1 ② -2 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

일반형을 표준형으로 변환하면
$y=\dfrac{-(x-2)+1}{x-2}=\dfrac{1}{x-2}-1$ 이므로
$a=2, b=-1, c=1$
따라서 $a+b+c=2$

8. 아래 그림의 개형과 같은 유리함수 그래프의 식은?



① $y=\dfrac{3}{x+2}+1$ ② $y=\dfrac{3}{x-2}+1$
③ $y=\dfrac{3}{x+2}-1$ ④ $y=-\dfrac{3}{x+2}+1$
⑤ $y=-\dfrac{3}{x-2}+1$

점근선이 $x=-2, y=1$ 이므로 $y=\dfrac{k}{x+2}+1$ 이다.
또한 점근선의 왼쪽 위와 오른쪽 아래에 그래프가 그려지므로 $k<0$ 이다. 따라서 정답은 ④

9. 분수함수 $y=\dfrac{ax+4}{x+2}$의 그래프와 점근선의 방정식이 $x=b,\ y=3$ 일 때, 상수$a,\ b$의 값을 구하면?

① $a=-3$, $b=-2$ ② $a=3$, $b=2$
③ $a=3$, $b=-2$ ④ $a=1$, $b=-2$
⑤ $a=1$, $b=-1$

점근선 $x=-2$ 이므로 $b=-2$
점근선 $y=a$ 이므로 $a=3$
따라서 정답은 ③

10. 분수함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$의 역함수가

$f^{-1}(x)=\dfrac{2x+5}{x-1}$일 때 상수 $a,\ b,\ c$의 합 $a+b+c$

의 값은?

역함수의 점근선이 $x=1, y=2$ 이므로 분수함수 $f(x)$의 점근선은 $x=2,\ y=1$이 되어야 한다.
따라서 $c=-2,\ a=1,\ f^{-1}(2)=9$ 이므로 $f(9)=2$
$f(9)=2=\dfrac{9+b}{9-2},\quad \therefore\ b=5$

11. 분수함수 $y=\dfrac{2x+1}{x+2}$의 그래프를 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$라 할 때, 상수 $p,\ q,\ k$ 의 합 $p+q+k$의 값은?

$\dfrac{2x+1}{x+2}=\dfrac{2(x+2)-3}{x+2}=\dfrac{-3}{x+2}+2$ 이므로
$p=-2,\ q=2,\ k=-3$
따라서 $p+q+k=-3$

12. 다음 중 분수함수 $y=\dfrac{1}{x-1}+3$ 에 대하여

(가) 점근선을 구하여라.

$x=1, y=3$

(나) 역함수를 구하여라.

$y=\dfrac{1}{x-3}+1$

(다) 지나지 않는 사분면을 구하여라.

대칭점이 $(1,\ 3)$ 이므로 반드시 I, II, IV 사분면을 지난다.
III사분면을 지나는 지 확인하기 위해 y절편을 구하면
$f(0)=\dfrac{1}{0-1}+3=2>0$ 이므로 원점 위를 지나므로
제 III 사분면은 지나지 않는다.

13. 분수함수 $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$의 그래프를 $y=\dfrac{k}{x-a}+b$라 할 때, 상수 $a,\ b,\ k$ 의 합 $a+b+k$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$y=\dfrac{2(x-1)+1}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}+2$ 이므로
$a=1,\ b=2,\ k=1$ 이므로 $a+b+k=4$
정답 ④

14. 다음 중 분수함수 $y=\dfrac{1}{x-2}+2$ 의 그래프에 대한 설명 중 바르지 않은 것은?

① 대칭점은 $(2,\ 2)$이다.
② 점근선은 $x=2,\ y=2$ 이다.
③ 제 3사분면을 지나지 않는다.
④ 모든 x에 대하여 함숫값을 가진다.
⑤ 평행이동을 하면 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프와 포개어 진다.

점근선이 $x=2,\ y=2$ 이므로 대칭점은 $(2,\ 2)$.
$f(x)=\dfrac{1}{x-2}+2$ 에 대하여 $f(0)=\dfrac{3}{2}$ 이므로 제 III 사분면을 지나지 않는다. 정의역은 $\mathbb{R}-\{2\}$ 이므로 $x=2$일 때 함숫값을 가지지 않는다. 정답은 ④

15. 함수 $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$의 역함수가

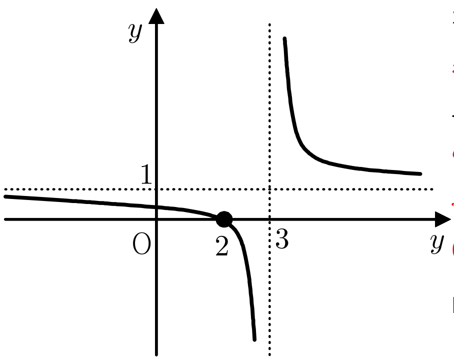
$f^{-1}(x)=\dfrac{bx+c}{x+a}$일 때, 상수 $a,\ b,\ c$의 합

$a+b+c$의 값을 구하면?

①-5 ②-3 ③-1 ④$0$ ⑤$1$

$f^{-1}(x)=\dfrac{-2x-1}{x-2}$ 이므로 $a=-2,\ b=-2,\ c=-1$
따라서 $a+b+c=-5$ 이므로 정답 ①

16. 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, $a+b+c$의 값을 구하시오.



점근선이 $x=3,\ y=1$ 이므로
$c=-3,\ a=1$
$f(2)=0$ 이므로
$0=\dfrac{2+b}{2-3}$
따라서 $b=0-2$
$\therefore\ a+b+c=-4$

17. 분수함수 $y=\dfrac{2x+1}{x+2}$의 점근선을 $x=p,\ y=q$라 하고, y절편을 k라 할 때, 상수 $p,\ q,\ k$ 의 합 $p+q+k$ 의 값은?

$p=-2,\ q=2\ \ k=\dfrac{0+1}{0+2}$ 이므로 $p+q+k=\dfrac{1}{2}$

18. 다음 중 분수함수 $y=\dfrac{3x-2}{x-1}$ 에 대하여

(가) 역함수를 구하여라.

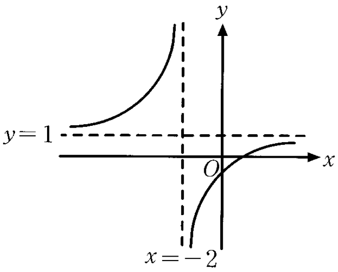
$y=\dfrac{x-2}{x-3}$

(나) 지나지 않는 사분면을 구하여라.

$y=\dfrac{3(x-1)+1}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}+3$ 이고

$x=0$ 일 때 $y=2$ 이므로 제III사분면을 지나지 않는다.

19. 아래 그림의 개형과 같은 유리함수 그래프의 식은?



① $y=\dfrac{3}{x+2}+1$

② $y=\dfrac{3}{x-2}+1$

③ $y=\dfrac{3}{x+2}-1$

④ $y=-\dfrac{3}{x+2}+1$

⑤ $y=-\dfrac{3}{x-2}+1$

유리함수의 비례상수를 k라 하면

$f(x)=\dfrac{k}{x+2}+1$ 이다. $f(0)<0$ 이므로

$f(0)=\dfrac{k}{2}+1<0$ 따라서 $k<-2$ 정답은 ④

20. 무리함수 $y=\sqrt{2-x}\ +1$의 정의역과 치역을 바르게 구한 것은?

① 정의역 : $\{x\,|\,x>2\}$, 치역 : $\{y\,|\,y<1\}$

② 정의역 : $\{x\,|\,x\geq 2\}$, 치역 : $\{y\,|\,y\geq 1\}$

③ 정의역 : $\{x\,|\,x\geq 2\}$, 치역 : $\{y\,|\,y\leq 1\}$

④ 정의역 : $\{x\,|\,x\leq 2\}$, 치역 : $\{y\,|\,y\geq 1\}$

⑤ 정의역 : $\{x\,|\,x\leq 2\}$, 치역 : $\{y\,|\,y\leq 1\}$

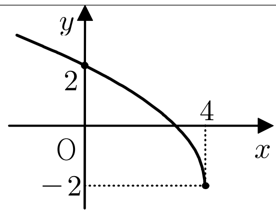
$2-x\geq 0$ 이므로 $x\leq 2$ 이고 $\sqrt{2-x}\ \geq 0$ 이므로

$y\geq 1$

따라서 ④

21. 무리함수

$y=\sqrt{a(x-p)}+q$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 중 옳은 것은?



① $a<0$이다.

② $p>0$ 이고 $q>0$이다.

③ $y=\sqrt{(4-x)}-2$ 의 그래프이다.

④ $y=\sqrt{x}$를 평행이동하면 겹쳐진다.

⑤ 역함수는 $y=-(x+2)^2+4\quad (x\geq -2)$

그래프의 개형이 $(4,\ -2)$의 왼쪽 위의 방향으로 그래프가 그려지므로 $a<0$ 이고 $f(4)=-2$ 이므로

$-2=\sqrt{a(4-p)}+q$ 이므로 $p=4,\ q=-2$

$f(0)=2$ 이므로 $2=\sqrt{a(0-4)}\ -2$ 따라서 $a=4$

22. 무리함수 $y=\dfrac{1}{2}\sqrt{2x+4}\quad -2$ 의 그래프가 지나지 않는 사분면은?

① 제 1사분면 ② 제 2사분면

③ 제 4사분면 ④ 제 1사분면, 제 3사분면

⑤ 제 2사분면, 제 4사분면

정의역의 범위가 $x\geq -2$, 치역의 범위가 $y\geq -2$ 이고

y 절편이 -1 이므로 제2사분면을 지나지 않는다.

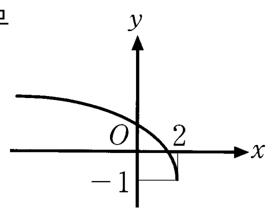
23. 무리함수 $y=\sqrt{-x^2+6x}$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f(x)=-x^2+6x=-(x-3)^2+9$ 이므로 최댓값은 $f(3)=9$이다. 따라서 $y=\sqrt{f(x)}$ 의 최댓값 $M=3$

$f(x)\geq 0$ 이므로 $f(x)$의 최솟값은 0 이므로 $y=\sqrt{f(x)}$의 최솟값은 $m=0$. 따라서 $M-m=3$

24. 오른쪽 그림의 개형과 같은 무리함수 그래프의 식은?



① $y=\sqrt{4+2x}-1$

② $y=\sqrt{4-2x}+1$

③ $y=\sqrt{4-2x}-1$

④ $y=-\sqrt{4-2x}-1$ ⑤ $y=-\sqrt{4+2x}-1$

그래프의 시작점이 $(2,-1)$,방향이 $(-,+)$ 이므로 정답은 ③

25. 무리함수 $y=\sqrt{2-x}+3$의 정의역이 $\{x\,|\,x\leq a\}$ 이고, 치역이 $\{y\,|\,y\geq b\}$일 때, 두 상수 $a,\ b$의 합 $a+b$의 값을 구하여라.

정의역의 범위가 $x\leq 2$ 이므로 $a=2$, 치역의 범위는 $y\geq 3$ 이므로 $b=3\ \ a+b=5$

26. 무리함수 $y=-\sqrt{2(x-4)}-1$의 정의역과 치역을 구하여라.

정의역 $\{x|x\geq 4\}$, 치역 $\{y|y\leq -1\}$

27. 무리함수 $y=-\sqrt{x+1}$ 에 대하여

㈎ x절편을 구하여라. $y=0$일 때 $x=-1$

㈏ y절편을 구하여라. $x=0$일 때 $y=-1$

㈐ 정의역을 구하여라. $\{x|x\geq -1\}$

㈑ 치역을 구하여라. $\{y|y\leq 0\}$

㈒ 지나지 않는 사분면을 구하여라.

제1사분면, 제2사분면

28. 무리함수 $y=\sqrt{2-x}+2$의 정의역과 치역을 바르게 구한 것은?

① 정의역 : $\{x\,|\,x\leq 2\}$, 치역 : $\{y\,|\,y\leq 2\}$

② 정의역 : $\{x\,|\,x\leq 2\}$, 치역 : $\{y\,|\,y\geq 2\}$

③ 정의역 : $\{x\,|\,x\geq 2\}$, 치역 : $\{y\,|\,y\leq 2\}$

④ 정의역 : $\{x\,|\,x\geq 2\}$, 치역 : $\{y\,|\,y\geq 2\}$

⑤ 정의역 : $\{x\,|\,x>2\}$, 치역 : $\{y\,|\,y<2\}$

정답 ②

29. 무리함수 $y=-\sqrt{x+1}+2$ 에 대한 설명 중 옳은 것은?

① x절편은 3이다.

② y절편은 2이다.

③ 제 4사분면을 지나지 않는다.

④ $0\leq x\leq 3$에서 최댓값은 0이다.

⑤ $y=-\sqrt{x}$ 의 그래프를 x축으로 1만큼, y축으로 2만큼 평행 이동한 식이다.

$y=0$ 일 때 $x=3$ 이므로 x절편 3은 맞다.

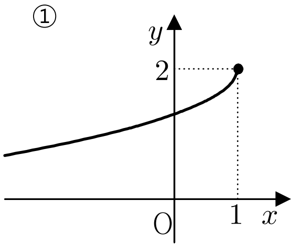
$x=0$ 일 때 $y=1$ 이므로 y절편은 1이다.

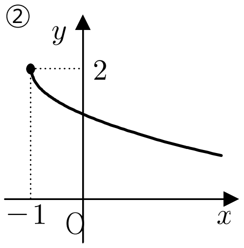
시작점은 $(-1,2)$ 이고 방향은 $(+,\ -)$ 이므로 제 1사분면을 지나지 않는다.

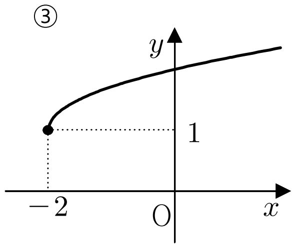
함수가 감소함수 이므로 $0\leq x\leq 3$의 범위에서는 $x=0$ 일 때 최댓값 1을 가진다.

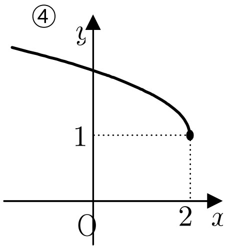
$y=-\sqrt{x}$ 의 그래프를 x축으로 -1만큼, y축으로 2만큼 평행 이동한 식이다.

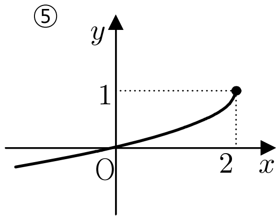
30. 다음 중 무리함수 $y=\sqrt{x+2}+1$의 그래프로 옳은 것은?

①


②


③


④


⑤


방향이 $(+,\ +)$ 이므로 정답은 ③

31. 함수 $y=\sqrt{x+1}$, $y=x+k$가 접할 때, 상수 k의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{4}$

$\sqrt{x+1}=x+k$ 이면 $x+1=x^2+2kx+k^2$ 이므로

$x^2+(2k-1)x+k^2-1=0$이 중근을 갖어야 접하므로

$D=(2k-1)^2-4(k^2-1)=0$ 을 만족하는 k의 값은

$-4k+5=0$ 이므로 $k=\frac{5}{4}$

32. 무리함수 $y=\sqrt{(x+4)}-1$의 x절편을 a, y절편을 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하여라.

$y=0$ 일 때 $x=-3=a$, $x=0$ 일 때 $y=1=b$

따라서 $a+b=-2$

33. 무리함수 $y=\sqrt{x+4}-2$ 에 대하여

㈎ 지나지 않는 사분면을 구하여라.

제2사분면, 제 4사분면

㈏ $y=x+k$와 두 점에서 만나기 위한 k의 범위를 구하여라.

접하기 위한 k의 값을 구하면

$\sqrt{x+4}-2=x+k$ 이면 $\sqrt{x+4}=x+(k+2)$

$x+4=x^2+2(k+2)x+(k+2)^2$

$x^2+(2k+3)x+(k^2+4x)=0$ 이므로

$D=(2k+3)^2-4(k^2+4x)=0$

$12k+9-16k=0$

$4k=9$, 따라서 $k=\frac{9}{4}$

$y=x+k$가 $(-4,\ -2)$ 를 지나가 위한 k값을 구하면 $k=2$

따라서 $2\leq k<\frac{9}{4}$ 의 범위에서 $y=\sqrt{x+4}-2$와 $y=x+k$는 두 점에서 만난다.

단원 : Ⅲ-2 등차수열 | 월 일

1. 등차수열의 여러 용어
   (1) 등차수열 : 첫째항에 차례로 일정한 수를 더하여 그 다음 항이 얻어지는 수열
   (2) 공차 : 등차수열에서 더해지는 일정한 수
   (3) 등차중항 : 세 수 a, b, c 가 차례로 등차수열을 이룰 때 이중 가운데인 수 b (a, c의 산술평균과 같다)

   (공차) = $b-a=c-b \quad \Leftrightarrow \quad 2b=a+c \quad \Leftrightarrow \quad b=\dfrac{a+c}{2}$

2. 등차수열의 일반항
   (1) 첫째항이 a이고 공차가 d인 등차수열에 대하여

   $a_1=a,\quad a_2=a+d,\quad a_3=a+2d,\quad a_4=a+3d,\quad \cdots,\quad a_n=a+(n-1)d$

   (2) 수열 $\{a_n\}$: $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ a_{n+1},\ \cdots$ 이 공차가 d인 등차수열을 이루면

   $\boldsymbol{d} = a_2-a_1 = a_3-a_2 = a_{n+1}-a_n$

   ※ 등차수열의 일반항은 $a_n=An+B$꼴로 나타내어지며, 공차는 A, 초항은 $A+B$ 이다.
   인접한 두 항의 차가 항상 일정한 수열은 반드시 등차수열이 되며, 그 차이가 공차이다.

3. 등차수열의 합
   (1) 첫째항(a), 마지막항 (l)이 주어졌을 때

   $$S_n=\frac{n(a+l)}{2}$$

   (2) 첫째항(a), 공차(d)가 주어졌을 때

   $$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

   ※ 등차수열의 첫째항부터 n번째항까지의 합 S_n은 항상 상수항이 없는 $S_n=An^2+Bn$꼴로 나타난다.

4. 수열의 합과 일반항과의 관계

   $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$

   $S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}$

   $\therefore\ S_n-S_{n-1}=a_n,\quad a_1=S_1$ (단, $n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$)

Q4. 다음 수열의 일반항을 구하고 등차수열이면 공차도 같이 구하여라.

(1) $10,\ 6,\ 2,\ -2,\ \cdots$
공차가 -4이므로 $a_n=-4n+14$

(2) $0,\ 4,\ 8,\ 15,\ 24,\ \cdots$
공차가 존재하지 않으므로 등차수열이 아니다

(3) $1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ \cdots$
공차가 존재하지 않으므로 등차수열이 아니다

(4) $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots$
공차가 2 이므로 $a_n=2n-1$

Q5. 제11항이 25, 제21항이 55인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 공차를 구하여라.
d를 공차라 할 때$a_{21}-a_{11}=10d=30$
따라서 $d=3$

(2) 첫째항을 구하여라.
공차가 3이므로 $a_n=3n+k$ 꼴이다.
$a_{11}=25$ 이므로 $k=-8$
일반항은 $a_n=3n-8$ 이므로 $a_1=-5$

(3) 145는 제 몇 항인가?
$3n-8=145$ 이므로
$3n=153$
$\therefore\ n=51$

(4) 제100항을 구하여라.
$a_{100}=3\times100-8=292$

단원 : Ⅲ-1 수열의 뜻	월 일

1. 수열의 여러 용어
   (1) 수열 : 어떤 규칙에 따라 차례로 나열된 수의 배열
   (2) 항 : 수열을 이루고 있는 각 수
   (3) 초항 : 제1항 또는 첫째항
   (4) 일반항 : 수열에서 n에 대한 식으로 나타낸 제 n항
   (5) 유한수열 : 항의 개수가 유한개인 수열
   (6) 무한수열 : 항의 개수가 무수히 많은 수열
   (7) 항수 : 유한수열에서 항의 개수
   (8) 끝항 : 유한수열에서 마지막 항
   (9) 수열의 합(S_n) : 수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제 n항까지의 합
2. 수열의 표현
   (1) 수열의 읽기 : 수열의 항은 앞에서부터 차례로
   '첫째항', '둘째항', '세째항', $\cdots$ 또는 '제1항', '제2항', '제3항', $\cdots$ 으로 읽고,
   $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ 과 같이 나타낸다.
   (2) 일반항과 수열의 항
   수열에서 n에 대한 식으로 나타낸 제 n번째 항인 일반항 a_n의 n의 값에 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots$을 차례로 대입하면 그 수열의 모든 항을 구할 수 있다.
3. 수열과 함수의 관계
   수열은 자연수 전체의 집합 $\mathbb{N}$을 정의역으로, 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$을 공역으로 하는 함수라 할 수 있다.
   $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = a$, $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, $\cdots$, $f(n) = a_n$
4. 수열의 합과 일반항과의 관계
   $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$
   $S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}$
   $\therefore\ S_n - S_{n-1} = a_n,\ a_1 = S_1$ (단, $n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$)

Q1. 다음 수열의 첫째항부터 제5항까지를 차례로 구하여라.

(1) $\{2n-1\}$ $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9$

(2) $\{2^n-1\}$ $1,\ 3,\ 7,\ 15,\ 31$

(3) $\{(-1)^n\}$ $-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1$

(4) $\{n^2-n\}$ $0,\ 2,\ 6,\ 12,\ 20$

Q2. 다음 함수로 정의된 수열의 첫째항부터 제5항까지 구하여라.

(1) $f(n) = n^2$ $1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25$

(2) $f(n) = 2n+1$ $3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11$

(3) $f(n) = n^2+2n+1$ $3,\ 7,\ 13,\ 21,\ 31$

(4) $f(n) = \log_2(n+2)$ $\log_2 3,\ 2,\ \log_2 5,\ \log_2 6,\ \log_2 7$

Q3. 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 - 2n$ 인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음을 구하여라.

(1) 일반항 a_n을 n에 관한 식으로 나타내어라.

공차$=2$, $a_1 = -1$ 인 등차수열이므로

$a_n = 2n-3$

(2) 제 11항부터 제 20항까지의 합을 구하여라.

$a_{11} = 22-3 = 19,\ a_{20} = 40-3 = 37$ 이므로

$S_{20} - S_{10} = \dfrac{10(19+37)}{2} = 280$

등차수열	단원종합평가	이름:	월 일	점수 :

Q1. $a_1 = 10$이고 공차가 -3일 때, 처음으로 -100보다 작아지는 항은 제 몇 항일까?

$a_n = -3n+13 < -100$ 을 만족하는 n을 구하면 되므로

$n > 37.\dot{6}$ 이므로 제38번째 항 이후부터는 -100보다 작아진다.

Q2. $a_2 + a_{10} = 40$, $a_5 + a_{11} = 56$을 만족할 때, 제 20항을 구하여라.

$a_1 + 10d = 40$, $2a_1 + 14d = 56$ 이므로 연립방정식을 풀면

$a_1 = 0$, $d = 4$ 따라서 $a_n = 4n-4$

따라서 $a_{20} = 80-4 = 76$

별해)

a_2, a_6, a_{10}는 등차수열을 이루므로 등차중항 $a_6 = 20$

a_5, a_8, a_{11}는 등차수열을 이루므로 등차중항 $a_8 = 28$

공차 $d = \frac{a_8 - a_6}{2} = 4$ 이므로 수열의 일반항은

$a_n = 4n+k$ 꼴이다. $a_6 = 20$ 이므로 $a_n = 4n-4$

따라서 $a_{20} = 76$

Q3. 등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_8 + a_{18} = 9$일 때, $a_7 + a_{11} + a_{15} + a_{19}$의 값을 구하여라.

a_{13}은 a_8과 a_{18}의 등차중항이므로 $2a_{13} = a_8 + a_{18} = 9$

a_{13}은 a_7과 a_{19}의 등차중항이며, a_{11}과 a_{15}의 등차중항이므로

$a_7 + a_{19} = 2a_{13} = 9$, $a_{11} + a_{15} = 2a_{13} = 9$

따라서 $a_7 + a_{11} + a_{15} + a_{19} = 4a_{13} = 18$

Q4. 등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 + a_3 + a_5 = 9$, $a_2 + a_4 + a_6 = 15$ 일 때, 일반항 a_n을 구하여라.

$a_1 + a_3 + a_5 = 3a_3 = 9$ 이므로 $a_3 = 3$

$a_2 + a_4 + a_6 = 3a_4 = 15$ 이므로 $a_4 = 5$

따라서 공차 $d = a_4 - a_3 = 2$

따라서 일반항은 $a_n = 2n-3$

Q5. 5와 15사이에 4개의 수를 넣어서 만든 6개의 수 전체가 등차수열을 이룰 때, 이들 4개의 수를 차례로 구하여라.

$a_1 = 5$, $a_6 = 15$ 라 하자. 공차 $d = \frac{15-5}{5} = 2$

따라서 4개의 수는 차례대로 7, 9, 11, 13

Q6. 서로 다른 두 수 x, y에 대하여 두 수열 x, a_1, a_2, y와 y, b_1, b_2, b_3, b_4, x가 모두 등차수열을 이룰 때, $\frac{a_2 - a_1}{b_4 - b_3}$의 값을 구하여라.

$a_2 - a_1 = \frac{y-x}{3}$, $b_4 - b_3 = \frac{x-y}{5}$ 이므로

$\frac{a_2 - a_1}{b_4 - b_3} = \frac{5}{3}$

Q7. 다항식 $f(x) = ax^2 + 4x - 3$을 일차식 $x-1$, $x-3$, $x-5$로 나눈 나머지가 순서대로 등차수열을 이룰 때, 다음을 구하여라.

(1) a의 값을 구하여라.

$f(1) = a+1$, $f(2) = 4a+5$, $f(3) = 9a+9$

$2f(2) = 8a+10 = 10a+10 + f(1) + f(3)$

따라서 $a = 0$

(2) $x-n$으로 나누었을 때의 나머지를 a_n이라 하였을 때, a_n과 공차를 구하여라.

$f(n) = 4n-3$ 이므로 $a_n = 4n-3$, $a_n = 4n-3$, 공차4

Q8. 첫째항부터 제n까지의 합 $S_n = 4n^2 + n$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{19}$의 값을 구하여라.

$S_1 = a_1 = 5$, 수열$\{a_n\}$의 공차는 8 이므로 $a_n = 8n-3$

$a_1 + a_3 + \cdots + a_{19}$는 수열 $\{a_{2n-1}\}$의 첫항부터 10번째항까지의 합이므로

$S = \frac{10(a_1 + a_{19})}{2} = 5(5+77) = 410$

Q9. 등차수열을 이루는 네 개의 수가 있다. 네 개의 수의 합은 28이고, 제곱의 합은 276이다. 이 네 개의 수를 구하여라. (단, $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$)

네 개의 수를 각각 $x-3d$, $x-d$, $x+d$, $x+3d$라 하자.

네 개의 수를 모두 더하면 $4x = 28$ 따라서 $x = 7$

$(7-3d)^2 + (7-d)^2 + (7+d)^2 + (7+3d)^2 = 4 \times 7^2 + 20d^2 = 276$

$\therefore$ $d^2 = 4$ 따라서 $d = 2$

따라서 1, 5, 9, 13

Q10. 초항이 -16, 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, S_n의 최솟값을 구하여라.

$a_n = 2n-18$ 이고 $a_n \le 0$을 만족하는 n의 범위가 $n \le 9$이므로

$a_9 = 0$ 따라서 제8항 또는 제 9항까지의 합이 최소가 된다.

$a_8 = -2$ 이므로 $S_8 = S_9 = \dfrac{8(-16-2)}{2} = -72$

Q11. 다음과 같은 수열에서 처음으로 1보다 크게 되는 항은 몇 번째 항인지 구하여라.

$$\frac{1}{100},\ \frac{6}{97},\ \frac{11}{94},\ \frac{16}{91},\ \cdots$$

분모는 3씩 작아지는 등차수열이고

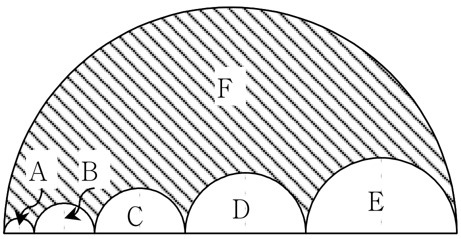
분자는 5씩 커지는 등차수열이므로

$a_n = \dfrac{5n-4}{-3n+103}$

$5n-4 > -3n+103$을 만족하는 n의 값은 $n > 13.\times\times\times$ 이므로

제14항 이후부터는 1보다 커진다.

Q12. 아래 그림과 같이 지름의 길이가 30인 반원에 내접하면서 서로 외접하는 다섯 개의 반원 A, B, C, D, E가 있다. 다섯 개의 반원의 지름을 각각 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 라 하면 이 순서로 등차수열을 이루고 $a_4 = 2a_2$인 관계가 성립한다. 이때 색칠한 F의 넓이를 구하여라.



a_n이 등차수열이므로 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 5a_3 = 30$

따라서 $a_3 = 6$

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_2 = a_3 - d = 6 - d$, $a_4 = a_3 + d = 6 + d$

$a_4 = 2a_2$ 이므로 $6 + d = 2(6 - d)$ 따라서 $d = 2$

따라서 각 원의 반지름의 길이는 1, 2, 3, 4, 5

다섯 개의 반의의 넓이의 합은

$\dfrac{\pi}{2}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2) = \dfrac{55}{2}\pi$ 이므로

색칠한 F의 넓이는 $\dfrac{15^2}{2}\pi - \dfrac{55}{2}\pi = 85\pi$

Q13. 오른쪽 표의 빈칸에 알맞은 수를 써넣어, 각 행과 열의 네 수가 등차수열을 이루도록 할 때, $x+y$의 값을 구하여라.

1			
$1+d$			9
$1+2d$	8		x
$1+3d$		15	y

$2x = y + 9$ 이므로 $y = 2x - 9$

첫 번째 세로줄의 공차를 d 라 하자

세 번째 줄의 공차는 $8-(1+2d) = 7-2d$ 이므로

$x = 8 + 2(7-2d) = 22 - 4d \quad \cdots$ ㉠

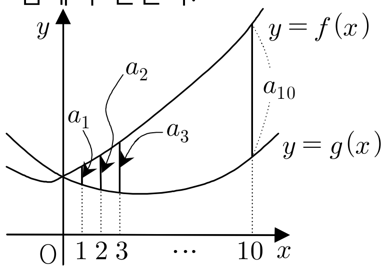
네 번째 줄의 공차는 $\dfrac{15-(1+3d)}{2} = 7 - \dfrac{3}{2}d$ 이므로

$y = 2x - 9 = 15 + \left(7 - \dfrac{3}{2}d\right) = 22 - \dfrac{3}{2}d \quad \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 d값을 구하면 $d = 2$

따라서 $x = 14$, $y = 19$ 이므로 $x + y = 33$

Q14. 아래쪽 그림과 같이 이차항의 계수가 1인 두 이차함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$의 그래프가 y축 위의 한 점에서 만난다.



$x = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10$에서 y축에 평행한 직선을 그어 두 곡선과 만나는 점 사이의 거리를 각각 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{10}$이라 하자. $a_4 = 24$일 때, a_{10}의 값을 구하여라.

$f(x) = x^2 + ax + k$, $g(x) = x^2 + bx + k$ 라 하자.

$a_n = f(n) - g(n)$ (n은 자연수)가 된다.

따라서 $a_n = (a-b)n$

$a_4 = 4(a-b) = 24$ 이므로 $a - b = 6$

$a_{10} = 6 \times 10 = 60$

단원 : Ⅲ-3 등비수열	월 일

1. 등비수열의 여러 용어

⑴ 등비수열(等比數列) : 첫째항에 차례로 일정한 수를 곱하여 그 다음 항이 얻어지는 수열

⑵ 공비(公比) : 등비수열에서 곱해지는 일정한 수

⑶ 등비중항(等比中項) : 세 수 $a,\ b,\ c$ 가 차례로 등비수열을 이룰 때 이중 가운데인 수 b ($a,\ c$의 기하평균과 같다)

(공비) = $\dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b} \Leftrightarrow b^2 = a \times c \Leftrightarrow b = \pm\sqrt{ac}$

2. 등비수열의 일반항

⑴ 첫째항이 a이고 공비가 r인 등비수열에 대하여

$a_1 = a,\quad a_2 = ar,\quad a_3 = ar^2,\quad a_4 = ar^3,\ \cdots,\quad a_n = ar^{n-1}$

⑵ 수열 $\{a_n\}$: $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ a_{n+1},\ \cdots$ 이 공비가 r인 등비수열을 이루면

$$\boldsymbol{r} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

3. 등비수열의 합

⑴ 첫째항(a), 공비$(r \neq 1)$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

⑵ 첫째항(a), 공비$(r=1)$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$S_n = na$ (공비가 1인 등비수열은 공차가 0인 등차수열과 같다)

⑶ 등비수열의 첫째항부터 n번째항까지의 합 S_n은 항상 $S_n = Ar^n + B$ (단, $A+B=0$) 꼴로 나타난다.

$$S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1} = \frac{a_1}{r-1}r^n - \frac{a_1}{r-1} = Ar^n - A \left(\text{단, } A = \frac{a_1}{r-1}\right)$$

예) $S_n = Ar^n - A$ 이면 $a_1 = A(r-1)$ 이고, 공비는 r 이므로 $a_n = A(r-1) \cdot r^{n-1}$

⑷ $S_n = Ar^n + B$ 이고 $(A+B \neq 0)$ 이면 둘째항부터 등비수열을 이룬다.

⑸ 등비수열의 합은 두 개의 등비수열의 합으로 쪼갤 수 있다. 즉$n = p+q$ 이면 다음이 성립한다.

$$S_n = S_{p+q} = S_p + r^p S_q$$

[증명] $$S_{p+q} = \frac{a(1-r^{p+q})}{1-r} = \frac{a(1-r^{p+q}-r^p+r^p)}{1-r} = \frac{a(1-r^p)}{1-r} + \frac{a(r^p-r^{p+q})}{1-r}$$
$$= \frac{a(1-r^p)}{1-r} + \frac{ar^p(1-r^q)}{1-r} = S_p + r^p S_q$$

4. 수열의 합S_n 과 일반항a_n 과의 관계

⑴ S_n 이 n에 대한 2차식이면 a_n은 등차수열이다.

예) $S_n = 3n^2 - 2$ 이면 $a_1 = S_1 = 1$ 이고 공차는 3×2 이므로 $a_n = 6n - 5$ 이다.

⑵ S_n 이 r의 거듭제곱꼴이면 a_n은 등비수열이다.

예) $S_n = 3^n - 1$ 이면 $a_1 = S_1 = 2$ 이고 공비는 3 이므로 $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ 이다.

5. 등비수열과 로그 (참고만 할 것)

⑴ 등비수열의 n번째 항이 특정한 수보다 크거나 작게 되는 경우

예) $a_n = 2^n$ 일 때, 10000보다 크게 되기 위한 n의 값은?

$\log 2^n > \log 10000,\quad n > \dfrac{4}{\log 2} = 13.\times\times\times,\quad \therefore$ 제14항부터 10000보다 크다는 것을 알 수 있다.

(2) 등비수열에 $\log$를 취하면 등차수열이 된다.

예) $a_n = a \cdot r^{n-1} \quad \Rightarrow \quad \log a_n = \log a + (n-1)(\log r) = \log r \cdot n + (\log a - \log r)$

a_n이 첫째항이 a, 이고 공비가 r인 등비수열이면

$\log a_n$ 은 첫째항이 $\log a$ 이고 공차가 $\log r$인 등차수열이 된다.

6. 등비수열의 부분합

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots a_n = a + ar + ar^2 + at^3 + \cdots + ar^{n-1} = A$ 라 하면

$$\begin{aligned} S_{2n} - S_n &= a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n} \\ &= ar^n + ar^{n+1} + \cdots + ar^{2n-1} \\ &= (a + ar + \cdots + ar^{n-1})r^n \\ &= A\, r^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{3n} - S_{2n} &= a_{2n+1} + a_{2n+2} + \cdots + a_{3n} \\ &= ar^{2n} + ar^{2n+1} + \cdots + ar^{3n-1} \\ &= (a + ar + \cdots + ar^{n-1})r^{2n} \\ &= A\, r^{2n} \end{aligned}$$

즉, S_n, $S_{2n} - S_n$, $S_{3n} - S_{2n}$ 은 공비가 r^n인 등비수열을 이룬다.

Q1. 다음 수열의 일반항을 구하고 등비수열이면 공비도 같이 구하여라.

(1) $\sqrt{3},\ 3,\ 3\sqrt{3},\ 9,\ \cdots$

(2) $\log_2 2,\ \log_2 4,\ \log_2 8,\ \log_2 16,\ \cdots$

(3) $\log_2 2,\ \log_2 4,\ \log_2 16,\ \log_2 256,\ \cdots$

(4) $\frac{2}{3},\ 1+\frac{1}{3},\ 2+\frac{2}{3},\ 5+\frac{1}{3},\ 10+\frac{2}{3},\ \cdots$

Q2. 등비수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 + a_2 + a_3 = 2$, $a_4 + a_5 + a_6 = 16$ 일 때, $\frac{a_3 + a_5}{a_1 + a_3}$의 값을 구하여라.

Q3. 등비수열 $\{a_n\}$에서 $a_2\, a_3 = 216$, $a_3\, a_4 = 96$일 때, a_n을 n에 관한 식으로 나타내어라. (단, $a_1 > 0$)

등비수열	단원종합평가	이름:	월 일	점수 :

Q1. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{3a_n + a_{n+1}\}$은 첫째항이 10, 공비가 2인 등비수열을 이룬다. 이때, a_{10} 을 구하여라.

Q2. 첫째항이 10000이고 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_n$의 값이 최대가 되기위한 자연수 n의 값을 구하여라.

Q3. 다항식 $f(x) = x^2 + ax + b \ (a > 0)$에 대하여 $f(x)$를 $x-1$, x, $x+1$로 나눈 나머지가 차례로 등비수열을 이룬다고 한다. $f(2) = 6$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하여라.

Q4. 삼차방정식 $x^3 + 4x^2 - 8x + k = 0$의 세 실근이 등비수열을 이룰 때, 상수 k의 값을 구하여라.

Q5. 양의 실수 x의 소수부분을 α, 정수부분을 n라 할 때, α, n, x가 순서대로 등비수열을 이룰 때, x를 구하여라.

Q6. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 + a_3 = 10$, $a_3 + a_5 = 90$일 때, S_n을 구하여라.

Q7. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여
$a_1 + a_2 + \cdots + a_5 = 10$,
$a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{15} = 320$
일 때, 이 등비수열의 공비 r의 값을 구하여라.

Q8. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 + a_2 = 5$이고, $S_6 = 105$일 때, S_8의 값을 구하여라.

Q9. 함수 $f(x) = x^{10} + x^9 + \cdots + x + 2$ 에 대하여 합성함수 $y = f(f(x))$의 상수항을 구하여라.

Q10. 등비수열 $\{a_n\}$에서 연속된 n개의 항을 뽑았더니 가장 작은 수는 12, 가장 큰 수는 384이었고, 뽑은 m개의 항들의 합은 756이었다. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < a_{n+1}$이 성립할 때, $m + \frac{a_{m+1}}{a_m}$의 값을 구하여라.

※ 다음 부터는 지수와 로그를 배운 다음 풀 수 있는 문제입니다. 2차고사 시험범위에 해당하겠습니다.

Q11. $a_2 = 8, \quad a_4 = 32$이고 공비가 양수인 등비수열의 $\{a_n\}$에서 a_n의 처음으로 11자리수 되기 위한 자연수 n의 최솟값을 구하여라. (단, $\log 2 = 0.3010$)

Q12. 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열 $\{a_n\}$에서 이웃하는 두 항의 차가 $\frac{1}{1000}$보다 작게 되는 것은 제 몇 항부터인가? (단, $\log 3 = 0.4771$)

Q13. Y양은 연봉 2500만원에 매해 6%씩 인상되는 J회사에 입사하였고, K군은 연봉 2000만원에 매해 10%씩 인상되는 G회사에 입사하였다.
(단, $\log 1.06 = 0.0253$, $\log 1.1 = 0.0414$, $\log 2 = 0.301$)

(1) J양과 K군이 같은 시기에 입사를 하였다는 가정하에 K군이 Y양보다 더 많은 연봉을 받게되는 시기는 몇 년 후가 될 것인가?

Q14. (2) Y양과 K군이 1억원 이상의 연봉을 받게 되기까지 걸리는 시간을 구하여라.

Q15. 고대 그리스의 천문학자인 히파르코스는 눈으로 볼 수 있는 별의 밝기를 1등성, 2등성, $\cdots$, 6등성으로 구분하였다. 1등성의 밝기는 6등성의 밝기의 100배이고, 각 등성 사이에는 등비수열을 이루고 있다. 1등성 밝기는 4등성의 밝기의 몇 배인가?

Q16. $a > b > c > 1$을 만족하는세 실수 a, b, c가 순서대로 등비수열을 이룰 때, 1보다 큰 자연수 n에 대하여 세 수 $\log_a n$, $\log_b n$, $\log_c n$은 순서대로 어떤 수열을 이루는지 알아보아라.

단원 : Ⅲ-4 수열의 합	월 일

1. 합의 기호 '$\sum$' 의 정의

(1) 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 나타내는 기호.

(2) $\sum$의 오른쪽 부분은 k번째의 일반항,

(3) $\sum$의 아래부분은 시작하는 항의 번호,

(4) $\sum$의 윗부분은 끝항의 번호가 들어간다.

예) $a_3+a_4+a_5=\sum_{k=3}^{5}a_k$, $1+2+3+\cdots+50=\sum_{k=1}^{50}k$, $1+3+5+\cdots+19=\sum_{k=1}^{10}(2k-1)=\sum_{k=0}^{9}(2k+1)$

2. $\sum$의 성질

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

(1) $\sum_{k=1}^{n}(a_k\pm b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k\pm\sum_{k=1}^{n}b_k$ (복부호 동순)

(2) $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ (단, c는 상수), $\sum_{k=1}^{n}c=cn$ (단, c는 상수)

(3) 다음을 주의할 것

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\neq\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)\qquad\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{a_k}\neq\frac{\sum_{k=1}^{n}b_k}{\sum_{k=1}^{n}a_k}\qquad\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2\neq\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2$$

3. 자연수 거듭제곱의 $\sum$ 공식

(1) $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

(4) $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

(5) $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$

4. 여러 가지 수열의 합

(1) 일반항이 부분분수로 분해할 수 있는 분수 꼴이면 이항분리를 이용

$a_k=\frac{1}{a_kb_k}=\frac{1}{b_k-a_k}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{b_k}\right)$,

$b_k-a_k=c$(c는 상수)이면, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_kb_k}=\frac{1}{c}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{b_k}\right)$

(2) $\sum$가 중첩되어 있는 경우 안쪽에 있는 $\sum$의 범위에 있는 문자와 다른 문자는 상수취급한다.

예) $\sum_{k=1}^{10}\left\{\sum_{i=1}^{5}k\cdot 2^{i-1}\right\}=\sum_{k=1}^{10}k\cdot\sum_{i=1}^{5}2^{i-1}=\frac{10\cdot 11}{2}\cdot\frac{2^5-1}{2-1}=1705$

수열의 합	단원종합평가	이름:	월 일	점수 :

Q1. 다음 식을 $\sum$ 기호를 사용하여 나타내어라.

(1) $2+5+8+11+\cdots+26+29$

(2) $3+7+11+15+\cdots+31+35$

(3) $2+4+8+16+\cdots+256+512$

(4) $1+3+9+27+\cdots+243+729$

Q2. 다음의 빈칸을 채워 식을 완성하여라.

(1) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(\qquad)}{2}$

(2) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(\qquad)}{6}$

(3) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(\qquad)}{2}\right\}^2$

(4) $\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(\qquad)}{2}$

(5) $\sum_{k=1}^{2n} k^2 = \frac{(\qquad\qquad)}{(\qquad\qquad)}$

(6) $\sum_{k=1}^{n^2} k^3 = \left(\qquad\qquad\right)$

Q3. $\sum_{k=1}^{10} a_k = 7$, $\sum_{k=1}^{10} {a_k}^2 = 15$, $\sum_{k=1}^{10} b_k = 3$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\sum_{k=1}^{10} (a_k+4)$

(2) $\sum_{k=1}^{10} ({a_k}^2+a_k)$

(3) $\sum_{k=1}^{10} (a_k-b_k)$

(4) $\sum_{k=1}^{10} ({a_k}^2+2a_k-6b_k)$

Q4. 자연수의 거듭제곱의 합 공식을 이용하여 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\sum_{k=1}^{12} k$

(2) $\sum_{k=1}^{10} k^2$

(3) $\sum_{k=1}^{5} k^3$

(4) $\sum_{k=1}^{10} (k^2-k)$

(5) $\sum_{k=1}^{5} k(k+1)$

(6) $\sum_{k=1}^{5} k(k+1)(k+2)$

Q5. $\sum_{k=1}^{n} a_k = 2n^2 + n$을 만족시키는 수열의 일반항을 구하여라.

Q6. $\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 - 3n$일 때. $\sum_{k=1}^{2n} a_{2k-1}$을 n에 대한 식으로 나타내어라.

Q7. 다음 수열의 합을 계산하여라.

(1) $\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{1}{i+1}\sum_{k=1}^{i} k\right)$의 값을 구하여라.

(2) $\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)$

(3) $\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$

(4) $\sum_{k=2}^{8}\frac{1}{(2k-1)^2-1}$

(5) $\sum_{k=1}^{7}\log_2\frac{k+1}{k}$

(6) $\sum_{k=1}^{99}\log\left(1+\frac{1}{k}\right)$

Q8. 방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 할 때, $\sum_{k=1}^{20}\omega^n$ 의 값을 구하여라.

Q9. 다음과 같이 주어진 수열의 제n항 a_n과 n항까지의 합 S_n을 구하여라.

(1) $3,\ 4,\ 7,\ 12,\ 19,\ 28,\ 39,\ \cdots$

(2) $2,\ 5,\ 11,\ 23,\ 47,\ 95,\ 191,\ \cdots$

Q10. 다음 수열 $\frac{1}{2^2},\ \frac{3}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \frac{3}{2^3},\ \frac{5}{2^3},\ \frac{7}{2^3},\ \frac{1}{2^4},\ \frac{3}{2^4},\cdots$ 은 2이상의 자연수 n에 대하여 분모는 2^n꼴이고, 분자는 본모보다 작은 홀수인 분수로 이루어져 있다. 이때 S_{30}의 합을 구하여라.

단원 : Ⅲ-5 여러 가지 수열	월 일

§ 1. 조화수열

⑴ 수열 $\{a_n\}$에 대하여 각 항의 역수들이 등차수열을 이루는 수열

⑵ 조화수열의 일반항 : 수열의 각 항의 역수들이 초항이 a, 공차가 d인 등차수열을 이룰 때,

$$\frac{1}{a_n} = a+(n-1)d \Leftrightarrow a_n = \frac{1}{a+(n-1)d}$$

⑶ 수열 $\{a_n\}$: $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ a_{n+1},\ \cdots$의 각 항에 역수를 취하여 얻은 수열이 첫째항이 a, 공차가 d이면

$$\frac{1}{a_1} = a,\quad \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} = d \ (\text{단, } n=1,\ 2,\ 3)$$

⑷ 조화중항 : $a,\ b,\ c$가 조화수열을 이루기 위한 필요충분조건은

$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c} \Leftrightarrow b = \frac{2ac}{a+c}$ 이고, 이때 b를 "조화중항"이라 한다.

§ 2. 군수열

⑴ 수열의 각 항들을 적당히 묶어 각 묶음(군)들이 일정한 규칙성을 갖는 수열

⑵ 군수열 문제를 해결하는 방법

① 각 군들의 첫째항들로 이루어진 수열의 일반항을 구한다.

② 제1군으로부터 몇 개의 군의 항수를 조사하여 제n군의 항수를 구한다.

③ 제n군의 첫째항을 나타내는 수열의 일반항을 첫째항으로 하여 제n군의 규칙을 조사한다.

④ 제n군에 속한 항들의 합을 나타내는 수열을 첫째항부터 제n항까지 더한다. (수열의 합 계산 시)

⑶ 다음 수열의 제100항은 어떤 수일지 계산하여 보자.

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{1},\ \frac{2}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{4}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$$

① 몇 개의 군으로 나눠보자.

$$\left(\frac{1}{1}\right),\ \left(\frac{2}{1},\ \frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{3}{1},\ \frac{2}{2},\ \frac{1}{3}\right),\ \left(\frac{4}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4}\right),\ \cdots$$

② 각 군의 첫째항들이 이루는 수열은 $\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{1},\ \frac{4}{1},\ \cdots$ 이므로 제n군의 첫째항은 $\frac{n}{1}$

③ 제1군의 항수는 1, 제2군의 항수는 2, $\cdots$ 이므로 제n군의 항수는 n개 이다.

따라서 제n군까지의 항수는 $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ 이다.

④ 제n군의 첫째항은 $\frac{n}{1}$이고, 제2항부터는 분모는 1씩 증가하는 등차수열이고, 분자는 1씩 감소하는 등차수열이다.

따라서 제n군의 k번째항은 $\frac{n+(k-1)\cdot(-1)}{1+(k-1)\cdot 1} = \frac{n-k+1}{k}$

⑤ 제100항이 속해있는 군을 제$n+1$군이라 했을 때, 제100항이 속해 있는 군을 계산하기 위해 다음을 계산하면

$\frac{n(n+1)}{2} \le 100$ 을 만족하는 n은 13이므로 제13군의 마지막 항은 제91항이 된다.

따라서 100항은 제14군의 9번째 항이다.

따라서 $\frac{14-9+1}{9} = \frac{6}{9}$

§ 3. 멱수열과 멱급수

(1) 멱수열 : 실수 x와 수열 $\{a_n\}$이 있을 때, $a_n x^n$을 일반항으로 하는 수열

(2) 멱급수 : 멱수열의 합. $S=\sum_{k=1}^{n} a_k x^k$ 로 표기함.

계수가 이루는 수열 $\{a_n\}$이 등차수열일 때, $S-xS$를 이용하여 S를 계산할 수 있다.

문제1. 다음 물음에 답하여라.

(1) 수열 $1,\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{5},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{7},\ \cdots$ 의 일반항을 구하여라. $a_n=\frac{2}{n+1}$

(2) 두 수 $a,\ b$의 등차중항이 8이고, $a,\ b$의 조화중항이 6일 때, a^2+b^2의 값은? $\frac{a+b}{2}=8,\ \frac{2ab}{a+b}=6,\ a^2+b^2=160$

(3) 이차방정식 $x^2+2x-4=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 할 때, 두 수 $\alpha,\ \beta$의 등차중항과 조화중항을 두 근으로 하고 최고차항의 계수가 1인 이차방정식을 구하여라. $\begin{cases}\alpha+\beta=-2\\ \alpha\beta=-4\end{cases}$ 이므로 $\begin{cases}\text{등차중항}=-1\\ \text{조화중항}=4\end{cases}$

따라서 $x^2-3x-4=0$

문제2. 다음 물음에 답하여라.

(4) 아래 표에서 5행의 8열의 수를 구하여라.

1	4	9	16	$\cdots$
2	3	8	15	$\cdots$
5	6	7	14	$\cdots$
10	11	12	13	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

1열의 수열은 $1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \cdots$ 으로 일반항은 n^2

n열의 각 행의 값은 n열에서 1씩 감소하는 수열이므로

n열의 m 행의 값은 $n^2-(m-1)$이 된다.

따라서 5행 8열의 값은 $8^2-(5-1)=64-4=60$

(5) 유한수열 $1,\ 1,\ 3,\ 1,\ 3,\ 5,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots,\ 31,\ 33$ 의 합을 구하여라.

수열을 1개, 2개, 3개, $\cdots$개로 묶어서 생각하면 $(1),\ (1,\ 3),\ (1,\ 3,\ 5),\ (1,\ 3,\ 5,\ 7),\ \cdots$ 이므로

n군의 모든 항의 합을 구하면 $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$ 이다. 또한 n차군의 마지막 숫자는 $2n-1$ 이므로 33으로 끝나는 군은 제 17군의 수이므로 제17군까지의 모든 수의 합은 $\sum_{k=1}^{17}k^2=1785$

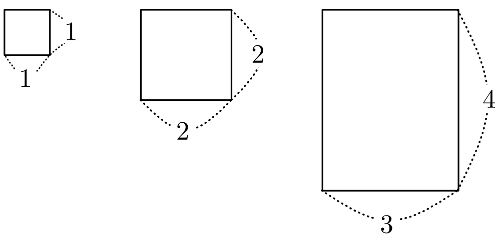
문제3. 다음 물음에 답하여라.

(6) $\sum_{k=1}^{10}k\cdot 2^k$을 계산하여라.

$$S=1\cdot 2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\ \cdots\ +10\cdot 2^{10} \quad \cdots ㉠$$
$$2S=\quad 1\cdot 2^2+2\cdot 2^3+3\cdot 2^4+\ \cdots\ +10\cdot 2^{11} \quad \cdots ㉡$$

㉠-㉡ $:-S=2+2^2+2^3+\ \cdots\ +2^{10}-10\cdot 2^{11}=(2^{12}-2)-10\cdot 2^{10}$ 따라서 $S=6\cdot 2^{10}+2$

(7) 오른쪽 그림과 같이 가로의 길이는 1씩 증가하고 세로의 길이는 2배씩 증가하는 사각형이 있다. 10번째까지의 직사각형의 넓이의 합을 구하여라.



n번째 사각형의 넓이는 $n\cdot 2^{n-1}$ 이므로 n번째 사각형까지의 넓이S

$S=\sum_{k=1}^{10}k\cdot 2^{k-1}=1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+\ \cdots\ +10\cdot 2^9$

$S-2S=1+2+2^2+\ \cdots\ +2^9-10\cdot 2^{10}=2^{10}-1-10\cdot 2^{10}=-9\cdot 2^{10}-1$

따라서 $S=9\cdot 2^{10}+1\ =\ 9217$

【점화식】

§1. 점화식

(1) 수열의 귀납적 정의 : 수열을 이웃한 두 항(a_{n+1}, a_n) 사이의 관계식으로 수열을 정의하는 것

(2) 점화식 : 이웃한 두 항 사이의 관계식

(3) 등차수열의 점화식 ① $a_{n+1}-a_n = d$ (d는 공차), ② $a_{n+1} - a_n = a_{n+2}-a_{n+1}$, ③ $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$

(4) 등비수열의 점화식 ① $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=r$ (r은 공비), ② $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$, ③ $(a_{n+1})^2 = a_n \cdot a_{n+2}$

(5) 계차가 $\{b_n\}$인 수열$\{a_n\}$의 점화식 : ① $a_{n+1}-a_n = b_n$, ② $a_{n+1}=a_n+b_n$, ③ $a_{n+1}=a_n+f(n)$

문제1. 다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하여라.

(1) $a_1 = 4,\ a_{n+1}-a_n = 2$

첫째항이 4이고, 공차가 2인 등차수열이므로 $a_n = 2n+2$

(2) $a_1 = -2,\ a_2 = 1,\ 2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$

a_{n+1}은 a_{n+2}, a_n의 등차중항이 되므로 공차는 $a_2-a_1=3$ 따라서 $a_n=3n-5$

(3) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n$

첫째항이 1이고 공비가 2인 등비수열이므로 $a_n = 2^{n-1}$

(4) $a_1 = 1,\ a_2 = \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{a_{n+2}} - \dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n}$

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ 이라 하면 b_n은 첫째항이 1이고 공차가 1인 등차수열이므로 $b_n=n$, $\therefore a_n = \dfrac{1}{n}$

§2. 점화식 유형I : $a_{n+1} = a_n + f(n)$의 꼴

(1) 방법1 : 수열 $\{f(n)\}$이 수열 $\{a_n\}$의 계차수열이므로 $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(n)$

(2) 방법2 : $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$을 대입하여 좌변과 우변을 각각 더하여 a_n을 구한다.

(3) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 2n$의 일반항을 구해보자

방법1)

$a_{n+1}-a_n = 2n$ 에서 수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$ 이라고 하면 $b_n = 2n$

$$\therefore\ a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k = 1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} k$$

$$= 1 + 2\frac{(n-1)n}{2} = n^2 - n + 1$$

방법2)

$a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2$

$a_3 = a_2 + 4$

$\cdots = \cdots$

$a_n = a_{n-1} + 2(n-1)$ 변끼리 더하면

$$a_n = 1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} k = n^2 - n + 1$$

문제2. 다음 수열의 일반항을 구하여라.

(5) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 2n - 1$

계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면 $b_n = 2n-1$인 등차수열이다. 따라서 $a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k-1) = 1 + n(n-1) - n = n^2 + 1$

(6) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 2^n$

계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면 $b_n = 2^n$인 등차수열이다. 따라서 $a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 1 + 2^n - 2 = 2^n - 1$

§3. 점화식 유형II : $a_{n+1} = a_n f(n)$의 꼴

(1) 방법 : $a_{n+1} = a_n f(n)$ 에 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$을 대입한 후 변끼리 곱하면

$$a_n = a_1 f(1) f(2) f(3) \cdots f(n-1) = a_1 \times \prod_{k=1}^{n-1} f(k)$$

(2) $\prod_{k=1}^{n} a_n = a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_n$

(3) $a_1 = 1,\ \sqrt{n}\, a_{n+1} = \sqrt{n+2}\, a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3 \cdots)$ 의 일반항을 구해보자.

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}$ 이므로 이 식의 양변에 n 대신에 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ n-1$을 대입하고 변끼리 곱한다.

$$\frac{\cancel{a_2}}{a_1} \times \frac{\cancel{a_3}}{\cancel{a_2}} \times \frac{\cancel{a_4}}{\cancel{a_3}} \times \cdots \times \frac{a_n}{\cancel{a_{n-1}}} = \frac{\sqrt{2}}{1} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} \times \cdots \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{n}}{1} = \sqrt{n}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 일반항 $a_n = a_1 \times \sqrt{n} = \sqrt{n}$

문제3. 다음 수열의 일반항을 구하여라.

(7) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) a_n \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$a_{n+1} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right) a_n$ 이므로 $a_n = \dfrac{2}{1} \cdot \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{4}{3} \cdot \cdots \cdot \dfrac{n}{n-1} \cdot a_1 = n$

(8) $a_1 = 1,\ (n+2) \cdot a_{n+1} = n \cdot a_n$

$a_{n+1} = \dfrac{n}{n+2} a_n$ 이므로 $a_n = \dfrac{1}{\cancel{3}} \cdot \dfrac{2}{\cancel{4}} \cdot \dfrac{\cancel{3}}{\cancel{5}} \cdot \cdots \cdot \dfrac{\cancel{n-2}}{n} \cdot \dfrac{\cancel{n-1}}{n+1} \cdot a_1 = \dfrac{2}{n(n+1)}$

§4. 점화식 유형III : $a_{n+1} = p\, a_n + q \quad (p \neq 1,\ \ pq \neq 0)$의 꼴

(1) 방법 : $a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$꼴로 변형하고 $b_n = a_n - \alpha$ 이라 해서 b_n을 구한다음 a_n을 구한다.

(2) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 3a_n - 2$ 이라 할 때, 일반항을 구하여보자.

$a_{n+1} - \alpha = 3(a_n - \alpha)$ 라 하고 이를 전개하여 위의 식과 비교하면

$a_{n+1} = 3a_n - 2\alpha$, 따라서 $\alpha = 1$

$b_n = a_n - 1$ 이라 하자. $b_{n+1} = 3b_n$ 이므로 b_n은 공비가 3이고 첫째항 $b_1 = a_1 - 1 = 1$인 등비수열이다.

따라서 $b_n = 3^{n-1}$ 이다. 따라서 $b_n = a_n - 1$이므로

$\therefore\ a_n = 3^{n-1} + 1$

문제4. 다음 점화식을 $a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$꼴로 변형시키고 일반항 a_n을 구하여라.

(9) $a_1 = 4,\ a_{n+1} = 3a_n - 4$ $\quad p = 3,\ \alpha = 2$ 이므로 $a_{n+1} - 2 = 3(a_n - 2)$ 이다. 따라서 $a_1 - 2 = 2$, 공비=3
따라서 $a_n = 3^{n-1} + 1$

(10) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n + 3$ $\quad p = 2,\ \alpha = -3$ 이므로 $a_{n+1} + 3 = 2(a_n + 3)$ 이다. 따라서 $a_1 + 3 = 4$, 공비= 2
따라서 $a_n = 2^{n+1} - 7$

(11) $a_1 = 0,\ a_{n+1} = -2a_n - 3$ $\quad p = -2,\ \alpha = -1$ 이므로 $a_{n+1} + 1 = -2(a_n + 1)$이다. 따라서 $a_1 + 1 = 1$,
공비= -2, 따라서 $a_n = -\dfrac{2}{3} - (-2)^{n-1}$

(12) $a_1 = 4,\ 2a_{n+1} = a_n + 2$ $\quad p = \dfrac{1}{2},\ \alpha = 2$ 이므로 $a_{n+1} - 2 = \dfrac{1}{2}(a_n - 2)$ 이다. 따라서 $a_1 - 2 = 2$, 공비= $\dfrac{1}{2}$,
따라서 $a_n = 6 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}$

§5. 점화식 유형IV : $pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0 \quad (p+q+r=0)$의 꼴

(1) 방법 : $a_{n+2}-a_{n+1}=\dfrac{r}{p}(a_{n+1}-a_n)$ 꼴로 변형한다.

$\{a_{n+1}-a_n\}$은 첫째항이 a_2-a_1, 공비가 $\dfrac{r}{p}$ 인 등비수열이다.

$a_{n+1}-a_n=(a_2-a_1)\cdot\left(\dfrac{r}{p}\right)^{n-1}$ 의 n에 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$을 차례로 대입한 후 변끼리 더한다.

(2) $a_1=1,\ a_2=2,\quad 3a_{n+2}-4a_{n+1}+a_n=0$ 이라 할 때, 일반항을 구해보자.

주어진 식을 변형하면 $a_{n+2}-a_{n+1}=\dfrac{1}{3}(a_{n+1}-a_n)$

따라서 수열 $\{a_{n+1}-a_n\}$은 첫째항이 $a_2-a_1=1$, 공비가 $\dfrac{1}{3}$인 등비수열이다.

$a_2-a_1=1,\ a_3-a_2=\dfrac{1}{3},\ a_4-a_3=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2,\ \cdots,\ a_n-a_{n-1}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-2}$ 이므로 변끼리 더하면

따라서 $a_n-1=\dfrac{3}{2}\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$

$\therefore\ a_n=\dfrac{5}{2}-\dfrac{3}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

문제5. 다음 점화식을 $a_{n+2}-a_{n+1}=r(a_{n+1}-a_n)$꼴로 변형시키고 일반항 a_n을 구하여라.

(13) $a_1=1,\ a_2=3,\ a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ $a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)$ 이므로

$a_{n+1}-a_n=b_n$이라하면, 계차수열 $\{b_n\}$은 $b_1=a_2-a_1=2$이고 공비가 2인 등비수열.

따라서 $a_n=a_1+2(2^{n-1}-1)=2^n-1$

(14) $a_1=1,\ a_2=2,\ 3a_{n+2}-a_{n+1}-2a_n=0\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ $3(a_{n+2}-a_{n+1})=2(a_{n+1}-a_n)$ 이므로

$a_{n+1}-a_n=b_n$이라하면, 계차수열 $\{b_n\}$은 $b_1=a_2-a_1=1$이고 공비가 2/3인 등비수열.

따라서 $a_n=a_1+3-3\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}=4-3\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

§6. 점화식 유형V : $a_{n+1}=pa_n+f(n)$의 꼴

(1) 방법 ① $f(n)$이 등비수열인 경우 : 양변을 $f(n)$으로 나눈다.

② $f(n)$이 등차수열인 경우 : n 대신 $n+1$을 대입한 식에서 원래의 점화식을 빼준다.

③ $f(n)$이 멱수열인 경우 : ①, ②의 방법을 차례로 사용한다.

(2) $a_{n+1}=2a_n+2^n$ 의 일반항을 구하여 보자.

양변을 2^n으로 나누면 $\dfrac{a_{n+1}}{2^n}=\dfrac{a_n}{2^{n-1}}+1,\quad \dfrac{a_n}{2^{n-1}}=b_n$ 으로 치환하면 $b_{n+1}=b_n+1$ 이므로 b_n은 등차수열

(3) $a_{n+1}=3a_n+n$ 의 일반항을 구하여 보자.

n 대신 $n+1$을 대입하면 $a_{n+2}=3a_n+(n+1)$, 처음 식을 빼주면 $a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)+1$

$a_{n+1}-a_n=b_n$으로 치환하면 $b_{n+1}=3b_n+1$ 이므로 "유형III"의 방법으로 a_n을 구한다.

(4) $a_{n+1}=4a_n+2^n\cdot n$의 일반항을 구하여 보자.

①의 방법처럼 양변을 2^n으로 나누면 $\dfrac{a_{n+1}}{2^n}=\dfrac{2a_n}{2^{n-1}}+n,\quad \dfrac{a_n}{2^{n-1}}=b_n$ 으로 치환하면 $b_{n+1}=2b_n+n$

②의 방법처럼 n 대신 $n+1$을 대입한 식에서 원래의 점화식을 빼주면 $b_{n+2}-b_{n+1}=2(b_{n+1}-b_n)+1$

$c_n=b_{n+1}-b_n$ 이라 하면 $c_{n+1}=2c_n+1$이므로 "유형III"의 방법으로 a_n을 구한다.

문제6. 다음 점화식의 일반항 a_n을 구하여라.

(15) $a_{n+1}=3a_n+3^n,\quad a_1=4$ 양변을 3^n으로 나누면 $\frac{a_{n+1}}{3^n}=\frac{a_n}{3^{n-1}}+1$, $\frac{a_n}{3^{n-1}}=b_n$이라 하면 $\{b_n\}$은 $b_1=4$ 이고 공차가 1인 등차수열이다. 따라서 $b_n=n+3$ 이므로 $\therefore\ a_n=3^{n-1}\cdot(n+3)$

(16) $a_{n+1}=3a_n+n+1,\quad a_1=1$ $a_{n+2}=3a_{n+1}+n+2$ 이므로 처음 식을 빼주면 $a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)+1$ 이므로 $a_{n+1}-a_n=b_n$이라 하면 $\left\{b_n+\frac{1}{2}\right\}$은 $b_1+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$ 이고 공비가 3인 등비수열이다. $b_n=\frac{9}{2}\cdot3^{n-1}-\frac{1}{2}$ 이므로 $a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{9}{2}\cdot3^{n-1}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\cdot3^{n+1}-\frac{1}{2}n-\frac{3}{4}$

(17) $a_{n+1}=6a_n+3^n\cdot n,\quad a_1=0$ 양변을 3^n으로 나누면 $\frac{a_{n+1}}{3^n}=2\cdot\frac{a_n}{3^{n-1}}+n$, $\frac{a_n}{3^{n-1}}=b_n$이라 하면 $b_{n+1}=2b_n+n$ $b_{n+2}=2b_n+n+1$에서 b_{n+1}을 빼주면 $b_{n+2}-b_{n+1}=2(b_{n+1}-b_n)+1$, $b_{n+1}-b_n=c_n$ 이라 하면 $\{c_n+1\}$은 $c_1+1=b_2-b_1+1=\frac{a_2}{3}-a_1+1=2$ 이고 공비가 2인 등비수열 이므로 $c_n=2^n-1$ 이므로 $b_n=2^n-n-1$, 따라서 $a_n=3^{n-1}\cdot b_n=2\cdot6^{n-1}-(n+1)\cdot3^{n-1}$

§7. 점화식 유형VI : $na_{n+1}=(n+1)a_n+p$의 꼴

(1) 방법 : 양변을 $n(n+1)$로 나눈다.

(2) $na_{n+1}=(n+1)a_n+2$ 의 일반항을 구하여 보자.

양변을 $n(n+1)$ 로 나누면 $\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}+2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$,

$\frac{a_n}{n}=b_n$ 으로 치환하면 $b_{n+1}=b_n+2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$ 이므로 $b_n=b_1+2\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=-1+2\left(1-\frac{1}{n}\right)$

따라서 $\frac{a_n}{n}=1-\frac{2}{n}$ 이므로 $a_n=n-2$

§8. 점화식 유형VII : $a_{n+1}=pa_n{}^q$의 꼴

(1) 방법 : 양변에 p 또는 p의 소인수를 밑으로 하는 로그를 취한다.

(2) $a_{n+1}=2a_n{}^3$의 일반항을 구하여 보자

양변에 밑이 2인 로그를 취하면 $\log_2 a_{n+1}=1+3\log_2 a_n$ 이때, $\log_2 a_n=b_n$으로 치환하면 $b_{n+1}=3b_n+1$ "유형III"의 방법으로 a_n을 구한다.

§9. 점화식 유형VIII : $S_n=pa_n+f(n)$의 꼴

(1) 방법 : $a_n=S_n-S_{n-1}$ 임을 이용하여, $a_n=\alpha a_n+g(n)$ 꼴로 만들고 "유형V"의 방법으로 a_n을 구한다.

문제7. 다음 점화식의 일반항 a_n을 구하여라.

(18) $na_{n+1}=(n+1)a_n+1,\quad a_1=2$ 양변을 $n(n+1)$로 나누면, $\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}=\frac{1}{n(n+1)}$, $\frac{a_n}{n}=b_n$이라 하면, $b_{n+1}-b_n=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=3-\frac{1}{n}$ 이므로 $a_n=nb_n=3n-1$

(19) $a_{n+1}=3a_n^2,\quad a_1=1$ 양변에 밑이 3인 로그를 취하면 $\log_3 a_{n+1}=1+2\log_3 a_n$, $\log_3 a_n=b_n$이라 하면 $b_{n+1}=1+2b_n$이므로 $b_{n+1}+1=2(b_n+1)$ 따라서 $b_n=2^{n-1}-1$ 이므로 $a_n=3^{b_n}=3^{2^{n-1}-1}$

(20) $S_n=2a_n+n,\quad a_1=2$ $S_{n-1}=2a_{n-1}+(n-1)$이므로 $a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}+1$ 따라서 $a_n-1=2(a_{n-1}-1)$ 이므로 수열 $\{a_n-1\}$은 첫째항이 $a_1-1=1$, 공비가 2인 등비수열이다. 따라서 $a_n-1=2^{n-1}$이므로 $a_n=2^{n-1}+1$

§10. 점화식 유형IX : $pa_{n+1}+qa_{n+1}a_n+ra_n=0$의 꼴

(1) 방법 : 양변을 $a_n a_{n+1}$로 나눈다.

(2) $2a_{n+1}+3a_{n+1}a_n+4a_n=0$ 의 일반항을 구하여 보자.

양변을 $a_{n+1}a_n$으로 나누면 $\dfrac{2}{a_n}+3+\dfrac{4}{a_{n+1}}=0$ 이고, $\dfrac{1}{a_n}=b_n$으로 치환하면 $2b_n+3+4b_{n+1}=0$ 이므로

$b_{n+1}=-\dfrac{1}{2}b_n-\dfrac{3}{4}$ 따라서 "유형Ⅲ"의 방법으로 a_n을 구한다.

§11. 점화식 유형X : $a_{n+1}=\dfrac{pa_n}{qa_n+r}$의 꼴 (단, $a_n\neq 0$)

(1) 방법 : 양변의 역수를 취하여 $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{q}{p}+\dfrac{r}{p}\cdot\dfrac{1}{a_n}$ 로 만든다.

(2) $a_{n+1}=\dfrac{ra_n+s}{pa_n+q}$의 꼴의 경우

$x=\dfrac{rx+s}{px+q}$ 의 한 근 α에 대하여 $a_n-\alpha=b_n$으로 치환하면 $b_{n+1}=\dfrac{b_n}{yb_n+z}$ 꼴이 된다.

문제8. 다음 점화식의 일반항 a_n을 구하여라.

(21) $a_{n+1}+3a_{n+1}a_n+2a_n=0,\quad a_1=-\dfrac{2}{3}$ 양변을 $a_{n+1}a_n$으로 나누면 $\dfrac{1}{a_n}+3+\dfrac{2}{a_{n+1}}=0,\quad \dfrac{1}{a_n}=b_n$ 이라 하면,

$b_n+3+2b_{n+1}=0$ 이므로 $b_{n+1}+1=-\dfrac{1}{2}(b_n+1)$ 이므로 수열 $\{b_n+1\}$은 첫째항이 $-\dfrac{1}{2}$, 공비가 $-\dfrac{1}{2}$인 등비수열이다.

따라서 $b_n=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n-1$ 이므로 $a_n=\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n-1}$

(22) $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+1},\quad a_1=1$ 양변에 역수를 취하면 $\dfrac{1}{a_{n+1}}=2+\dfrac{1}{a_n}$ 이므로 $\dfrac{1}{a_n}=b_n$이라 하면,

$b_{n+1}=b_n+2$ 이므로 $b_n=2n-1$, 따라서 $a_n=\dfrac{1}{2n-1}$

(23) $a_{n+1}=\dfrac{5a_n+6}{2a_n+1},\quad a_1=\dfrac{13}{3}$ $x=\dfrac{5x+6}{2x+1}$의 해를 구하면 $x=-1$ or $x=3$ 이므로 $x=-1$을 이용하여

$a_n+1=b_n$ 이라 하면, $b_{n+1}=\dfrac{7b_n}{2b_n-1}$ 양변을 역수를 취하면 $\dfrac{1}{b_{n+1}}=\dfrac{2}{7}-\dfrac{1}{7}\cdot\dfrac{1}{b_n}$

$\dfrac{1}{b_n}=c_n$이라 하면, $c_{n+1}=-\dfrac{1}{7}c_n+\dfrac{2}{7} \Leftrightarrow c_{n+1}-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{7}\left(c_n-\dfrac{1}{4}\right)$ 이므로 $c_n=\left(c_1-\dfrac{1}{4}\right)\left(-\dfrac{1}{7}\right)^{n-1}+\dfrac{1}{4}$

따라서 $c_n=-\dfrac{1}{16}\left(-\dfrac{1}{7}\right)^{n-1}+\dfrac{1}{4}$이므로 $b_n=\dfrac{1}{-\dfrac{1}{16}\left(-\dfrac{1}{7}\right)^{n-1}+\dfrac{1}{4}}$

따라서 $a_n=b_n-1=\dfrac{1}{-\dfrac{1}{16}\left(-\dfrac{1}{7}\right)^{n-1}+\dfrac{1}{4}}-1$

§12. 점화식 유형XI : $pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0 \quad (p+q+r\neq 0,\ pqr\neq 0)$의 꼴

(1) 방법 : $a_{n+2}-\alpha\cdot a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha\cdot a_n)$ 꼴이라 하고 α값과 β값을 찾는다.

$a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$ 이고, $a_{n+2}+\frac{q}{p}a_{n+1}+\frac{r}{p}a_n=0$ 이므로 $\alpha+\beta=-\frac{q}{p}$, $\alpha\beta=\frac{r}{p}$ 이다.

따라서 α, β는 $px^2+qx+r=0$의 해에 해당한다.

1) $\alpha\neq\beta$ 인 경우

수열 $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$은 첫째항이 $a_2-\alpha a_1$, 공비가 β 인 등비수열이므로 $a_{n+1}-\alpha a_n=(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-1}$ ①

$a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$ 은 $a_{n+2}-\beta\cdot a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta\cdot a_n)$라 할 수도 있으므로

수열 $\{a_{n+1}-\beta a_n\}$은 첫째항이 $a_2-\beta a_1$, 공비가 α 인 등비수열이므로 $a_{n+1}-\beta a_n=(a_2-\beta a_1)\alpha^{n-1}$ ②

①에서 ②를 빼면 $(\alpha-\beta)a_n=(a_2-\beta a_1)\alpha^{n-1}-(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-1}$

따라서 $a_n=\frac{a_2-\beta a_1}{\alpha-\beta}\alpha^{n-1}-\frac{a_2-\alpha a_1}{\alpha-\beta}\beta^{n-1}$

2) $\alpha=\beta$ 인 경우

수열 $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$은 첫째항이 $a_2-\alpha a_1$, 공비가 α 인 등비수열이므로 $a_{n+1}-\alpha a_n=(a_2-\alpha a_1)\alpha^{n-1}$

양변을 α^{n-1}로 나누면 $\frac{a_{n+1}}{\alpha^{n-1}}-\frac{a_n}{\alpha^{n-2}}=a_2-\alpha a_1$

$\frac{a_n}{\alpha^{n-2}}=b_n$으로 치환하면 $b_{n+1}-b_n=a_2-\alpha a_1$ 이므로 $b_n=\alpha a_1+(a_2-\alpha a_1)(n-1)$

따라서 $a_n=\frac{a_1}{\alpha}\alpha^n+\frac{a_2-\alpha a_1}{\alpha}(n-1)\alpha^{n-1}$

(2) 실재 풀이에서는 $\alpha\neq\beta$일 경우 $a_n=A\alpha^n+B\beta^n$ 로 놓고 a_1, a_2의 값을 대입하여 연립하여 해결

$\alpha=\beta$ 일 경우 $a_n=A\alpha^n+B(n-1)\alpha^{n-1}$ 로 놓고 a_1, a_2의 값을 대입하여 연립하여 해결

문제9. 다음 점화식의 일반항 a_n을 구하여라.

(24) $(a_{n+2}+a_{n+1})=6(a_{n+1}-a_n)$, $a_1=1$, $a_2=5$ $x^2-5x+6=0$의 해가 $x=2$ or $x=3$ 이므로

$a_n=A\cdot 3^n+B\cdot 2^n$라 하자.

$a_1=3A+2B=1$, $a_2=9A+4B=5$ 이므로 $A=1$, $B=-1$ 따라서 $a_n=3^n-2^n$

(25) $a_1=1$, $a_2=4$, $a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$ $x^2-4x+4=0$의 해가 $x=2$이므로 $a_n=A\cdot 2^n+B(n-1)2^{n-1}$ 이라 하자. $a_1=2A=1$이므로 $A=2^{-1}$, $a_2=4A+2B=2+2B=4$ 이므로 $B=1$

따라서 $a_n=2^{n-1}+(n-1)2^{n-1}=n\cdot 2^{n-1}$

※ 하노이탑

A, B, C 세 개의 막대 중 한 개의 막대에 n개의 크기가 서로 다른 원판이 있다. n개의 원판은 반드시 크기가 큰 원판 위에 크기가 작은 원판을 놓아야 하며, 한 번에 한 개씩만 이동이 가능하다.

(26) n개의 원판을 다른 막대에 옮기는 데 필요한 최소한의 횟수를 a_n이라 하자.

$a_{n+1}=(\alpha_1 n+\beta_1)a_n+(\alpha_2 n+\beta_2)$할 때, α_1, α_2, β_1, β_2, a_1의 값을 각각 구하여라.

$n+1$개의 원판이 있다고 하자. 제일 큰 $n+1$번째 판을 제외한 n의 원판을 옮기는 데 필요한 횟수가 a_n이고, n개의 원판을 모두 옮긴 후 다시 $n+1$번째 판위에 n개의 원판을 옮겨야 하므로 다시 a_n번 원판을 움직여야 한다. 따라서 $n+1$개의 원판을 옮기는데 필요한 횟수는 $a_{n+1}=2a_n+1$, $a_1=1$ 이다. 따라서 $\alpha_1=\alpha_2=0$, $\beta_1=2$, $\beta_2=1$, $a_1=1$

(27) A막대에 있는 10개의 원판을 다른 막대로 옮기기 위한 시행횟수의 최솟값을 구하여라.

$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$ 이므로 수열 $\{a_n+1\}$은 첫째항이 $a_1+1=2$ 이고 공비가 2인 등비수열이다.

따라서 $a_n=2^n-1$ 이다.

201□학년도 2학기 1차고사 기출문제	이름:	월 일	점수 :

***** 五 指 選 多 型 *****

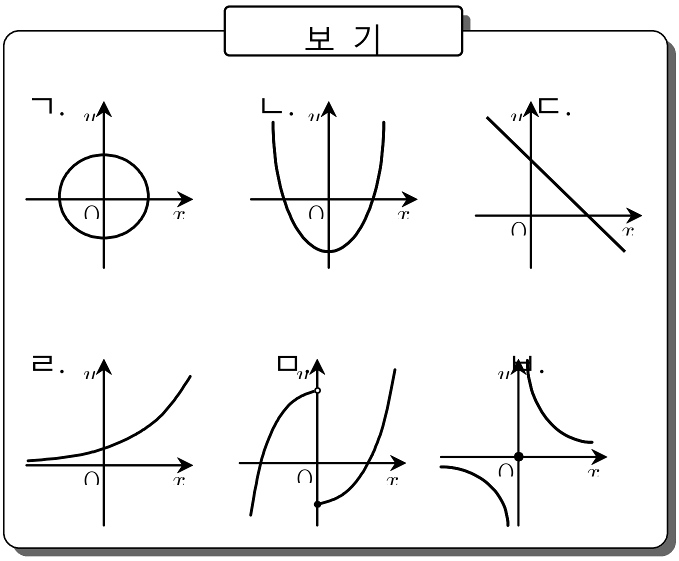
1. 다음 중 집합인 것은? **【4.0】**
① 매우 큰 자연수의 모임
② 50에 가까운 수의 모임
③ 노래를 잘하는 사람의 모임
④ 1학년 중에서 신장이 큰 학생의 모임
⑤ 2014인천아시아게임 경기 종목의 모임

2. 두 집합 $A=\{1,\ 3,\ a\}$, $B=\{3,\ 5,\ b\}$에 대하여 $A\subset B$, $B\subset A$일 때, $a+b$의 값은? **【4.0】**
① 2 ② 3 ③ 4 ④ 6 ⑤ 7

3. 두 집합 $X=\{0,1,2\}$, $Y=\{0,1,2,3,4\}$에 대하여 다음 중 X에서 Y로의 함수가 **아닌** 것은? **【4.0】**
① $f(x)=x^2$ ② $f(x)=x+3$ ③ $f(x)=|x|$
④ $f(x)=x+1$ ⑤ $f(x)=x^2-x+1$

4. 모든 실수 x에 대하여 무리식 $\sqrt{x^2-2kx+10k-21}$의 값이 항상 실수가 되도록 하는 정수 k의 개수는? **【4.0】**
① 3개 ② 4개 ③ 5개 ④ 6개 ⑤ 7개

5. 실수 전체의 집합에서 정의된 다음 <보기>의 그래프 중 함수의 개수를 a, 일대일함수의 개수를 b, 일대일 대응의 개수를 c라 할 때, $a+b+c$의 값은? **【4.3】**



① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 15

6. 첫째항이 $\frac{1}{32}$이고 공비가 -2인 등비수열의 제5항은? **【4.3】**
① -2 ② 2 ③ 1 ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

7. 전체집합 U의 두 부분집합 $A,\ B$에 대하여 연산 $*$을 $A*B=(A\cup B)\cap(A\cap B)^C$라 할 때, 다음 중 항상 성립한다고 할 수 **없는** 것은? **【4.3】**
① $(A*B)*A=A$ ② $U*A=A^C$
③ $A*A=\varnothing$ ④ $A*B=B*A$
⑤ $A*\varnothing=A$

8. 집합 $A=\{\varnothing, 1, \{2,\ 3\}\}$일 때, 다음 중 옳지 **않은** 것은? **【4.3】**
① $\varnothing\in A$ ② $\{\varnothing,\ 1\}\in A$ ③ $\{2,\ 3\}\in A$
④ $\{1\}\subset A$ ⑤ $\{\varnothing,\ \{2,\ 3\}\}\subset A$

9. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=n^2+3n$일 때, $a_1+a_3+a_5$의 값은? **【4.5】**
① 22 ② 23 ③ 24 ④ 25 ⑤ 26

10. $(f\circ f)(x)=x$, $(g\circ g)(x)=x$를 만족하는 두 함수 $f(x)=ax+b$, $g(x)=\dfrac{2x-1}{x-b}$에 대하여 상수 $a,\ b$의 곱 ab의 값은? **【4.5】**
① 3 ② 1 ③ -1 ④ -2 ⑤ -3

11. 유리함수 $y=\dfrac{2x-5}{x-3}$의 그래프에 대한 <보기>의 설명 중 **옳은** 것만을 있는 대로 고른 것은? **【4.5】**

보 기

ㄱ. 점 $(3,\ 2)$에 대하여 대칭이다.
ㄴ. 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
ㄷ. 모든 사분면을 지난다.
ㄹ. 함수 $y=\dfrac{3x+7}{x+2}$의 그래프를 평행이동하면 주어진 함수의 그래프와 겹쳐진다.
ㅁ. 이 함수의 역함수는 $y=\dfrac{3x-5}{x-2}$이다.

① ㄱ, ㄴ ② ㄴ, ㄷ ③ ㄱ, ㄷ, ㅁ
④ ㄴ, ㄹ, ㅁ ⑤ ㄱ, ㄹ, ㅁ

12. 두 함수 $y=\sqrt{x+4}$와 $y=x+k$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 상수 k값의 범위는? **【4.5】**
① $k\le 4$ ② $k>\frac{17}{4}$ ③ $k\le\frac{17}{4}$
④ $4<k<\frac{17}{4}$ ⑤ $4\le k<\frac{17}{4}$

13. 함수 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x-1 & (x<0)\\ 2x-1 & (x\geq 0)\end{cases}$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 서로 다른 두 점 P,Q에서 만난다. 이 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이는? **【4.7】**

① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$
④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

14. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 A_n이라 하고 등비수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 B_n이라 하자. $A_4=B_4=20,\ A_8=B_8=30$ 일 때, $B_{12}-A_{12}$의 값은?**【4.7】**

① 0 ② 5 ③ 10 ④ 15 ⑤ 20

15. 연료 탱크의 용량의 비가 $1:2$인 경차와 중형차의 연비(연료 $1l$당 주행거리)를 비교하기 위해 두 자동차의 속도를 같게 하여 다음과 같이 주행실험을 실시하였다.
두 자동차에 연료를 가득 채우고 $320\mathrm{km}$를 주행 후 경차와 중형차의 연료 탱크에 남은 연료량의 비는 $5:12$였고, 다시 연료를 가득 채우고 $400\mathrm{km}$를 주행 후 경차와 중형차의 연료 탱크에 남은 연료의 비는 $3:8$이었다. 경차와 중형차의 연비의 비가 $a:b$라 하면 $a+b$의 값은? (단, $a,\ b$는 서로소인 자연수이다.) **【4.7】**

① 13 ② 15 ③ 21 ④ 24 ⑤ 30

16. 올해부터 매년 초에 500만 원씩 20년 간 지급되는 연금이 있다. 연이율 5%, 1년마다 복리로 계산하여 이 연금을 올해 초에 한꺼번에 받는다면 받아야 할 금액은? **【4.7】** (단, $1.05^{19}=2.52\ \ 1.05^{20}=2.65$로 계산하고 십 만원 단위에서 반올림한다.)

① 약 5000만원 ② 약 5500만원 ③ 약 6000만원
④ 약 6500만원 ⑤ 약 7000만원

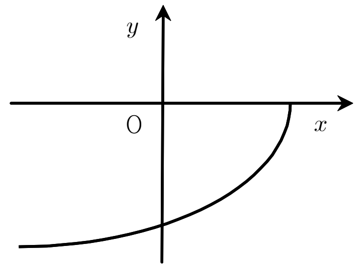
***** 單 答 形 *****

$[1\sim2]$ ※ 다음 두 문제는 **단답형**입니다. 문제를 잘 읽고 알맞은 **정답**을 구하여 **OMR카드 앞면**에 작성하시기 바랍니다.

1.(단답형)
다음 수열의 제10항을 구하여라. **【5.0】**

$$\frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{8},\ \frac{7}{16},\ \frac{9}{32},\ \cdots$$

2.(단답형)
무리함수 $y=a\sqrt{bx+c}$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 유리함수 $y=\dfrac{b}{x+a}+c$의 그래프가 지나지 않는 사분면은 무엇인가? **【5.0】**



***** 敍 述 形 *****

$[3\sim6]$ ※ 다음 네 문제는 **서술형**입니다. 문제에 따른 **식과 각 조건에 대한 풀이 그리고 정답**을 **OMR카드 뒷면**에 작성하시기 바랍니다. **정답은 반드시 풀이와 구분하여** 표시를 해야 하며, 정답만 인정될 경우 1점을 부여하고, 식과 풀이가 논리적으로 옳다고 여겨지면 나머지 점수를 부여합니다. 최선을 다하는 성의를 보여 주세요.

※ 주 의
① 문제에 들어있지 않은 문자를 사용할 때에는 반드시 정의를 할 것
② 식을 세울 때에는 식에 대한 설명을 반드시 표현할 것

※ 함수 $f(x)=2x-[2x]$에 대하여 다음 물음에 답하여라. (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수, $f^1=f,\ \ f^{n+1}=f\circ f^n$ 이다.) **(서술형3번, 서술형4번)**

3.(서술형) $f^n\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{5}$가 되기 위한 자연수 n의 최솟값을 구하여라. **【5.0】**

4.(서술형) $f^{31}\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{m}{n}$일 때 $m+n$의 값은? ($m,\ n$은 서로소인 자연수) **【5.0】**

※ 등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_3=33,\ a_{10}=19$일 때, 다음 물음에 답하시오. **(서술형5번, 서술형6번)**

5.(서술형) $S_n=a_1+a_2+\ \cdots\ +a_n$라 할 때, S_n의 최댓값을 구하여라. (일반항을 구하는 과정이 반드시 포함되어야 한다) **【5.0】**

6.(서술형) $S_n=280$이 되기 위한 n의 값을 모두 구하고, 또한 모든 n의 합을 구하여라. (n의 값이 유일한 경우에는 n값을 구하여라) **【5.0】**