1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	2	2	2	5	3	3	3

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
4	3	1	1	1	2	2	2	5	2

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
2	4	4	2	1	4	4	1	2	1

31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	1	3	3	4	2	5	3	4	1

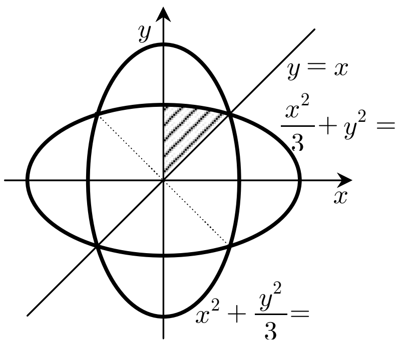
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	1	1	2	2	1	3	1	4	4

51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
1	2	1	1	1	3	1	4	5	5

심화57 두 타원의 교점을 구하면 $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

두 도형은 $y=x$에 대하여 대칭이므로

두 타원의 내부의 공통부분은 제1사분면에서 타원 $x^2+\frac{y^2}{3}=1$이 직선 $y=x$와 만나서 만들어지는 영역중에서 $y=x$의 왼쪽의 영역과 y축으로 둘러싸인 영역의 8배와 같다.



색칠한 부분의 넓이를 S가 하면

$$S=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}\,dx-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}\,dx-\frac{3}{8}$$

$x=\sqrt{3}\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 치환하면 $dx=\sqrt{3}\cos\theta d\theta$이고, $x=0$이면 $\theta=0$, $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$이면 $\theta=\frac{\pi}{6}$이므로

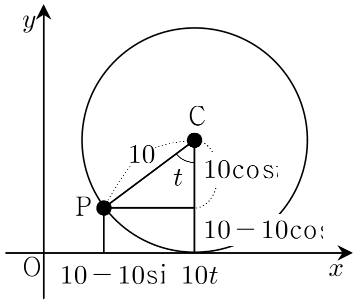
$$S=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}\,dx-\frac{3}{8}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{3}\cos^2\theta d\theta-\frac{3}{8}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}(1+\cos 2\theta)}{2}d\theta-\frac{3}{8}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)-\frac{3}{8}=\frac{\sqrt{3}}{12}\pi$$

따라서 구하면 넓이는

$$8S=8\cdot\frac{\sqrt{3}}{12}\pi=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$$

심화58 원 위의 한 점 P가 좌표평면의 원점에서 출발한다고 하자.



점 P는 t초안 t라디안만큼 회전하므로 t초 후의 점 P의 좌표는 $\mathrm{P}(10t-10\sin t,\ 10-10\cos t)$ 가 된다.

$\dfrac{dx}{dt}=10-\sin t,\ \dfrac{dy}{dt}=10\sin t$이므로 점 P의 t초 후의 속도는

$|\vec{v}|=\sqrt{(10-10\cos t)^2+(10\sin t)^2}=\sqrt{100(\cos^2 t+\sin^2 t)-200\cos t+100}$

$=\sqrt{200-200\cos t}\le 10\sqrt{2}\ \ (\because -1\le \cos t\le 1)$

따라서 점P의 속력은 $10\sqrt{2}$이다.

심화59 주어진 두 개의 구

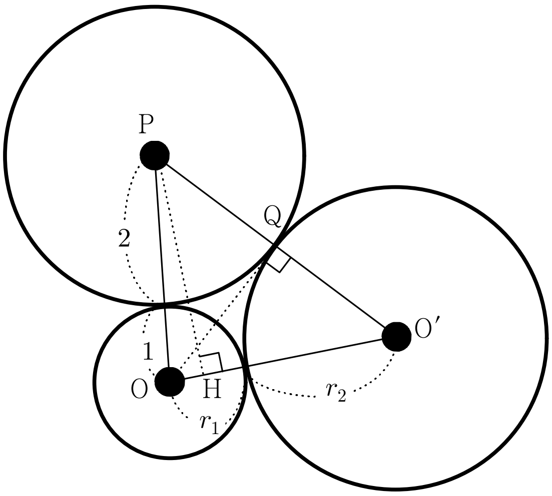
$x^2+y^2+z^2=1$

$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=4$

의 중심을 각각 O, O′이라 하면 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{O'}(2,\ 1,\ 2)$이미로

두 구의 중심 사이의 거리 $d=\sqrt{2^2+1^2+2^2}=3$

이고, 두 구의 반지름의 길이를 각각 $r_1,\ r_2$라 하면 $r_1=1,\ r_2=2$ 이므로 두 구는 서로 외접한다.



이때, $\overline{\mathrm{OP}}=3,\ \overline{\mathrm{OO'}}=3,\ \overline{\mathrm{O'P}}=4$로 항상 일정하므로 점 P에서 $\overline{\mathrm{OO'}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면,

두 구에 동시에 접하는 구의 중심 P의 자취는 중심이 점 H이고 $\overline{\mathrm{PH}}$를 반지름으로 하는 원이 된다.

$\triangle\mathrm{OO'P}$에서 $\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OO'}}^2-\overline{\mathrm{O'Q}}^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$

$\angle\mathrm{OPO'}$에서 $\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{PH}}\cdot\overline{\mathrm{OO'}}=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OQ}}\cdot\overline{\mathrm{PO'}}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PH}}=\dfrac{\overline{\mathrm{OQ}}\cdot\overline{\mathrm{PO'}}}{\overline{\mathrm{OO'}}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$

따라서 점 P 전체의 집합이 나타내는 원의 둘레의 길이는

$2\pi\cdot\dfrac{4\sqrt{5}}{3}=\dfrac{8\sqrt{5}}{3}\pi$

심화60 평면 $y=4$의 법선벡터를 v_1 이라 하면 $v_1=(0,\ 1,\ 0)$

평면 $y+\sqrt{3}z+8=0$의 법선벡터를 v_2라 하면 $v_2=(0,\ 1,\ \sqrt{3})$

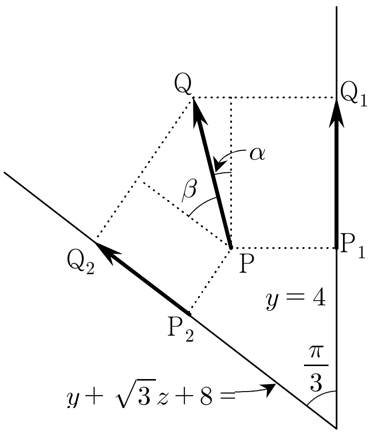
두 평면의 이면각의 크기를 θ라 하면

$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}}{|\overrightarrow{v_1}||\overrightarrow{v_2}|}=\dfrac{1}{1\cdot 2}=\dfrac{1}{2}$ 이므로 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$

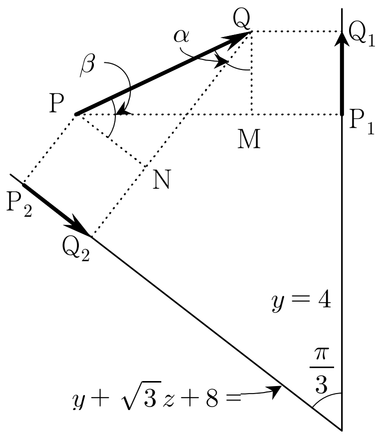
벡터 $\overrightarrow{PQ}$와 $\overrightarrow{P_1Q_1}$, $\overrightarrow{P_2Q_2}$ 가 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{3}$또는 $\alpha+\beta=\dfrac{2}{3}\pi$

(i) $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{3}$인 경우



(i) $\alpha+\beta=\dfrac{2}{3}\pi$인 경우



두 경우 중에 $\alpha+\beta=\dfrac{2}{3}\pi$일때 정사영의 길이가 더 짧으므로 주어진 식의 최댓값이 나온다.

$2|\overrightarrow{PQ}|^2-|\overrightarrow{P_1Q_1}|^2-|\overrightarrow{P_2Q_2}|^2=\left(|\overrightarrow{PQ}|^2-|\overrightarrow{P_1Q_1}|^2\right)+\left(|\overrightarrow{PQ}|^2-|\overrightarrow{P_2Q_2}|^2\right)=\overline{PM}^2+\overline{QN}^2$

한편 구의 중심 $(0,\ 0,\ 0)$으로부터 두 평면에 이르는 거리는 모두 4로 같으므로 $\overline{PM}^2+\overline{QN}^2$이 최댓값을 가지기 위해서는 $\overrightarrow{PQ}$가 구의 중심을 지나는 벡터이어야 하며, 두 평면의 교선과 수직이면 된다.

이때 $\overline{PM}=\overline{QN}$이 되므로

$\overline{PM}^2+\overline{QN}^2=2\overline{PM}^2=2\cdot\left(4\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^2=2\cdot(2\sqrt{3})^2=24$

별해)

$2|\overrightarrow{PQ}|^2-|\overrightarrow{P_1Q_1}|^2-|\overrightarrow{P_2Q_2}|^2=\left(|\overrightarrow{PQ}|^2-|\overrightarrow{P_1Q_1}|^2\right)+\left(|\overrightarrow{PQ}|^2-|\overrightarrow{P_2Q_2}|^2\right)=\overline{PM}^2+\overline{QN}^2$

$\triangle QMP$에서 $\overline{PM}=PQ\sin\alpha$, $\triangle PNQ$에서 $\overline{QN}=\overline{PQ}\sin\beta$ 이므로

$\overline{PM}^2+\overline{QN}^2=\overline{PQ}^2\sin^2\alpha+\overline{PQ}^2\sin^2\beta=\overline{PQ}^2(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)$

$=\overline{PQ}^2\left(\dfrac{1-\cos2\alpha}{2}+\dfrac{1-\cos2\beta}{2}\right)=\overline{PQ}^2\left\{1-\dfrac{1}{2}(\cos2\alpha+\cos2\beta)\right\}$

$=\overline{PQ}^2\{1-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)\}=\overline{PQ}^2\left\{1+\dfrac{1}{2}\cos\left(2\alpha-\dfrac{2}{3}\pi\right)\right\}$ $\left(\because\ \alpha+\beta=\dfrac{2}{3}\pi\right)$

한편, $\overline{PQ}\le 4$ 이고, $-1\le\cos\left(2\alpha-\dfrac{2}{3}\pi\right)\le 1$ 이므로

$2|\overrightarrow{PQ}|^2-|\overrightarrow{P_1Q_1}|^2-|\overrightarrow{P_2Q_2}|^2\le 4^2\cdot\left(1+\dfrac{1}{2}\right)=24$

(단, 등호는 $\overline{PQ}=4$, $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ 일 때 성립)

따라서 구하는 최댓값은 24이다.