

[수학경시대회 기하와 벡터 답안지]

1. 좌표공간에 네 점 A(1, 0, 0), B(0, 2, 0), C(-3, 0, 0), D(0, 0, 4)를 꼭짓점으로 하는 사면체 ABCD가 있다. 모서리

BD 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overrightarrow{PA}^2 + \overrightarrow{PC}^2$ 의 값을 최소로 하는 점 P의 좌표를 (a, b, c) 를 구하여라.

$$\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OB} + (1-t)\overrightarrow{OD} = (0, 2t, 4-4t) \text{ 이므로}$$

$$\overrightarrow{AP} = (-1, 2t, 4-4t), \overrightarrow{BP} = (3, 2t, 4-4t)$$

$$\overrightarrow{AP}^2 + \overrightarrow{BP}^2 = |\overrightarrow{AP}|^2 + |\overrightarrow{BP}|^2 = 1 + 4t^2 + 16(1-t)^2 + 9 + 4t^2 + 16(1-t)^2 = 40t^2 - 64t + 42$$

$$f(t) = 40t^2 - 64t + 42 \text{ 라 하면 } f'(t) = 80t - 64, f'\left(\frac{4}{5}\right) = 0 \text{ 이므로 } t = \frac{4}{5} \text{ 일 때 } f(t) \text{ 는 최솟값을 가진다.}$$

$$\text{따라서 } \overrightarrow{OP} = \left(0, \frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right) \text{ 이므로 } P\left(0, \frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

2. 평면 α 와 구 $C: x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 2z + k = 0$ 가 점 A(2, 0, -3)에서 접한다. 평면 α 에 평행하고 구 C와 접하는

α 와 다른 평면의 방정식을 $x + py + qz + r = 0$ 라 할 때, $p + q + r + k$ 값을 구하여라.

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 + z^2 + 2z + 1 = 3 - k \text{ 이므로 } (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 3 - k$$

$$\text{구의 중심을 } C \text{라 하면 } C(1, -1, -1) \text{ 이므로 } \overrightarrow{CA}^2 = 1 + 1 + 4 = 6 = 3 - k \text{ 이므로 } k = -3$$

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (1, 1, -2)$$

$$\overrightarrow{CA} \text{ 는 평면 } \alpha \text{ 에 평행하고 구에 접하는 평면의 법선벡터이므로 구하는 평면의 방정식을 } x + y - 2z + d = 0 \text{ 이라 놓을 수 있다.}$$

$$\text{구의 중심으로부터 평면 } x + y - 2z + d = 0 \text{ 까지의 거리는 구의 반지름의 길이 } \sqrt{6} \text{ 과 같으므로}$$

$$\frac{|1 - 1 + 2 + d|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \sqrt{6} \text{ 이므로 } d + 2 = 6 \text{ or } -6 \text{ 이다. 따라서 } d = 4 \text{ or } -8$$

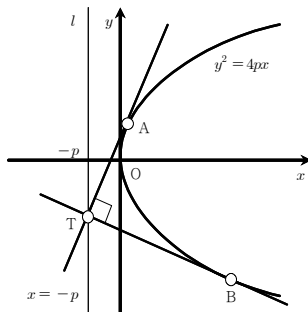
$$\text{따라서 } x + y - 2z + 4 = 0 \text{ 또는 } x + y - 2z - 8 = 0$$

$$\text{그런데 평면 } x + y - 2z - 8 = 0 \text{ 은 점 } A \text{ 를 지나는 평면이므로 } \alpha \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 구하는 평면은 } x + y - 2z + 4 = 0 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } p = 1, q = -2, r = 4, k = -3 \text{ 이므로 } p + q + r + k = 0$$

3. 다음 포물선의 접선의 특징 세 가지를 모두 증명하여라.



[성질1] 준선 l 위의 임의의 한 점 T에서 포물선 C 에 그은 두 접선은 서로 직교한다.

$$\text{접선과 포물선의 접점을 } (x_1, y_1) \text{라 하면 접선의 방정식은 } 2y_1y = 4p(x + x_1) \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } y = \frac{2p}{y_1}(x + x_1) \text{ 이 때, 점 T에서 포물선 } C \text{에 그은 접선의 기울기를 } m (\neq 0) \text{이라 하면,}$$

$$\frac{2p}{y_1} = m \text{ 이므로 } y_1 = \frac{2p}{m}$$

$$(x_1, y_1) \text{은 포물선 위의 점이므로 } y_1^2 = 4px_1 \text{을 만족하므로 } \frac{4p^2}{m^2} = 4px_1. \text{ 따라서 } x_1 = \frac{p}{m^2}$$

$$\text{포물선 } C \text{의 준선 } l \text{의 방정식은 } l: x = -p \text{ 이므로 준선 } l \text{ 위의 임의의 한 점 T의 좌표를 } T(-p, t) \text{ (단, } t \text{는 임의의 상수) 로 놓을 수 있다.}$$

$$\text{따라서 접선의 방정식 } y = mx + \frac{p}{m} \Leftrightarrow t = -mp + \frac{p}{m} \Leftrightarrow pm^2 + tm - p = 0 \text{ 이 성립한다.}$$

$$\text{위의 } m \text{에 대한 이차방정식의 서로 다른 두 근을 } m_1, m_2 \text{라 하면, 근과 계수의 관계에 의해 } m_1m_2 = \frac{-p}{p} = -1 \text{ 이 성립하므}$$

$$\text{로, 두 접선은 서로 직교한다.}$$

[성질2] 포물선 C 의 서로 직교하는 두 접선의 교점 T는 준선 l 위에 있다.

$$\text{포물선 } C \text{의 서로 직교하는 두 접선을 } y = m_1x + \frac{p}{m_1}, y = m_2x + \frac{p}{m_2} \text{ (단, } m_1 > 0 > m_2, m_1m_2 = -1) \text{로 놓을 수 있다.}$$

$$\text{이 때, 두 접선의 교점 T의 } x \text{좌표는 } m_1x + \frac{p}{m_1} = m_2x + \frac{p}{m_2} \text{에서}$$

$$(m_1 - m_2)x = -p\left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}\right) = \frac{p(m_1 - m_2)}{m_1m_2} = p(m_2 - m_1) (\because m_1m_2 = -1)$$

$$\therefore x = -p (\because m_1 \neq m_2)$$

$$\text{따라서 교점 T는 준선 } x = -p \text{ 위에 있다.}$$

[성질3] 포물선 C 의 서로 직교하는 두 접선의 접점이 각각 A, B일 때, 두 점 A, B를 지나는 직선은 포물선 C 의 초점 F를 지난다.

$$\text{포물선 } C \text{와 서로 직교하는 두 접선 } y = m_1x + \frac{p}{m_1}, y = m_2x + \frac{p}{m_2} \text{ (단, } m_1 > 0 > m_2, m_1m_2 = -1) \text{을 각각 연립하면 두}$$

$$\text{접점 A, B의 좌표는 } A\left(\frac{p}{m_1^2}, \frac{2p}{m_1}\right), B\left(\frac{p}{m_2^2}, \frac{2p}{m_2}\right) \text{ 이다. 이 때, 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기를 } a \text{라 하면,}$$

$$a = \frac{\frac{2p}{m_1} - \frac{2p}{m_2}}{\frac{p}{m_1^2} - \frac{p}{m_2^2}} = \frac{2m_1m_2}{m_2 + m_1} = \frac{-2}{m_1 + m_2} (\because m_1m_2 = -1)$$

$$\text{따라서 직선 AB의 방정식은 } y = \frac{-2}{m_1 + m_2}\left(x - \frac{p}{m_1^2}\right) + \frac{2p}{m_1}$$

$$\text{직선 AB의 } x \text{절편을 구하면 : } 0 = -\frac{2}{m_1 + m_2}\left(x - \frac{p}{m_1^2}\right) + \frac{2p}{m_1} \text{ 이므로}$$

$$x = \frac{2p}{m_1} \times \frac{m_1 + m_2}{2} + \frac{p}{m_1^2} = \frac{p(m_1^2 + m_1m_2 + 1)}{m_1^2} = p (\because m_1m_2 = -1)$$

$$\text{따라서 두 접점 A, B를 지나는 직선은 포물선 } C \text{의 초점 } F(p, 0) \text{을 지난다.}$$