



전주대학교사범대학부설고등학교

2018 기하와 벡터(3학년)

수학 주제 탐구 보고서

[주제: 뫼비우스 띠에 관한 탐구]

제출자		부문	
학번	이름	자유주제	공통주제
●●●●	●●	○	

제출일 : 2018년 6월 15일

I. 연구 동기 및 목적

1. 탐구 동기 또는 주제선정 동기

집에서 음료수를 먹다가 우연히 재활용 마크를 보게 되었다. 고등학교 1학년 때 수학탐구 내용을 조사하는 과정에서 재활용 마크가 뫼비우스 띠라는 것을 알게 되었지만 뫼비우스 띠를 잘 몰랐던 나는 자세히 뫼비우스 띠에 대해 알고 싶어서 이 주제를 선택하게 되었다. 또한 우리 일상생활 속 어떤 곳에 뫼비우스 띠가 사용되고 있는지 궁금해서 이 주제를 선택했다.

2. 탐구 목적 또는 주제선정 목적

이 탐구를 통하여 뫼비우스가 어떻게 뫼비우스의 띠를 어떻게 연구하게 되었는지, 또 뫼비우스의 띠를 잘 이해하기 위하여 곡면을 잘 알고 뫼비우스 띠의 미분기하적 성질을 이해하기 위한 목적이다. 또한 뫼비우스 띠가 갖고 있는 여러 수학적 성질들을 알기 위한 목적이다.

3. 탐구 방법

탐구 방법으로는 뫼비우스의 띠와 관련된 논문과 책을 이용하여 뫼비우스 띠의 정의와 매개변수를 구하고 곡면의 정의를 조사하여 뫼비우스 띠의 미분기하학적 성질을 조사한다. 또한 부족한 부분은 인터넷의 정보 수집을 통하여 내용을 채워서 보충한다.

II. 이론적 배경

1. 자료조사

[Augustus Ferdinand Mobius(1790~1868)]

독일에서 태어난 뫼비우스는 가우스의 영향을 받아 수학과 천문학에 뛰어난 재능을 발휘했다. Augustus Ferdinand Mobius(1790~1868)는 독일의 슈르포르타에서 태어났다. 그는 라이프치히, 게팅겐에서 공부하였고, 처음에는 법률을 공부했지만 Gauss의 영향을 받고 수학 및 천문학 연구에 몰두 하였다. 1815년 라이프치히대학교의 천문학 교수, 1844년 동 대학 천문대장이 되었다. 천문학 이외에도 기하학 역학 등을 연구하여 업적을 남겼다. 1827년의 해석기하에 관한 논문 Der barycentrische Calcul은 고전이 되었으면 사영기하와 곡면기하에 관한 그의 연구 결과를 많이 포함하고 있다. 논문에서 그는 homogeneous coordinates를 도입하였고 기하변환을 논의하였다. 뫼비우스라는 이름은 뫼비우스 함수, 뫼비우스 반전 공식과 같은 수학적 대상에 붙여져 있다. 주요저서로는 <중심해석>이 있다. 사영기하학의 기초를 굳혔으며, 직선기하학 연구의 선구적인 역할을 하였다. 면의 표리의 구별이 없는 ‘뫼비우스의 띠’에 대한 연구로 널리 알려져 있다.

2. 탐구에 필요한 배경 지식

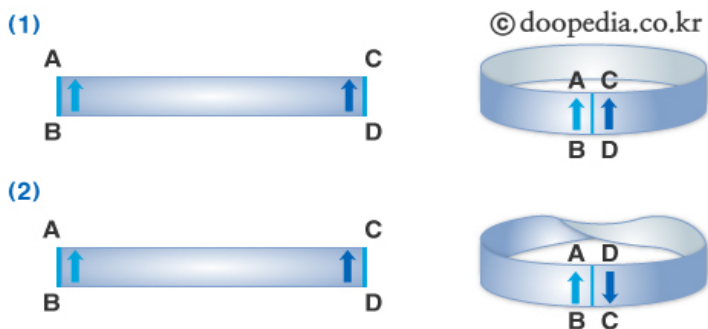
[곡면이란?]

2차원의 위상다양체를 말한다. 그러나 보통 직관적으로 ‘곡선이 움직이면 곡면이 된다.’ 라든가, ‘입체의 표면은 곡면이다.’ 등으로 설명된다. 또 곡면과 평면을 구별하여 평면이 아닌 면을 곡면이라 하는 경우도 있다. 원기둥면 · 원뿔면 · 구면 등은 대표적인 곡면이다. 이들 곡면은 직교좌표계에 대한 방정식 $f(x,y,z)=0$, $z=F(x,y)$, 또는 매개변수 u, v 를 써서 $x=f(u,v)$, $y=g(u,v)$, $z=h(u,v)$ 로 나타낼 수 있다. 이를테면, 중심의 좌표가 (a,b,c) , 반지름이 r 인 구면의 방정식은, 구면 위에 있는 임의의 점의 좌표를 (x,y,z) 라 하면, $(x,y,z)=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2=0$ 이며, 또 매개변수를 u,v 라 하고 이것을 구면좌표로 나타내면, $x=f(u,v)=r \sin u \cos v$, $y=g(u,v)=r \sin u \sin v$, $z=h(u,v)=r \cos u$ 로 된다. 이 u,v 를 곡면 위의 곡선좌표라 한다.

[외비우스의 띠]

외비우스 띠는 수학의 기하학과 물리학의 역학이 관련된 곡면으로, 경계가 하나밖에 없는 2차원 도형이다. 즉, 안과 밖의 구별이 없다. 이 띠는 1858년에 외비우스와 요한 베네딕트 리스팅이 서로 독립적으로 발견했다. 종이를 길게 잘라서 띠를 만든 후 종이 띠의 양 끝을 그냥 풀로 붙이면 도넛 모양의 토러스가 되는데, 한번 꼬아 붙이면 외비우스 띠가 된다. 이 꼬임으로 띠는 특별한 성질을 가지게 된다. 종이를 잘라 띠를 만든 후 그 띠를 한 번 꼬아서 붙이면 다음 그림과 같이 모서리 AC의 화살표와 모서리 DB의 화살표가 같은 방향으로 가는 하나의 화살표가 된다. 즉 꼭짓점 A는 꼭짓점 D, 꼭짓점 C는 꼭짓점 B와 일치하게 된다.

외비우스의 띠



이 띠에는 여러 가지 성질이 있다. 이를테면, (1)의 띠 바깥쪽에 칠을 하면, 바깥쪽은 전부 칠해지나 안쪽은 칠해지지 않는다. 그러나 외비우스의 띠의 바깥쪽에 칠을 하면 안쪽도 모두 칠해지며, 안쪽과 바깥쪽의 구별이 없다. 따라서 (1)과 (2)는 동상(위상적으로 동형)이 아니다. 원 · 삼각형 · 다각형 등은 동상이고, 또 구(球) · 각기둥 · 각뿔 · 정다면체 등도 동상이다. 다음과 같이 $180^\circ \times n(n\text{번})$ 만큼 꼬아서 만든 띠를 B_n 이라 하면, n 이 짝수일 때 B_n 은 B_0 와 동상이 되고, n 이 홀수일 때 B_n 은 B_1 과 동상이다.



B_0 와 같은 띠를 그 중심선을 따라 자르면 2개의 독립된 띠가 되지만, B_1 과 같이 한 번 꼬아 만든 뫼비우스의 띠를 그 중심선을 따라 자르면 네 번 꼬인 하나의 띠 B_4 가 된다. 또, 뫼비우스의 띠 B_1 을 그 삼등분선을 따라 자르면, 1개의 뫼비우스의 띠 B_1 과 네 번 꼬인 띠 B_4 가 얹혀 있는 상태가 된다.



Ⅲ. 탐구방법 및 과정

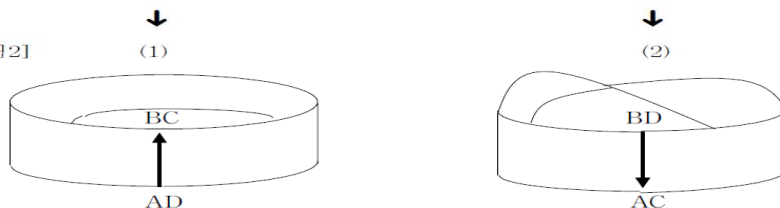
1. 뫼비우스 띠의 표현

직사각형 종이를 이용하여 아래 그림과 같이 만들어 보자. 아래 [그림 1]의 (1)과 같이 직사각형 ABCD의 두 대변을 꼬지 않고 그 방향 그대로 점A와 D, 점B와 C가 만나도록 변 AB와 변DC를 붙여 고리를 만들면 [그림 2]의 (1)과 같은 형태가 된다. 이와 반대로 [그림 1]의 (2)와 같이 직사각형의 180° 꼬아서 점A와 C 그리고 점B와 D가 만나도록 변B와 변CD를 붙이면 [그림 2]의 (2)와 같이 된다. 뫼비우스 띠의 두드러진 성질은 그것이 오직 한 개의 면과 한 개의 가장자리를 갖는다는 것이다. 또 한 바깥쪽과 안쪽의 구별이 없다. [그림2]의 (1)과 같은 고리는 바깥쪽이건 안쪽이건 한 면으로 부터 출발하여 같은 면만을 돌며 다른 면으로 옮겨가지 못하나 뫼비우스 띠는 한쪽에서 시작하면 다른 쪽으로 옮겨지고 다시 그 길을 지나서 제자리로 돌아올 수 있다. 이와 같은 띠는 뫼비우스가 공영기하학에서 그 특성을 설명했으므로 뫼비우스의 이름을 따서 뫼비우스 띠라 부른다.

[그림1]

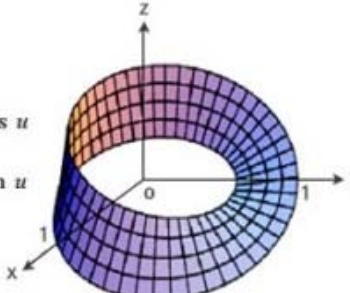


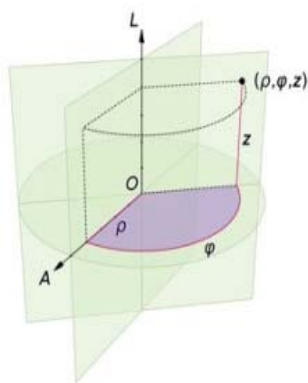
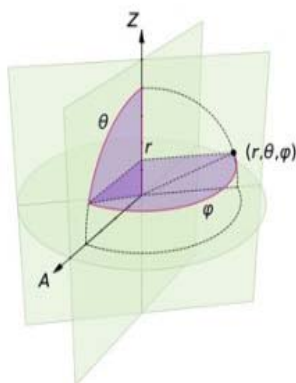
[그림2]



2. 뱀비우스 띠의 수학적 표현

이런 뱀비우스 띠를 수학적으로 표현하면 어떻게 될까? 3차원 실공간 \mathbf{R}^3 에서 뱀비우스 띠는 두 매개변수 $u, v(0 \leq u \leq 2\pi, -1 \leq v \leq 1)$ 를 이용하여 다음과 같은 매개변수방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} x(u, v) &= \left(1 + \frac{1}{2}v \cos \frac{1}{2}u\right) \cos u \\ y(u, v) &= \left(1 + \frac{1}{2}v \cos \frac{1}{2}u\right) \sin u \\ z(u, v) &= \frac{1}{2}v \sin \frac{1}{2}u \end{aligned}$$




뱀비우스 띠는 직교좌표계가 아닌 다른 좌표계를 이용하여 표현할 수도 있다. 공간에서 좌표계 하면 보통 3개의 실수축이 서로 직교하는 직교좌표계를 생각한다. 또 다른 두 개의 좌표계가 등장하는데, 하나는 구의 특성을 이용한 구면좌표계이다.

3. 뱀비우스 띠의 절단

뱀비우스 띠를 꼬임수를 늘려감에 따라 길이를 가로로 등분하면 어떠한 형태의 고리가 되는지 알아본다. 보통의 원통형 고리는 m 등분 할 때 $m+1$ 개의 원통이 만들어짐을 우리는 직관적으로 알 수 있다 하지만 뱀비우스 띠는 원통과는 달리 안 과 밖의 구별이 없으며 180도 비틀어 즉 한 번의 꼬임을 주어 만들어진 도형이므로 직관적으로 추측하기 어렵다. 직접 실험을 통하여 형태가 어떻게 변하고 또한 그것을 수학적으로 분석하여 보자. (단 꼬임은 180도 비틀어진 것을 말하고 $m \geq 2$ 은 등분수 $n \geq 1$ 은 꼬임수를 뜻한다.)

$m \backslash n$	$n=1$ (꼬임한번)	$n=2$ (꼬임두번)	$n=3$ (꼬임세번)	$n=4$ (꼬임네번)
$m=2$ (이등분)	두 번 꼬임 하나의 고리	두 번 꼬임 고 리가 2개 연결	여섯 번 꼬임 하나의 고리	네 번 꼬임 고 리가 2개 연결
$m=3$ (삼등분)	한 번 꼬임 고 리한개와 두 번 꼬임 고리 가 연결	두 번 꼬임 고 리가 3개 연결	세 번 꼬임 고 리와 여섯 번 꼬임 고리가 연 결	네 번 꼬임 고 리가 3개 연결
$m=4$ (사등분)	두 번 꼬임 고 리가 2개 연결	두 번 꼬임 고 리가 4개 연결	여섯 번 꼬임 고리가 2개 연 결	네 번 꼬임 고 리가 4개 연결
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

위 결과로 다음과 같은 정리를 이끌어 낼 수 있다.

< 정리 >

뫼비우스 띠에 n 번의 꼬임수를 주어 m 번 등분하였을 경우 (단, $n \geq 1$: 꼬임수, $m \geq 2$: 등분수)

① n 이 짝수일 때 n 번 꼬인 고리가 m 개 연결되어 존재한다.

② n 이 홀수일 때

i) m 이 홀수이면 n 번 꼬인 고리 한 개와 $2n$ 번 꼬인 고리 $[\frac{m}{2}]$ 개가 존재한다.

ii) m 이 짝수이면 $2n$ 번 꼬인 고리가 $\frac{m}{2}$ 개 연결되어 존재한다.

IV. 탐구 결론

1. 결론

우리의 일상생활에서 많이 쓰이는 뫼비우스 띠에 대하여 자세히 알아보았다. 본문에는

①뫼비우스에 대하여, ②뫼비우스 띠의 표현, ③뫼비우스 띠의 수학적 표현, ④뫼비우스 띠의 절단 등에 대하여 여러 수학적 성질들을 체계적으로 알아보았다. 뫼비우스 띠가 어떤 것인지, 어떻게 생겼는지 만 알고 있었는데 이번 탐구를 통하여 뫼비우스의 띠의 정의와 매개변수를 이용하여 나타나는 것을 구하였다. 또한 이 뫼비우스의 띠 하나를 여러 번 잘랐을 때 어떤 규칙과 모양을 띠는지 연구하여 뫼비우스 띠의 규칙성을 알 수 있게 되는 계기가 되었다.

2. 한계 점 또는 느낀 점

뫼비우스에 대하여 자료 조사를 하고 논문을 읽어보는 과정에서 내가 이해할 수 없는 어려운 벡터의 부분이 상당히 많아서 어려움을 겪었다. 내가 이해할 수 있는 선에서 여러 번 읽어보고 이해할 수 있도록 노력하였다. 모르는 부분은 친구들에게 물어보거나 선생님들에게 여쭙어 최대한 나의 주제에 대해 이해하도록 노력하였다. 뫼비우스에 대해서 자세히 알게 되어서 좋았고 수학을 공부하게 하는 것은 관심과 흥미인 것 같다. 또한 뫼비우스 띠에는 많은 수학적 지식을 함축하고 있고 나에게 흥미로운 주제가 되었다.

V. 탐구 고찰

1. 추가 연구가 필요한 주제(또는 더욱 심화적으로 탐구했으면 하는 주제)

이 탐구를 조사하면서 클라인 병에 대해 처음으로 알게 되었다. 클라인 병은 뫼비우스의 띠가 2차원적 구조가 4차원의 공간 조형으로 전환된 것이다. 클라인 병은 1882년 독일의 수학자 펠릭스 클라인이 발견하였다. 기회가 된다면 뫼비우스 띠보다 더 심화된 이 클라인 병의 원리와

클라인 병이 뫼비우스와 어떤 관계를 가져 형성 되었는지에 대해 알아보고 싶었다. 또한 클라인 병을 어떻게 수학적으로 표현하고 나타낼지에 대해 궁금증을 가지게 되었다. 그리고 뫼비우스의 띠가 재활용 마크 이 외에 또 우리의 일상생활 어디에 쓰이고 있는지 더욱 더 알아보고 싶게 되었다.

2. 기하와 벡터 특기사항

‘뫼비우스의 띠’의 주제를 가지고 뫼비우스 띠의 정의, 수학적 표현, 더 나아가 띠를 절단하여 나타나는 규칙성을 찾아내는 탐구를 함. 이 탐구를 하기 위하여 ‘뫼비우스 띠의 성질(송양숙)’의 논문을 분석하여 이해하고자 노력함. 논문 분석을 통하여 내가 접하지 못하던 어려운 수학 내용도 접해보고 새로운 경험을 함. 많은 자료 조사를 통해 지식을 쌓고 이해하며 정리하여 보고서로 정리할 수 있는 능력을 가짐. 또한 탐구를 하면서 더 알아보고 싶은 내용을 탐구하고 싶은 의욕이 많고 수학에 관심이 많은 학생임.

VI. 참고자료

1. 참고문헌

●RISS 논문

뫼비우스 띠의 성질 = Some properties of Mobius strip

2003년 송양숙 한남대학교 교육대학원 수학교육전공

●책

2. 관련 인터넷 사이트

●지식백과 : 뫼비우스, 뫼비우스의 띠

●두산백과 : 곡면