이차곡선의 접선 공식

구분	표준형	접점$(x_1,\ y_1)$이 주어진 경우	기울기 m이 주어진 경우
포물선	$y^2=4px$	$y_1y=2p(x+x_1)$	$y=mx+\frac{p}{m}$
원	$x^2+y^2=r^2$	$x_1x+y_1y=r^2$	$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$
타원	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$	$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$
쌍곡선	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(-b^2)}=1$	$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{(-b^2)}=1$	$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+(-b^2)}$, $m^2>\left(\frac{b}{a}\right)^2$
	$\frac{x^2}{(-a^2)}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x_1x}{(-a^2)}+\frac{y_1y}{b^2}=1$	$y=mx\pm\sqrt{(-a^2)m^2+b^2}$, $m^2<\left(\frac{b}{a}\right)^2$

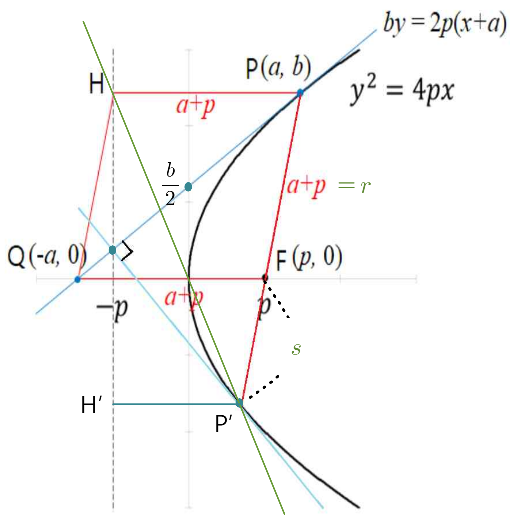
포물선의 성질

1. (정의) 포물선 $y^2=4px$위의 임의의 점 P 에서 F$(p,\ 0)$까지의 거리와

   점 P로부터 직선 $x=-p$ 까지의 거리는 항상 같다. $(\overline{PH}=\overline{PF})$

2. 초점을 지나는 직선 : 포물선의 초점을 지나는 직선이

   포물선과 만나는 두 점을 P, P′라 하자.



   1) 선분 PF 와 P′F의 길이를 각각 r, s라 하면 $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=\frac{1}{p}$

   2) 포물선 위 P$(a,\ b)$에서의 접선

   ① y절편은 $\frac{b}{2}$ 이다.

   (증명) P$(a,\ b)$에서의 접선은 $by=2p(x+a)$ 이므로

   $$y=\frac{2p}{b}x+\frac{2pa}{b}$$

   P$(a,\ b)$은 포물선 위의 점이므로 $b^2=4pa$ 따라서 $\frac{2pa}{b}=\frac{b^2}{2b}=\frac{b}{2}$

   따라서 접선의 방정식이 $y=\frac{2p}{b}x+\frac{b}{2}$ 이므로 y절편은 $\frac{b}{2}$이다.

   ② 초점을 지나는 직선이 포물선과 만나는 교점을 P, P′라 하면

   두 점에서의 접선은 반드시 준선에서 수직으로 만난다.

   (경시대회 문제 참고하기 바람)

   ③ P를 지나는 직선과 x축이 만나는 교점을 Q, P로부터 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면

   사각형 PHQF는 마름모이다.

   (증명) 점 P를 지나는 접선의 방정식은 $by=2p(x+a)$ 이므로 점 Q$(-a,\ 0)$이다.

   $\overline{QF}=\overline{QO}+\overline{OF}=a+p$, $\overline{PF}=\overline{PH}=a+p$, $\overline{QF}\ /\!/\ \overline{HP}$ 이므로 사각형 PHQF는 평행사변형이다.

   또한 $\overline{HQ}=\sqrt{(a-p)^2+b^2}=\sqrt{a^2-2pa+p^2+4pa}=\sqrt{(a+p)^2}=a+p$ 이므로

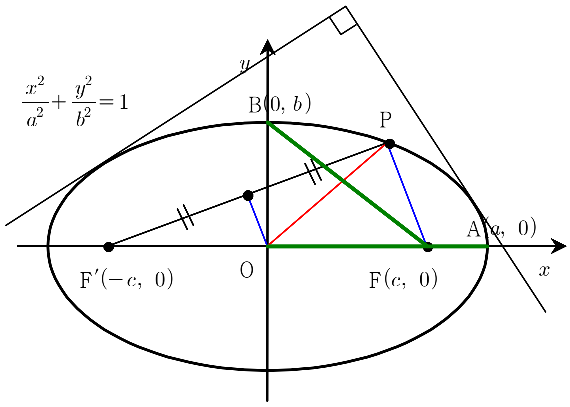
   따라서 사각형 PHQF는 마름모

   ④ 점P로부터 준선에 내린 수선의 발 H와 P′을 지나는 직선은 반드시 포물선의 꼭짓점을 지난다.

타원의 성질

1. (정의) 두 초점으로부터 점 P까지의 거리의 합이 일정한 상수이면

   점 P는 타원 위의 점이다. ($\mathrm{FP}+\mathrm{F'P}=2a$)



2. 두 초점과 원점 사이의 관계

   1) 초점으로부터 단축의 꼭짓점까지의 거리는

   중심으로부터 장축의 꼭짓점까지의 거리와 같다. $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{BF}}$

   2) 닮은 도형: 타원위의 점P로부터 꼭짓점F'까지의 중점을 P'라 하면

   $\triangle \mathrm{F'OP}$ 와 $\triangle \mathrm{F'FP}$ 은 닮은비가 1:2이다.

   3) 파포스의 중선 정리: $\overline{\mathrm{PF'}}^2+\overline{\mathrm{PF}}^2=2\left(\overline{\mathrm{OP}}^2+\overline{\mathrm{OF}}^2\right)$

   4) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OF'}} = \overrightarrow{\mathrm{F'P}}$

3. 수직인 두 접선의 교점

   1) 타원 밖의 한 점에서 타원에 그은 두 접선이 수직이면 교점은 항상 원 $x^2+y^2=a^2+b^2$ 위에 있다.

   2) 증명: 기울기가 m인 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$,

   m에 대해 정리하면 $(x^2-a^2)m^2-2xym+y^2-b^2=0$

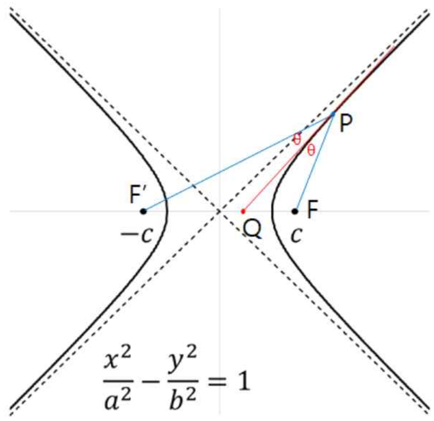
   수직인 두 직선의 기울기의 곱이 -1 이어야 하므로

   두 근이 곱 = $\dfrac{y^2-b^2}{x^2-a^2}=-1$, 따라서 $x^2+y^2=a^2+b^2$

쌍곡선의 성질

1. (정의) 두 초점으로부터 점 P까지의 거리의 차가 일정한 상수이면

   점 P는 쌍곡선 위의 점이다. ($\mathrm{FP}-\mathrm{F'P}=2a$)



2. 쌍곡선 위의 점에서의 접선

   1) $\angle \mathrm{F'PF}$ 의 각을 이등분 한다.

   2) $\overline{\mathrm{PF'}}$: $\overline{\mathrm{PF}}$ = $\overline{\mathrm{QF'}}$: $\overline{\mathrm{QF}}$

3. 수직인 두 접선의 교점

   1) 쌍곡선 밖의 한 점에서 쌍곡선에 그은 두 접선이 수직이면

   교점은 항상 원 $x^2+y^2=a^2-b^2$ 위에 있다.

   2) 증명: 주축이 x축인 쌍곡선에서 기울기가 m인 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$

   m에 대해 정리하면 $(x^2-a^2)m^2-2xym+y^2+b^2=0$

   수직인 두 직선의 기울기의 곱이 -1 이어야 하므로

   두 근이 곱 = $\dfrac{y^2+b^2}{x^2-a^2}=-1$, 따라서 $x^2+y^2=a^2-b^2$ $\left(\text{단, } \dfrac{b}{a}<1\right)$

   주축이 y축이면 기울기가 m인 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{b^2-a^2m^2}$

   두 접선이 수직이면 교점은 $x^2+y^2=b^2-a^2$ $\left(\text{단, } \dfrac{b}{a}>1\right)$