[연립일차부등식]

1. 부등식의 기본 성질

① $a > b$이고 $b > c$이면 $a > c$이다.

② $a > b$이면 $a \pm c > b \pm c$이다. (복부호동순)

③ $a > b$이고, $c > 0$이면 $ac > bc$이다.

④ $a > b$이고, $c < 0$이면 $ac < bc$이다.

2. 부등식의 확장 성질

① $a > b$이고 $ab > 0$ 이면 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$이다.

② $a > b$이고 $ab < 0$ 이면 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$이다.

③ $|a| > |b|$이면 $a^2 > b^2$이다.

④ $a > b$ 이고 $a^2 < b^2$이면 $a > 0$, $b < 0$, $|a| < |b|$이다.

3. 일차부등식 $ax > b$의 해

① $a > 0$ 일 때, $x > \frac{b}{a}$

② $a < 0$ 일 때, $x < \frac{b}{a}$

③ $a = 0$이고 $b > 0$ 일 때, 해가 없다(불능)

④ $a = 0$이고 $b = 0$ 일 때, 해가 없다(불능)

⑤ $a = 0$이고 $b < 0$ 일 때, 해가 무수히 많다(부정)

※ 일차부등식 $ax \geq b$에서 $a = 0$이면

$b > 0$일 때, 해가 없다(불능)

$b = 0$일 때, 해가 무수히 많다(부정)

$b < 0$일 때, 해가 무수히 많다(부정)

4. 연립일차부등식

① 일반적인 풀이: 각 부등식의 해를 구한 후 공통부분을 찾는다.

② 하나의 식에 부등호가 2개 이상인 일차부등식

각각의 부등호의 좌변과 우변으로 식을 만들어 연립부등식을 해결한다.

예 $x < 2x+1 \leq 7 \Rightarrow \begin{cases} x < 2x+1 \\ 2x+1 \leq 7 \end{cases}$

③ 절대값 기호를 포함한 부등식의 풀이1

($f(x)$는 일차식, a, b는 양의 실수)

- $|f(x)| < a \Leftrightarrow -a < f(x) < a$
- $|f(x)| > a \Leftrightarrow f(x) < -a$ or $f(x) > a$
- $a < |f(x)| < b$

  $\Leftrightarrow -b < f(x) < -a$ or $a < f(x) < b$

④ 절대값 기호를 포함한 부등식의 풀이1

($f(x)$, $g(x)$는 일차식 c는 양의 실수)

$|f(x)| + |g(x)| < c$의 경우 $f(x) = 0$, $g(x) = 0$이 되는 x값을 기준으로 x에 대한 구간을 나누고 x의 범위에 따라 해를 구한다.

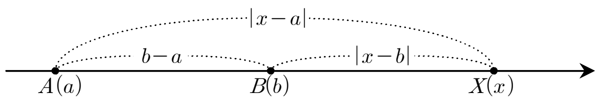
⑤ '$|x-a|$'의 기하학적 의미: $A(a)$와 $X(x)$사이의 거리

'$|x+a|$'의 기하학적 의미: $A'(-a)$와 $X(x)$사이의 거리

⑥ '$|x-a| + |x-b|$'의 기하학적 의미

: $A(a)$로 부터의 거리와 와 $B(b)$로 부터의 거리의 합

⑦ '$|x-a| + |x-b| \leq c$' 의 기하학적 의미 (단, $a < b$)



- $c < b-a$: 해가 없다
- $c = b-a$: $|x-a| + |x-b| = c$ 이므로 $a \leq x \leq b$
- $c > b-a$: 점 X의 위치는 점 A로부터 $-\frac{c-(b-a)}{2}$ 만큼 떨어진 곳으로부터 점 B로부터 $\frac{c-(b-a)}{2}$만큼 떨어진 곳 사이에 존재한다.

예 $|x+1| + |x-5| < 2$

-1과 5사이의 거리가 6 이므로 어떤 실수 x에 대해서도 2보다 짧을 수 없다. 따라서 해가 없다.

예 $|x+1| + |x-5| < 10$

-1와 5사이의 거리가 6이므로 x의 위치는 5보다 2크거나 -1보다 2작은 수 사이의 값을 가진다. $-3 < x < 7$

5. 해가 주어진 연립부등식

① 유형

- 해가 주어진 연립부등식에서 미지수 값 결정

예 $\begin{cases} x+a < 2x-3 \\ 3x \leq x+b \end{cases}$의 해가 $-4 < x \leq 4$일 때, 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

- 연립부등식의 해가 존재하도록 하는 미지수 값 결정

예 $\begin{cases} 5x-2 \leq 3x+4 \\ 3x+2 \geq 2x+a \end{cases}$를 만족시키는 정수 x의 개수가 3일 때, 실수 a의 범위를 구하여라.

- 연립부등식의 해가 존재하지 않도록 하는 미지수 값 결정

예 $\begin{cases} 4x+3 \geq 3x+a \\ 3(x-5) \geq 2(2x-1)+1 \end{cases}$의 해가 없을 때, 실수 a의 범위를 구하여라.

② 주의

- 일차항 계수의 부호를 조심한다.
- 부등호에 따라 미지수 값의 포함여부를 반드시 확인해야 한다.
- 부등식의 해가 방정식처럼 하나의 실근이 나올 수도 있다.

[초보자를 위한 이차부등식 설명]

1. 이차방정식의 판별식이 가지는 의미

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$을 완전제곱식으로 표현하면

$$a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\}-\frac{b^2}{4a}+c=0$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

따라서 $x=-\dfrac{b}{2a}\pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

위의 식이 의미하는 것은

이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 가 $y=0$인 x축과 만나는 조건을 의미한다.

- $\sqrt{b^2-4ac}$의 값이 허수이면 x는 실수가 아닌 복소수로 x값이 존재하지 않게 된다. 따라서 $y=0$을 만족하는 x축과 만나는 교점이 없다는 얘기다.
- $\sqrt{b^2-4ac}\,b=0$ 이면 $y=0$을 만족하는 x축과 $x=-\dfrac{b}{2a}$에서 한 번만 만난다는 얘기다.
- $\sqrt{b^2-4ac}$ 의 값이 존재한다면 $x=-\dfrac{b}{2a}$를 기준으로 같은 거리만큼 떨어진 두 곳에서 x축과 만난다는 것이다.

이는 방정식의 근의 조건이 된다.

2. 함수 $y=f(x)$에서 y가 좌표평면에서 가지는 의미

함수 $y=f(x)$의 의미를 잘 이해 해야 한다.

$f(x)$란 의미는 미지수 x를 변수로하는 식을 의미한다.

여기서 y는 $f(x)$에서 x값이 어떠한 상수값을 가지면 그 때의 식의 값이 바로 함수의 값이 되고, 그 값이 y의 값이 되는 것이다.

$y>0$이란 의미는 함수 $y=f(x)$의 x값이 상수값을 가질 때의 함수값이 양수가 된다는 것을 의미한다.

예를 들어 $y=x^2+4$를 살펴보자

위의 함수를 $y=f(x)$ 형태로 생각하면

$f(x)=x^2+4$에 해당되고

모든 실수에 대하여 $x^2\geq 0$ 이므로 $x^2+4>0$ 이된다.

따라서 $y=x^2+4$은 양수값을 가지며 항상 $y>0$ 이다.

예를 들어 $y=x^2-4$를 살펴보자.

위의 함수를 $y=f(x)$ 형태로 생각하면

$f(x)=x^2-4$에 해당되고

$x^2-4=(x-2)(x+2)$ 로 인수분해가 되므로

$x=2$일 때 즉 $f(2)=0$

$x=-2$일 때, 즉 $f(-2)=0$이 된다.

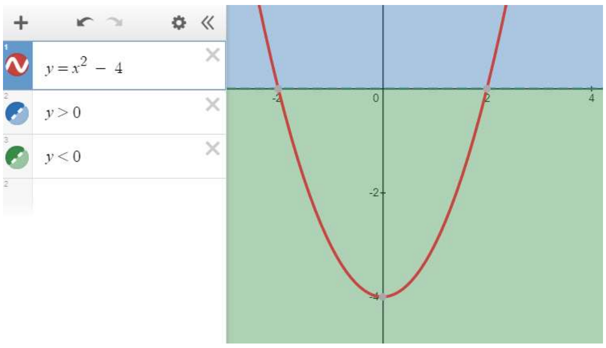
이 말은 $y=f(x)$에서 $y=0$을 의미하는 x축과 $x=2$일 때와 $x=-2$일 때 만난다는 것이다.

질문) $-2<x<2$를 만족하는 x의 값에 대해서는 y값이 어떠한 값을 가질까?

답) $x=1$이면 $f(x)=x^2-4$ 의 모든 x값이 1이란 의미이므로 $f(1)=1^2-4=-3$

다시말해 $x=1$이면 $y=-3$으로 음수 값을 가진 다는 것이다. 뿐만 아니라 $-2<x<2$를 만족하는 모든 x값에 대하여 y값은 항상 음수의 값을 가진다.

그래프를 그려 살펴보자.

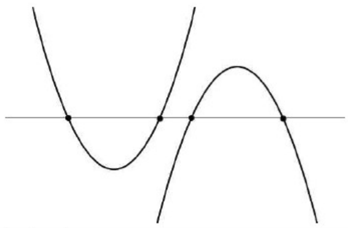


x의 값이 -2와 2 사이에서는 함수의 그래프가 x축 아래쪽에 그려져 있기 때문에 그래프 위의 서의 y값은 항상 음수가 된다.

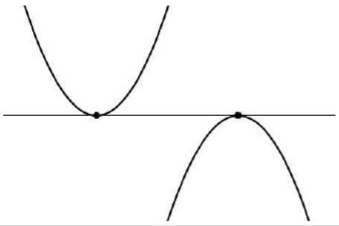
x의 값이 2보다 크거나, -2 보다 작을 경우 함수의 그래프는 x축 위에 그려지기 때문에 y값은 항상 양수이다.

3. 이차함수 그래프와 이차부등식의 해

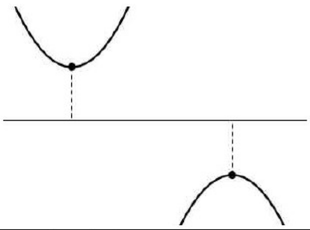
① $D>0$을 만족하는 이차함수

그래프 개형	
근의 종류	2개의 실근
함수식	$y=a(x-\alpha)(x-\beta)$
방정식	$a(x-\alpha)(x-\beta)=0$
방정식 근	$x=\alpha$ 또는 $x=\beta$
식의 형태	인수분해꼴

② $D=0$을 만족하는 이차함수

그래프 개형	
근의 종류	1개의 중근
함수식	$y=a(x-\alpha)$
방정식	$a(x-\alpha)^2=0$
방정식 근	$x=\alpha$
식의 형태	완전제곱식꼴

③ $D<0$을 만족하는 이차함수

그래프 개형	
근의 종류	허근(근이 없다)
함수식	$y=a(x-h)^2+k$ $(a>0, k>0$ 또는 $a<0, k<0)$
방정식	$a(x-h)^2+k=0$
방정식 근	허근(근이 없다)
식의 형태	절대부등식꼴

4. 이차부등식의 해 I

부등식의 해는 부등호를 만족하는 변수 x의 범위를 의미한다. 이차방정식은 해가 존재할 때 해의 개수가 1개 또는 2개 존재하는 것처럼 이차부등식의 해도 두 개의 x값을 기준으로 존재하는 경우가 일반적이다

① $ax^2+bx+c>0$의 해

$y=ax^2+bx+c$에서 $y>0$을 만족하는 x의 범위

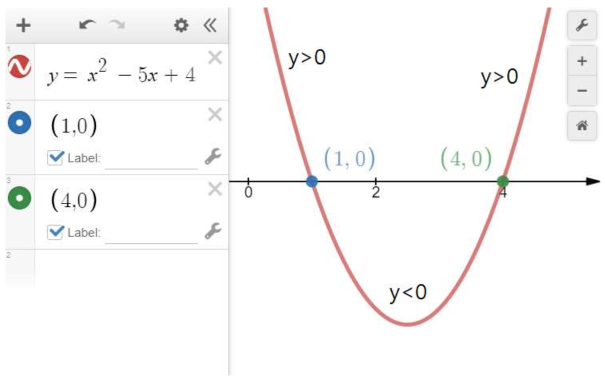
➜ $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 영역에서의 x의 범위

② $ax^2+bx+c<0$의 해

$y=ax^2+bx+c$에서 $y<0$을 만족하는 x의 범위

➜ $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축보다 아랫쪽에 있는 영역에서의 x의 범위

예



$x^2-5x+4>0$의 해는 $y=x^2-5x+4$에서 $y>0$을 만족하는 x의 범위이므로 $x<1$ 또는 $x>4$

$x^2-5x+4<0$의 해는 $y=x^2-5x+4$에서 $y<0$을 만족하는 x의 범위이므로 $1<x<4$

5. 인수분해가 가능한 이차부등식의 해

이차방정식의 두 근을 중심으로 해를 해결

① 최고차항이 양수인 이차부등식의 해

- $a(x-\alpha)(x-\beta)<0$ ➜ $\alpha<x<\beta$
- $a(x-\alpha)(x-\beta)>0$ ➜ $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$

② 최고차항이 음수인 이차부등식의 해

- $a(x-\alpha)(x-\beta)<0$ ➜ $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$
- $a(x-\alpha)(x-\beta)>0$ ➜ $\alpha<x<\beta$

6. 두 함수 사이에서의 이차부등식

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$에 대하여

① $f(x)>g(x)$의 해

$y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있는 영역에서의 x의 범위

② $f(x)<g(x)$의 해

$y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 아랫쪽에 있는 영역에서의 x의 범위

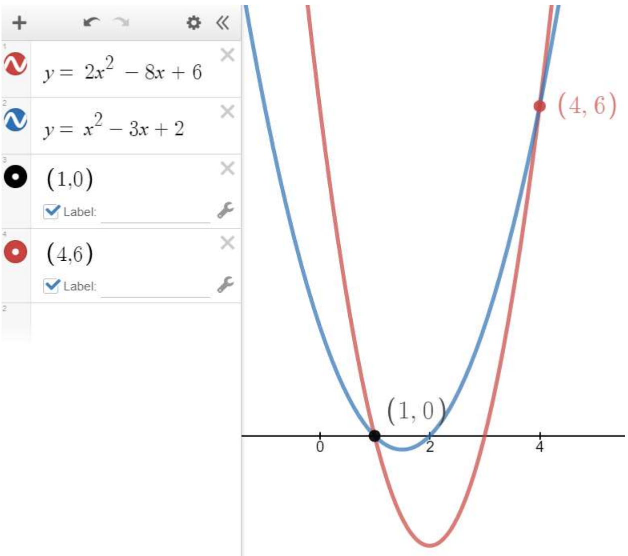
③ $f(x)g(x)>0$

$y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프가 x축$(y=0)$을 기준으로 같은 영역에 존재하기 위한 x의 범위

④ $f(x)g(x)<0$

$y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프가 x축을 기준으로 서로 다른 영역에 존재하기 위한 x의 범위

예 $f(x)$와 $g(x)$의 대소에 따른 x의 해



붉은 색의 $f(x)=2x^2-8x+6$ 와

파란 색의 $g(x)=x^2-3x+2$를 비교하면

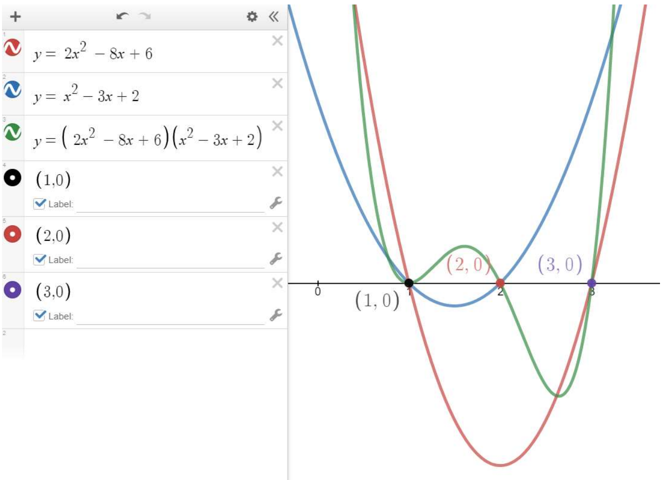
$1<x<4$의 범위에서는 $f(x)>g(x)$을 알 수 있다.

따라서 $2x^2-8x+6>x^2-3x+2$를 만족하는 해는 $1<x<4$ 이다.

$x<1$ 또는 $x>4$의 범위에서는 $f(x)<g(x)$이다.

따라서 $2x^2-8x+6<x^2-3x+2$를 만족하는 해는 $x<1$ 또는 $x>4$이다.

예 $f(x)g(x)$형태의 부등식의 해



붉은색 함수 그래프는 $f(x)=2x^2-8x+6$

파란색의 함수 그래프는 $g(x)=x^2-3x+2$

$x<1$ 에서는 $y=f(x)>0$, $y=g(x)>0$ 이므로

$f(x)g(x)>0$

$x=1$ 에서는 $f(1)=g(1)=0$ 이므로

$f(1)g(1)=0$

$1<x<2$에서는 $y=f(x)<0$, $y=g(x)<0$ 이므로

$f(x)g(x)>0$

$2<x<3$에서는 $y=f(x)<0$, $y=g(x)>0$ 이므로

$f(x)g(x)<0$

$x>3$에서는 는 $y=f(x)>0$, $y=g(x)>0$ 이므로

$f(x)g(x)>0$

따라서

$f(x)g(x)>0$의 해는 $x<1$ 또는 $1<x<3$

$f(x)g(x)<0$의 해는 $2<x<3$

녹색의 함수 그래프는

$y=f(x)g(x)=(2x^2-8x+6)(x^2-3x+2)$ 이다.

녹색의 그래프를 통해서도 부등식의 해를 찾을 수 있다.

※ 참고로 $f(x)g(x)\le 0$의 해는

$x=1$ 또는 $2\le x\le 3$ 이다.

[연립이차부등식]

1. 연립이차부등식의 풀이

① 연립이차부등식은 연립일차부등식과 같은 방법을 해결한다. 즉, 각 부등식의 해를 구한 다음 공통부분을 찾는다.

② 부등식이 $f(x) < g(x) < h(x)$ 꼴인 경우

$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ g(x) < h(x) \end{cases}$ 로 간주하고 부등식을 푼다.

③ 절대값이 있는 부등식은 절대값을 푼 후 해결한다.

2. 연립이차부등식을 풀 때 주의할 점

① 이차부등식은 모든 실수 또는 해가 없는 경우가 존재하므로 이를 주의하며 부등식을 해결한다.

② 연립이차부등식을 이루는 각 부등식의 해의 공통부분이 존재하지 않으면 연립이차부등식의 해는 없다.

③ 경곗값의 포함여부에 주의하여 풀어야 한다.

④ 문제에 따라서는 등호를 포함해도 주어진 부등식이 성립하는지 확인해야 한다.

⑤ 가우스 함수가 있는 방정식의 해는 부등식의 해의 형태를 보인다.

3. 가우스 기호를 포함한 방정식과 부등식

일반적으로 어떤 실수 x에 대하여 정수 부분을 $[x]$로 나타내고, 기호 [ ]를 **가우스 기호**라 한다.

① 가우스 기호의 성질

x의 정수 부분 $[x]$: x보다 크지 않은 최대 정수

x의 소수부분: $x-[x]$, $(0 \le x-[x] < 1)$

② 가우스 기호의 활용

- $x = n+\alpha$ (α는 정수, $0 \le \alpha < 1$)일 때,
  $[x] = n$, $\alpha = x-[x]$
- $[x] = n$(n은 정수)이면 $n \le x < n+1$
- 정수 N을 $p(\ne 0)$로 나눌 때의
  몫은 $\left[\dfrac{N}{p}\right]$, 나머지는 $N-p\left[\dfrac{N}{p}\right]$
- 실수 x와 정수 N에 대하여
  $N+[x] = [N+x]$, $N+[x]$의 소수부분 $=$ $[N+x]$의 소수부분

4. 다양한 연립이차부등식의 해법 예시

① $\begin{cases} |x-2| < 1 \\ x^2-7x+10 \le 0 \end{cases}$ 을 풀어라.

$|x-2| < 1$을 풀면 $-1 < x-2 < 1$ 이므로 $\therefore\ 1 < x < 3$

$x^2-7x+10 \le 10$을 풀면 $(x-2)(x-5) \le 0$ 이므로

$\therefore\ 2 \le x \le 5$

따라서 두 부등식의 공통 해는 $2 \le x < 3$■

② $\begin{cases} (x-2)(x-4) > 0 \\ (x-1)(x-5) \le 0 \end{cases}$ 을 풀어라.

$(x-2)(x-4) > 0$ 을 풀면 $x < 2$ 또는 $x > 4$ ⋯ ①

$(x-1)(x-5) \le 0$ 을 풀면 $1 \le x \le 5$ ⋯ ②

①, ② 의 공통부분을 구하면 $1 \le x < 2$ 또는 $4 < x \le 5$

③ $\begin{cases} x^2-3x-10 > 0 & \cdots ㉠ \\ x^2-(k+9)x+9 \le 0 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 의 해가

$5 \le x \le 9$가 되도록 하는 실수 k의 값을 구하여라.

$x^2-3x-10 > 0$ $\therefore$ $x < -2$ 또는 $x > 5$ ⋯ ①

$x^2-(k+9)x+9k = (x-9)(x-k) \le 0$

$k > 9$ 이면 $9 \le x \le k$

$k = 9$ 이면 $x = 9$

$k < 9$ 이면 $k \le x \le 9$

해가 $5 \le x \le 9$가 되기 위해서는 $k < 9$이어야 된다.⋯ ②

따라서 $k < -2$ 이면 $k < x < -2$ 도 해가 되기 때문에 문제의 조건에 위배된다. 따라서 $-2 < k < 9$이다. ⋯ ③

(여기부터가 중요)

$k=-2$이면 해가 어떻게 될까?

㉠의 해는 $x < -2$ 또는 $x > 5$ 이고

㉡의 해는 $-2 \le x \le 9$ 이므로

공통해는 $5 \le x \le 9$이므로 따라서 $k=-2$ 이다.

$k=5$ 이면 해가 어떻게 될까?

㉡의 해는 $5 \le x \le 9$ 이므로

공통해는 $5 \le x \le 9$이므로 따라서 $k=5$ 이다.

따라서 문제의 조건에 맞는 k의 범위는

$-2 \le k \le 9$

④ $[x]^2-5[x]+6 = 0$을 풀어라

(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수)

$[x] = X$라 하자.

$X^2-5X+6 \le 0 \Leftrightarrow (X-2)(X-3) = 0$

따라서 $X = 2$ 또는 $X = 3$

$X = [x] = 2$ 이면 $2 \le x < 3$

$X = [x] = 3$ 이면 $3 \le x < 4$

따라서 $2 \le x < 4$