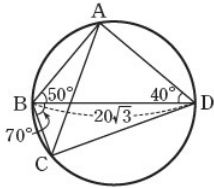


## [사인법칙과 코사인법칙]

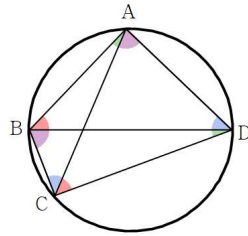
### 01 사인법칙

오른쪽 그림과 같이 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여  $\angle ADB = 40^\circ$ ,  $\angle ABD = 50^\circ$ ,  $\angle CBD = 70^\circ$ 이고  $\overline{BD} = 20\sqrt{3}$ 일 때, 선분 AC의 길이를 구하시오.



### 원주각의 성질을 이용한 문제

※ 1st. Step 01.



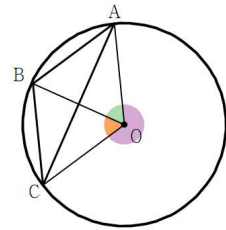
$\triangle ABD$ 는  $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형

따라서  $BD = 2R$

사인법칙에 의해  $AC = 2R \sin(\angle CBA)$

참고)  $\angle DAC = \angle DBC = 70^\circ$ ,  $\angle ABD = \angle ACD = 50^\circ$   
 $\angle ADC = \angle ACB = 40^\circ$ ,  $\angle BAC = \angle BDC = 20^\circ$

※ 2nd. Step 18.



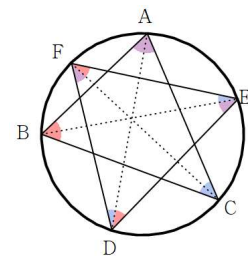
$\widehat{AB} : \widehat{BC} : \widehat{CA} = 1 : 1 : 4$  이므로  $\angle AOB : \angle BOC : \angle COA = 1 : 1 : 4$

따라서  $\angle AOC = \frac{4}{6} \times 360^\circ = 240^\circ$   $\angle AOC$ 의 원주각  $\angle ABC = 120^\circ$

$\angle AOB = \angle BOC = 60^\circ$ ,  $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$  이므로  $\triangle AOB$ ,  $\triangle BOC$ 는 정삼각형

$$S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

※ 2nd. Step 22.



$\angle A = 2\alpha$ ,  $\angle B = 2\beta$ ,  $\angle C = 2\gamma$  라 하면,

$\angle BED = \angle CFD = \alpha$ ,  $\angle ADE = \angle CFE = \beta$ ,  $\angle ADF = \angle BEF = \gamma$

따라서  $\angle D = \beta + \gamma$ ,  $\angle E = \alpha + \gamma$ ,  $\angle F = \alpha + \beta$

한편  $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = \pi$  이므로  $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$

따라서  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} - \gamma$ ,  $\beta + \gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha$ ,  $\gamma + \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$

$$\begin{aligned} \triangle DEF &= 2R^2 \sin D \sin E \sin F = 2R^2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) \\ &= 2R^2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 2R^2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \end{aligned}$$

### 유형 18 삼각형의 넓이

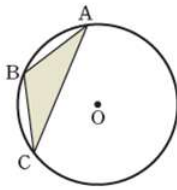
### 18 대표문항

오른쪽 그림과 같이  $\triangle ABC$ 가 반지름의 길이가 1인 원  $O$ 에 내접하고 있다.

$\widehat{AB} : \widehat{BC} : \widehat{CA} = 1 : 1 : 4$

일 때,  $\triangle ABC$ 의 넓이는?

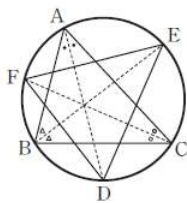
- ①  $\frac{\sqrt{2}}{4}$       ②  $\frac{\sqrt{2}}{3}$   
 ③  $\frac{\sqrt{3}}{4}$       ④  $\frac{\sqrt{3}}{3}$   
 ⑤  $\frac{\sqrt{6}}{2}$



### 22

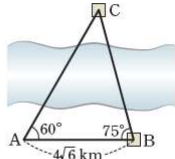
오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가  $R$ 인 원에 내접하는 삼각형 ABC가 있다.  $\triangle ABC$ 의 세 각의 이등분선이 외접원과 만나는 점을 각각 D, E, F 라 할 때, 다음 중 삼각형 DEF의 넓이를 나타내는 것은?

- ①  $2R^2 \sin A \sin B \sin C$   
 ②  $R^2 \cos A \cos B \cos C$   
 ③  $R^2 \sin A \sin B \sin C$   
 ④  $2R^2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$   
 ⑤  $2R^2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$



### 03 사인법칙의 활용

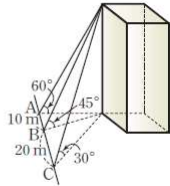
오른쪽 그림과 같이 두 지점 B, C가 강을 사이에 두고 있다. 선착장 A에서 두 지점 B, C를 바라본 각은  $60^\circ$ 이고, 지점 B에서 선착장 A와 지점 C를 바라본 각은  $75^\circ$ 이다. 선착장 A와 지점 B 사이의 거리가  $4\sqrt{6}$  km일 때, 두 지점 B와 C 사이의 거리는?



- ① 6 km      ② 7 km      ③ 8 km  
④ 9 km      ⑤ 12 km

### 08

오른쪽 그림과 같은 직육면체 모양의 건물이 있다. 지면 위의 세 지점 A, B, C에서 이 건물의 꼭대기를 올려다 본 각의 크기가 각각  $60^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $30^\circ$ 이고  $\overline{AB}=10$  m,  $\overline{BC}=20$  m일 때, 이 건물의 높이를 구하시오.



(단, 세 지점 A, B, C는 일직선 위에 있다.)

### 06 삼각형의 모양

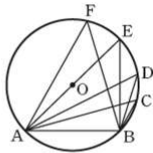
$2 \sin A \cos B = \sin C$ 가 성립하는  $\triangle ABC$ 는 어떤 삼각형인가?

- ①  $\angle A = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형  
②  $\angle C = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형  
③  $a=b$ 인 이등변삼각형  
④  $a=c$ 인 이등변삼각형  
⑤ 정삼각형

### 유형 1 사인법칙

#### 01 대표문항

오른쪽 그림과 같이 원 O에 내접하는 네 삼각형  $\triangle ABC$ ,  $\triangle ABD$ ,  $\triangle ABE$ ,  $\triangle ABF$ 가 있다.  $\overline{BD}=2\overline{BC}$ ,  $\overline{BE}=3\overline{BC}$ ,  $\overline{BF}=4\overline{BC}$ 이고,

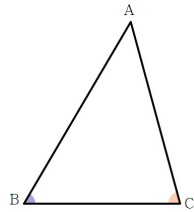


$\sin(\angle CAB) = \frac{1}{5}$ 일 때,  
 $\sin(\angle DAB) + \sin(\angle EAB) + \sin(\angle FAB)$ 의 값은?

- ①  $\frac{6}{5}$       ②  $\frac{7}{5}$       ③  $\frac{8}{5}$   
④  $\frac{9}{5}$       ⑤ 2

### 삼각측량법

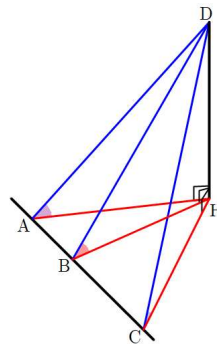
※ 1st. Step 03.



$\angle B = 60^\circ$ ,  $\angle C = 75^\circ$  이므로  $\angle A = 45^\circ$

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$$

※ 2nd. Step 08.



$\triangle DAC$  또는  $\triangle HAC$ 를 이용하고, 삼각형의 각 변의 길이를 이용하여  $DH$ 의 길이를 구한다.

$\triangle HAC$ 를 이용하여  $DH$ 의 길이를 구하자.  $\angle HBA = \theta$ 라 하면  $\angle HBC = \pi - \theta$

$\overline{DH} = h$  라면  $\angle DAH = 60^\circ$  이므로  $AH = \frac{h}{\sqrt{3}}$ ,  $\angle DBH = 45^\circ$  이므로  $BH = h$

$\angle DCH = 30^\circ$  이므로  $CH = \sqrt{3}h$

$$\cos \theta = \frac{(AB)^2 + (BH)^2 - (AH)^2}{2(AB)(BH)}, \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta = \frac{(BH)^2 + (BC)^2 - (HC)^2}{2(BH)(BC)}$$

$$\frac{100 + h^2 - \frac{h^2}{3}}{2 \cdot h \cdot 10} = -\frac{h^2 + 400 - 3h^2}{2 \cdot h \cdot 20}$$

### 삼각형의 변의 길이와 sin값과의 비의 관계

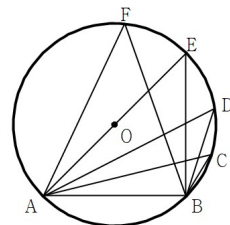
변의길이  $\propto \sin$ 값, 호의길이  $\propto$  각의 크기

※ 1st. Step 06.

▷  $\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$ 를 이용,  $\sin A = ak$ ,  $\sin B = bk$ ,  $\sin C = ck$ 를 대입하여 문제 해결

$$2 \sin A \cos B = \sin C \text{ 이면 } \cos B = \frac{\sin C}{2 \sin A} \text{ 이므로 } \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{ck}{2ak}$$

※ 2nd. Step 01.



$\triangle ABC$ ,  $\triangle ABD$ ,  $\triangle ABE$ ,  $\triangle ABF$ 는 모두 같은 원에 내접하는 삼각형

$\overline{BC} : \overline{BD} : \overline{BE} : \overline{BF} = 1 : 2 : 3 : 4$  이므로

$\angle CAB = \alpha$ ,  $\angle DAB = \beta$ ,  $\angle EAB = \gamma$ ,  $\angle FAB = \delta$  라 하면

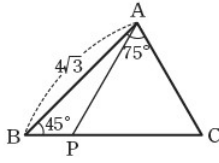
$$\sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma : \sin \delta = 1 : 2 : 3 : 4$$

## 02

△ABC에서  $(b+c):(c+a):(a+b)=5:6:7$ 일 때,  
 $\frac{\sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C}{\sin A \sin B \sin C}$ 의 값을 구하시오.

## 03

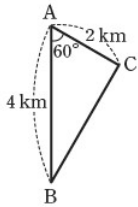
오른쪽 그림과 같은 △ABC에서  
 $\overline{AB}=4\sqrt{3}$ ,  $\angle A=75^\circ$ ,  
 $\angle B=45^\circ$ 이다. 이때,  $\overline{BC}$  위를  
 움직이는 점 P에 대하여 △APC  
 의 외접원의 지름의 최솟값은?



- ①  $2\sqrt{2}$       ②  $2\sqrt{3}$       ③ 4  
 ④  $4\sqrt{2}$       ⑤  $4\sqrt{3}$

## 05

오른쪽 그림과 같은 세 지점 A, B, C로  
 부터 같은 거리에 있는 지점에 학교를 세우  
 려고 한다.  $\overline{AB}=4$  km,  $\overline{AC}=2$  km,  
 $\angle BAC=60^\circ$ 일 때, 지점 C와 학교를 세  
 우려는 지점 사이의 거리는 몇 km인가?

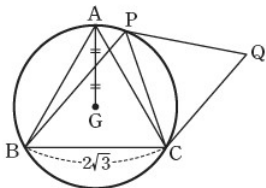


- ①  $\sqrt{2}$  km      ②  $\frac{3}{2}$  km  
 ③  $\sqrt{3}$  km      ④ 2 km  
 ⑤  $\sqrt{5}$  km

## 05

다음 그림과 같이 원에 내접하고 한 변의 길이가  $2\sqrt{3}$ 인 정삼  
 각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 무게중심을 G, 점 B를  
 포함하지 않는 호 AC 위의 한 점을 P라 할 때, 선분 BP는  
 선분 AG의 중점을 지난다. 선분 PC를 한 변으로 하는 정삼  
 각형 PCQ의 넓이가  $\frac{q}{p}\sqrt{3}$ 일 때,  $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단,  $p, q$ 는 서로소인 자연수이다.)



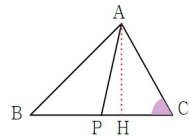
※ 2nd. Step 02.

$$(b+c):(c+a):(a+b)=5:6:7 \text{ 이므로 } (b+c)+(c+a)+(a+b)=5+6+7=18$$

따라서  $a=4, b=3, c=2$  (비를 구하는 문제이므로 이렇게 계산해도 가능함)

$$\frac{\sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C}{\sin A \sin B \sin C} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} = \frac{4^3 + 3^3 + 2^3}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{33}{8}$$

※ 2nd. Step 03.



▷ △ABC가 원에 내접할 경우 한 각이 일정하다면 변의 길이는 원접원의 반지름과 비례한다.

$$2R = \frac{a}{\sin A} \text{ 이므로 } \angle A \text{가 일정한 상수라면 } R \propto a$$

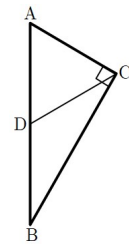
$\angle ACB=60^\circ$  이므로  $\overline{AP}$  길이가 최소가 될수록 △APC의 지름도 최소가 된다.

따라서  $P=H$ 일 때  $2R$ 은 최솟값을 가짐.

$$AH = AB \cdot \sin 45^\circ = 2\sqrt{6}, \text{ 따라서 } 2R = \frac{AP}{\sin 60^\circ} = 2\sqrt{6} \times \frac{2}{\sqrt{3}}$$

## 외심을 이용하는 문제

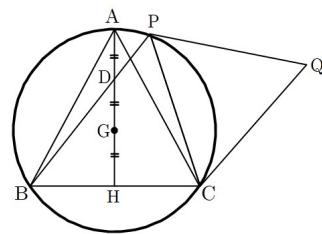
※ 1st. Step 05.



$$\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2} \text{ 따라서 } \angle B = 30^\circ$$

△ABC는 직각삼각형, 세 점 A, B, C로부터 같은 거리의 점은 △ABC의 외심이므로  
 빗변의 중심인 D의 위치

※ 2nd. Step 5.



△PCQ를 구하기 위해서는 PC의 길이만 알면 된다.

△ABC와 △PBC는 같은 원에 내접하는 삼각형이므로  $\angle PBC$ 의 크기를 알면 된다.

△ABC의 무게중심은 외심, AG와 BP의 교점을 D라 하면  $AD=DG=GH$

$$BC=2\sqrt{3} \text{ 이므로 } BH=\sqrt{3}, AH=3 \text{ 이므로 } R=AG=DH=2$$

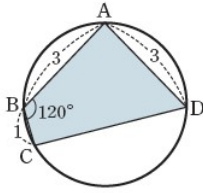
$$BD^2 = BH^2 + DH^2 = 3 + 4 \text{ 따라서 } BD = \sqrt{7}$$

$$\sin \angle DBC = \frac{DH}{BD} = \frac{2}{\sqrt{7}}, PC = 2R \sin \angle PBC = \frac{8}{\sqrt{7}}$$

$$\triangle PCQ = \frac{1}{2} \overline{PC}^2 \sin 60^\circ = \frac{16}{7} \sqrt{3}$$

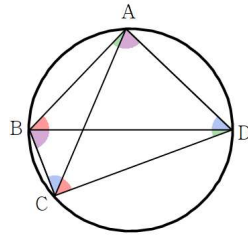
## 08 사각형의 넓이

오른쪽 그림과 같이  $\overline{AB}=3$ ,  $\overline{AD}=3$ ,  $\overline{BC}=1$ ,  $\angle ABC=120^\circ$  인 사각형 ABCD가 원에 내접할 때, 사각형 ABCD의 넓이를 구하시오.



## ■ 원에 내접하는 사각형을 이용하는 문제

※ 1st. Step 08.



원에 내접하는 사각형은 대각의 합이  $\pi$

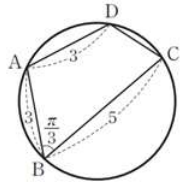
각의 크기를 정확하게 알고 있는 것은  $\angle B$ 이므로  $\angle B$ 를 중심으로 문제를 파악한다.

$\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\angle B$ 를 알고 있으므로  $\overline{AC}$ 를 구할 수 있고

$\angle D = \pi - \angle B$  이고  $AD$ 를 알고 있으므로  $\overline{CD}$ 를 구할 수 있다.

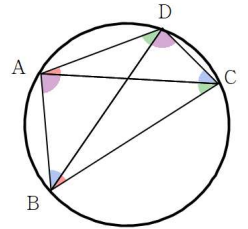
## 24 대표문항

오른쪽 그림과 같이 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여  $\overline{AB}=\overline{AD}=3$ ,  $\overline{BC}=5$ ,  $\angle ABC=\frac{\pi}{3}$ 일 때,  $\sin(\angle DAB)$ 의 값은?



- ①  $\frac{9\sqrt{3}}{19}$       ②  $\frac{\sqrt{3}}{2}$   
 ③  $\frac{10\sqrt{3}}{19}$       ④  $\frac{21\sqrt{3}}{38}$       ⑤  $\frac{11\sqrt{3}}{19}$

※ 2nd. Step 24.



원에 내접하는 사각형은 대각의 합이  $\pi$

각의 크기를 정확하게 알고 있는 것은  $\angle B$ 이므로  $\angle B$ 를 중심으로 문제를 파악한다.

$\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\angle B$ 를 알고 있으므로  $\overline{AC}$ 를 구할 수 있고

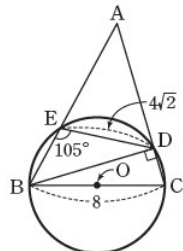
$\angle D = \pi - \angle B$  이고  $AD$ 를 알고 있으므로  $\overline{CD}$ 를 구할 수 있다.

$\angle A = \theta$ 라 하면  $\angle C = \pi - \theta$ 이므로

$\triangle ABC + \triangle ADC = \triangle ABD + \triangle BCD$  를 이용하여  $\theta$ 를 구할 수 있다

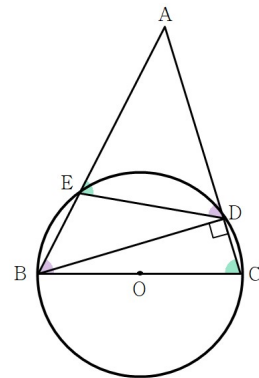
## 04

오른쪽 그림과 같이 지름이  $\overline{BC}=8$ 인 원 밖의 점 A에 대하여 점 B에서 변 AC에 내린 수선의 발을 D, 원이 선분 AB와 만나는 점을 E라 하자.  $\overline{DE}=4\sqrt{2}$ ,  $\angle DEB=105^\circ$ 일 때, 선분 AE의 길이를 구하시오.



(단,  $0 < \angle ABC < 90^\circ$ ,  $0 < \angle ACB < 90^\circ$ )

※ 2nd. Step 04.



AE의 길이를 구하기 위해서는  $\triangle AED$ 를 이용해야 한다.

①  $\triangle ABC \sim \triangle ADE$     ②  $\angle BDC = 90^\circ$     ③  $\overline{AD}$ ,  $\overline{DE}$ ,  $\angle A$ ,  $\angle AED$ ,  $\angle ADE$  중 3가지  $\angle DEB = 105^\circ$  이므로  $\angle AED = \angle ACB = 75^\circ$  따라서  $\angle CBD = 15^\circ$

$\triangle BED$ 의 외접원의 지름은  $\overline{BC}$  이므로

$\angle EBD = \theta$ 라 하면  $\frac{\overline{DE}}{\sin \theta} = 2R = (\overline{BC} = 8)$ , 따라서  $\theta = 45^\circ$

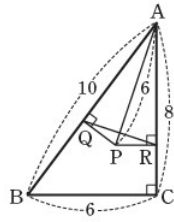
$\angle ADE = \angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ$

$\frac{\overline{ED}}{\sin 45^\circ} = \frac{\overline{AE}}{\sin 60^\circ}$  이므로  $\overline{AE} = 4\sqrt{3}$

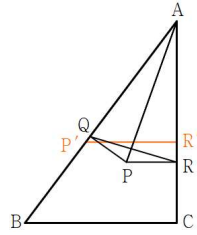
## 06

오른쪽 그림과 같이  $\overline{AB}=10$ ,  $\overline{BC}=6$ ,  $\overline{CA}=8$ 인 삼각형 ABC와 그 삼각형의 내부에  $\overline{AP}=6$ 인 점 P가 있다. 점 P에서 변 AB와 변 AC에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 할 때, 선분 QR의 길이는?

- ①  $\frac{14}{5}$       ② 3      ③  $\frac{16}{5}$   
 ④  $\frac{17}{5}$       ⑤  $\frac{18}{5}$



※ 2nd. Step 06.



①  $\triangle AQP$ 와  $\triangle ARP$ 가 모두 직각삼각형이므로  $\square AQPR$ 은 원의 내접 사각형  
 $AP$ 가 지름이므로  $2R = AP = \frac{QR}{\sin A}$ ,  $\sin A = \frac{BC}{AB}$

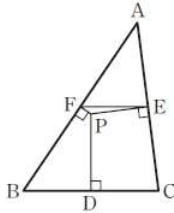
② 점 P가  $\triangle ABC$ 의 내부의 임의의 점이므로 점 P가 어디에 있는 상관없다는 의미  
 따라서 점 P의 위치를 변 AB위로 이동시키면  $QR = P'R'$  이된다.

## 23

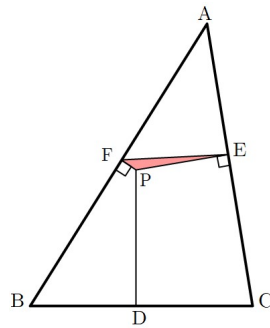
오른쪽 그림과 같이  $\overline{AB}=6$ ,  $\overline{BC}=4$ ,  $\overline{CA}=5$ 인 삼각형 ABC의 내부의 한 점 P에서 세 변 BC, CA, AB에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 한다.

$\overline{PD}=\sqrt{7}$ ,  $\overline{PE}=\frac{\sqrt{7}}{2}$ 일 때, 삼각형

EFP의 넓이는  $\frac{q}{p}\sqrt{7}$ 이다.  $p+q$ 의 값을 구하시오. (단,  $p, q$ 는 서로소인 자연수이다.)



※ 2nd. Step 23.



$\angle AFP + \angle AEP = 180^\circ$  이므로  $\square AFPE$ 은 원에 내접하는 사각형이다.  
 $\triangle EFP$ 의 넓이는  $\overline{PF}$ ,  $\overline{PE}$ ,  $\angle EPF$ 를 알면 구할 수 있다.

$$\triangle EFP = \frac{1}{2} \overline{PF} \times \overline{PE} \times \sin(\angle FPE) = \frac{1}{2} \overline{PF} \times \overline{PE} \times \sin A$$

$\angle EPF = 180^\circ - \angle A$  이므로  $\angle A$ 를 알면 된다.

삼각형 ABC의 둘레 길이를 알고 있으므로 ① 또는 ②로  $\angle A$ 를 구한다.

$$\textcircled{1} \cos A = \frac{(\overline{AB})^2 + (\overline{AC})^2 - (\overline{BC})^2}{2(\overline{AB})(\overline{AC})} \quad \textcircled{2} \sqrt{s(s-\overline{AB})(s-\overline{BC})(s-\overline{CA})} = \frac{1}{2}(\overline{AB})(\overline{AC})\sin A$$

$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times (\overline{AB} \times \overline{PF} + \overline{BC} \times \overline{PD} + \overline{CA} \times \overline{PE})$  를 통해  $\overline{PF}$ 의 길이를 구한다.

## 13

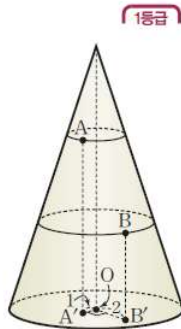
오른쪽 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 3, 모선의 길이가 6인 직원뿔의 옆면 위의 두 점 A, B에서 밑면에 내린 수선의 발을 각각 A', B', 밑면의 중심을 O라 하면  $\overline{OA'}=1$ ,

$\overline{OB'}=2$ ,  $\angle A'OB'=\frac{\pi}{2}$ 이다. 직원뿔

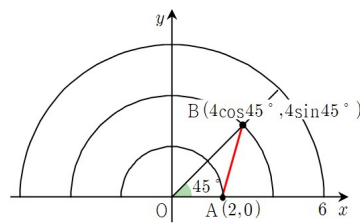
의 옆면을 따라 점 A에서 점 B까지 가는 최단거리를  $d$ 라 할 때,

$d^2=p+q\sqrt{2}$ 이다. 이때,  $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단,  $p, q$ 는 유리수이다.)



※ 2nd. Step 13.



밑면의 둘레의 길이 =  $6\pi$  이므로 원뿔의 전개도에서 옆면을 전개했을 때 중심각을  $\theta$ 라 할 때  $6 \times \theta = 6\pi$  따라서  $\theta = \pi$

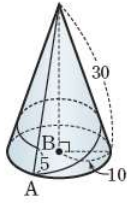
$\angle A'OB' = 90^\circ$  이므로 전개도에서  $\angle BOA = \pi \times \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}$

O를 원점 OA를  $x$ 축이라 하면 B의 위치는  $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

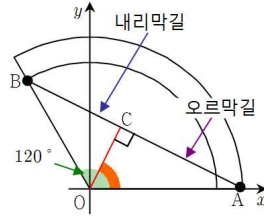


## 05

오른쪽 그림과 같은 직원뿔 모양의 산이 있다. A 지점을 출발하여 산을 한 바퀴 돌아 B 지점으로 가는 관광 열차의 궤도를 최단 거리로 놓으면 이 궤도는 처음에는 오르막길이지만 나중에는 내리막길이 된다. 이 내리막길의 길이가  $\frac{a}{\sqrt{b}}$ 일 때,  $a+b$ 의 값을 구하시오. (단,  $a, b$ 는 서로소인 자연수이다.)



※ 3rd. Step 05.



모선의 길이 = 30, 밑면의 반지름이 10이므로 원뿔의 전개도에서 옆면을 전개했을 때 중심각의 크기를  $\theta$ 라 하면  $30\theta = 20\pi$  따라서  $\theta = 120^\circ$

원점 O로부터 AB에 내린 수선의 발을 C라 하면 A로부터 C까지는 오르막길, C로부터 B까지는 내리막길

$$OA = 30, OB = 25, (AB)^2 = 25^2 + 30^2 - 2 \cdot 25 \cdot 30 \cos 120^\circ = (5\sqrt{91})^2$$

$$BC = OB \cdot \cos B = 25 \cdot \left( \frac{BA^2 + OB^2 - OA^2}{2 \cdot BA \cdot BO} \right) = \frac{200}{\sqrt{91}}$$

### 【등차수열과 등비수열】

#### ■ 등차수열의 일반항

$$a_n = a_1 + (n-1)d = dn + (a_1 - d) = An + B$$

따라서 등차수열은  $n$ 에 대한 일차식이며, 일차항의 계수가 공차,  $n=1$ 일 때 값이 첫째항이다.

※ 1st. Step 03.

$$a_6 = a_2 + 4d, a_{15} = a_{10} + 5d \text{ 이므로 } a_6 + a_{15} = (a_2 + a_{10}) + 9d = 68 + 9d = 122 \text{ 따라서 } d = 6$$

$$a_6 + a_{15} = 2a_6 + 9d = 2a_6 + 54 = 122 \text{ 따라서 } a_6 = 34$$

$$\text{따라서 } a_{40} = a_6 + 34d = 34 + 34 \times 6 = 34 \times 7 = 238$$

※ 2nd. Step 05.

$$a_2 + a_4 + a_6 = (a_4 - 2d) + a_4 + (a_4 + 2d) = 3a_4 = 123 \text{ 이므로 } a_4 = 41$$

$$a_{17} = a_4 + 13d = 41 + 13d > 116 \text{ 이므로 } d > 5.769 \dots$$

$$a_{16} = a_4 + 12d = 41 + 12d < 117 \text{ 이므로 } d < 6.25$$

$$\text{공차는 정수라 하였으므로 } d = 6 \text{ 따라서 } a_{30} = a_4 + 26d = 41 + 26 \times 6 = 197$$

#### ■ 등차수열의 공차

$$a_n - a_k = \{a_1 + (n-1)d\} - \{a_1 + (k-1)d\} = (n-k)d$$

※ 1st. Step 02.

$$x, a_1, a_2, a_3, y \text{ 에서 } x = a_0, y = a_4 \text{ 라 하면 공차 } d_a \text{ 는 } (4-0)d_a = y - x \text{ 가 성립}$$

$$x, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, y \text{ 에서 } x = b_0, y = b_6 \text{ 라 하면 공차 } d_b \text{ 는 } (6-0)d_b = y - x \text{ 가 성립}$$

$$a_2 - a_1 = d_a, b_5 - b_4 = d_b \text{ 이므로 } \frac{d_a}{d_b} = \frac{\frac{y-x}{4}}{\frac{y-x}{6}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

## 03 등차수열의 일반항

등차수열  $\{a_n\}$ 에서  $a_2 + a_{10} = 68, a_6 + a_{15} = 122$ 일 때,  $a_{40}$ 의 값은?

- ① 226                      ② 229                      ③ 232  
④ 235                      ⑤ 238

## 유형 ② 등차수열

### 05 대표문항

공차가 정수인 등차수열  $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킬 때,  $a_{30}$ 의 값을 구하시오.

$$(7) a_2 + a_4 + a_6 = 123$$

$$(8) a_n > 116 \text{을 만족시키는 } n \text{의 최솟값은 } 17 \text{이다.}$$

## 02 등차수열의 공차

서로 다른 두 수  $x, y$ 에 대하여 수열  $x, a_1, a_2, a_3, y$ 와  $x, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, y$ 가 모두 등차수열을 이룰 때,  $\frac{a_2 - a_1}{b_5 - b_4}$ 의 값은?

- ①  $\frac{2}{3}$                       ②  $\frac{5}{4}$                       ③  $\frac{3}{2}$   
④  $\frac{5}{3}$                       ⑤  $\frac{7}{3}$

## 07

공차가  $d$  ( $d \neq 0$ )인 등차수열  $\{a_n\}$ 에 대하여 수열  $\{T_n\}$ 을

$$T_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

이라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

• 보기 •

ㄱ.  $T_4=2d$                       ㄴ.  $T_5=a_3$   
 ㄷ. 수열  $\{T_{2n}\}$ 은 등차수열이다.

- ① ㄱ                      ② ㄴ                      ③ ㄱ, ㄴ  
 ④ ㄱ, ㄷ                      ⑤ ㄴ, ㄷ

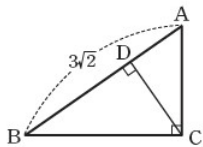
## 05 등차중항

이차방정식  $x^2+bx+c=0$ 의 두 근이 3,  $a$ 이고, 세 수  $a, b, c$ 가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때,  $a-b-c$ 의 값은?

- ① -5                      ② -2                      ③ 1  
 ④ 4                      ⑤ 7

## 10

오른쪽 그림과 같이  $\angle C=90^\circ$ 이고, 빗변의 길이가  $3\sqrt{2}$ 인 직각삼각형 ABC가 있다. 꼭짓점 C에서 빗변 AB에 내린 수선의 발을 D라 하면 세 삼각형 ACD, CBD,



ABC의 넓이가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때,  $\triangle ABC$ 의 넓이는?

- ① 3                      ②  $3\sqrt{2}$                       ③  $3\sqrt{3}$   
 ④  $4\sqrt{2}$                       ⑤  $5\sqrt{2}$

※ 2nd. Step 07.

$$T_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n \text{ 이면}$$

$$T_{2m-1} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_n = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + a_n = (-d) \times (m-1) + a_n$$

$$T_{2m} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots - a_n = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2m-1} - a_{2m}) = (-d) \times m$$

$$T_4 = T_{2 \times 2} = (-2)d$$

$$T_5 = (a_1 - a_2) + a_3 - (a_4 - a_5) = (-d) + a_3 + d = a_3$$

$$T_{2m} = (-d)m = \text{이므로 } \{T_{2m}\} \text{은 첫항 } T_2 = -d \text{ 이고 공차가 } (-d) \text{인 등차수열}$$

## ■ 등차 중항

$a, b, c$ 가 등차수열이면  $2b = a + c$ 가 성립

두 수열  $\{a_n\}, \{x_n\}$ 이 등차수열이면  $a_{x_1}, a_{x_2}, a_{x_3}$ 에 대해서도  $2a_{x_2} = a_{x_1} + a_{x_3}$ 가 성립

양 옆의 두 항의 번호의 평균이 가운데 항의 번호일 경우 가운데 항은 등차중항

$a_s, a_{2s}, a_{3s}$ 가 등차수열이면  $2s = \frac{s+3s}{2}$  이므로  $a_{2s}$ 는 등차중항이고,  $2a_{2s} = a_s + a_{3s}$ 이 성립

※ 1st. Step 05.

근과 계수의 관계에 의하여  $a+3=-b, 3a=c$  이고  $a, b, c$ 가 등차수열이므로  $a+c=2b$

따라서  $a+c=4a=4(-b-3)=-4b-12=2b$  따라서  $b=-2, a=-1, c=-3$

$$a-b-c=-1-(-2)-(-3)=4$$

※ 2nd. Step 10.

세 삼각형 ACD, CBD, ABC는 모 닮은 도형(AA닮음) 이므로

빗변의 제곱이 세 삼각형의 넓이의 비가 된다. 따라서  $\overline{AC}^2 : \overline{BC}^2 : \overline{AB}^2 = b^2 : a^2 : 18$

삼각형 ABC는 직각삼각형이므로  $a^2 + b^2 = 18 \cdots ①$

넓이가 등차수열이므로  $2a^2 = b^2 + 18 \cdots ②$

①, ②를 연립하여 계산하면  $3a^2 = 36$  따라서  $a^2 = 12, b^2 = 6$

$$\text{삼각형 ABC의 넓이는 } \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}\sqrt{12} \times \sqrt{6} = 3\sqrt{2}$$

두 자연수  $s, t$  ( $s < t$ )에 대하여 공차가 자연수인 등차수열  $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

$$a_s + a_{s+5} + a_{s+10} = 75, \quad a_t + a_{t+5} + a_{t+10} = 111$$

$s$ 와  $t$ 의 등차중항을  $k$ 라 할 때, 모든  $a_k$ 의 값의 합을 구하시오. (단,  $k$ 는 자연수이다.)

## 07 등차수열의 합

공차가 양수인 등차수열  $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_5 + a_6 + a_7 = 45, \quad a_5 a_7 = 221$$

일 때,  $a_1 + 2a_2 + a_3 + 2a_4 + a_5 + 2a_6 + \cdots + a_{29} + 2a_{30}$ 의 값을 구하시오.

## 13

등차수열  $\{a_n\}$ 에서

$$a_{11} + a_{21} = 82, \quad a_{11} - a_{21} = 6$$

일 때, 집합  $A = \{a_n \mid a_n \text{은 자연수}\}$ 의 모든 원소의 합을 구하시오. [2015년 교육청]

※ 2nd. Step 11.

$$2a_{s+5} = a_s + a_{s+10} \quad \text{이므로} \quad a_{s+5} = 25, \quad 2a_{t+5} = a_t + a_{t+10} \quad \text{이므로} \quad a_{t+5} = 37$$

$$a_{t+5} - a_{s+5} = (a_t + 5d) - (a_s + 5d) = a_t - a_s = (t-s)d = 12$$

$d, s, t$ 가 모두 자연수 이므로  $t-s, d$ 는 모두 12의 약수

한편,  $k$ 는  $s$ 와  $t$ 의 등차중항이므로  $2k = (t+s)$ , 따라서  $t$ 와  $s$ 는 모두 홀수 이거나 모두 짝수, 따라서  $t-s$ 는 짝수

$$i) \quad t-s=2, \quad d=6 \quad \text{이면 } k=s+1 \quad \text{ 따라서 } a_k = a_{s+1} = a_{s+5} - 4d = 25 - 24 = 1$$

$$ii) \quad t-s=4, \quad d=3 \quad \text{이면 } k=s+2 \quad \text{ 따라서 } a_k = a_{s+2} = a_{s+5} - 3d = 25 - 9 = 16$$

$$iii) \quad t-s=6, \quad d=2 \quad \text{이면 } k=s+3 \quad \text{ 따라서 } a_k = a_{s+3} = a_{s+5} - 2d = 25 - 4 = 21$$

$$iv) \quad t-s=12, \quad d=1 \quad \text{이면 } k=s+6 \quad \text{ 따라서 } a_k = a_{s+6} = a_{s+5} + d = 25 + 1 = 26$$

따라서 모든  $a_k$ 의 합은  $1+16+21+26=64$

## ■ 등차수열의 합

$$S_n = \frac{n\{2a_1 + (n-1)d\}}{2} = \frac{d}{2}n^2 + \left(\frac{2a_1-d}{2}\right)n \quad \text{이므로 이차항의 계수는 공차의 절반, } S_1 = a_1$$

※ 1st. Step 07.

$$a_5 + a_6 + a_7 = 45 \quad \text{이면 등차중항의 성질에 따라 } a_6 = 15$$

$$\text{공차를 } d \text{라 하면 } a_5 = d_6 - d, \quad a_7 = a_6 + d \quad \text{이므로 } a_5 a_7 = (a_6)^2 - d^2 = 225 - d^2 = 221 \quad \text{ 따라서 } d^2 = 4 \quad \text{이므로 } d = 2$$

$$\text{따라서 } a_n = 2n + \alpha \quad \text{라 하면 } a_6 = 12 + \alpha = 15 \quad \text{이므로 } \alpha = 3 \quad \text{ 따라서 } a_n = 2n + 3$$

$$\text{풀이1)} \quad a_1 + 2a_2 + a_3 + 2a_4 + \cdots + a_{2k-1} + 2a_{2k} + \cdots + a_{29} + 2a_{30} = \sum_{k=1}^{15} a_{2k-1} + 2 \sum_{k=1}^{15} a_{2k} = \sum_{k=1}^{15} (a_{2k-1} + 2a_{2k})$$

$$a_{2k-1} = 2(2k-1) + 3 = 4k+1, \quad a_{2k} = 2(2k) + 3 = 4k+3 \quad \text{이므로 } a_{2k-1} + 2a_{2k} = 4k+1 + 2(4k+3) = 12k+7$$

$$\sum_{k=1}^{15} (a_{2k-1} + 2a_{2k}) = \sum_{k=1}^{15} (12k+7) = \frac{15(19+187)}{2} = 1545$$

풀이2) 항을 두 개씩 묶으면  $(a_1 + 2a_2) + (a_3 + 2a_4) + \cdots + (a_{2k-1} + 2a_{2k}) + \cdots + (a_{29} + 2a_{30})$  이 되므로

$a_{2k-1} + a_{2k} = b_k$  라 하자.  $b_1 = 19, b_2 = 31$  이므로  $\{b_n\}$ 은 첫째항이 19이고 공차가 12인 등차수열

$$\text{따라서 } b_n = 12k+7 \quad \text{이고 } b_{15} = a_{29} + 2a_{30} \quad \text{이므로 } \sum_{k=1}^{15} (12k+7) = \frac{15(19+187)}{2} = 1545$$

※ 2nd. Step 13.

두 식을 연립하면  $a_{11} = 44, a_{21} = 38$  이므로  $a_{21} - a_{11} = 10d = -6$  따라서  $d = -\frac{3}{5}$  따라서 5개항마다 하나씩 정수

$a_1 = b_1, a_6 = b_2$  라 하면  $b_n = a_{5n-4}, b_3 = a_{11} = 44, b_5 = a_{21} = 38$  이므로  $\{b_n\}$ 은 공차가  $-3$ 인 등차수열

$$b_n = -3n + 53 \quad \text{이므로 } -3n + 53 > 0 \quad \text{을 만족하는 } n < 17. \cdots \quad \text{따라서 } S_{17} = \frac{17 \times (b_1 + b_{17})}{2} = 442$$



## 08 등차수열의 합의 최대·최소

제30항이 116, 제50항이 56인 등차수열  $\{a_n\}$ 에서 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합을  $S_n$ 이라 할 때,  $S_n$ 이 최대가 되는  $n$ 의 값은?

- ① 87                      ② 83                      ③ 75  
④ 68                      ⑤ 58

## 14

첫째항이 34인 등차수열  $\{a_n\}$ 에 대하여 수열  $\{S_n\}$ 을

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

이라 하자.  $S_{17} = S_{18}$ 일 때,  $|S_n| > S_{18}$ 을 만족시키는 자연수  $n$ 의 최솟값을 구하시오.

### ■ 등차수열의 합의 최댓값

※ 1st. Step 08.

$a_{50} = 56$ ,  $a_{30} = 116$  이므로  $a_{50} - a_{30} = 20d = -60$  따라서  $d = -3$  따라서  $a_n = -3n + 206$   
 $-3n > 206$ 을 만족하는  $n$ 의 값을 계산하면  $n < 68. \cdots$  이므로  $S_{68}$ 이 최댓값

※ 2nd. Step 14.

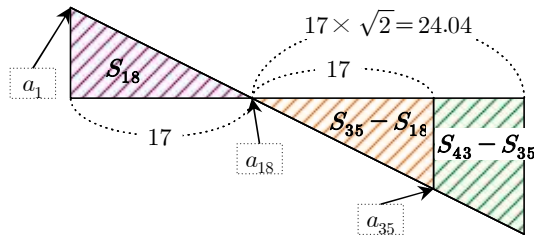
$S_{17} = S_{18}$  이면  $S_{18} - S_{17} = a_{18} = 0$  따라서  $a_{18} - a_1 = 0 - 34 = 17d$  이므로  $d = -2$  따라서  $a_n = -2n + 36$

$S_n = -n^2 + Bn$  이고  $S_1 = a_1$ 이므로  $B = 35$ , 따라서  $S_n = -n^2 + 35n$  이므로  $S_{18} = 306$

$2a_{18} = a_{17} + a_{19} = a_{16} + a_{20} = \cdots = a_k + a_{(36-k)} = 0$  이므로  $S_{35} = 0$

$n \geq 35$ 이면  $|S_n| < 0$  이므로  $|S_n| > S_{18}$  이면  $-S_n > 306$  따라서  $n^2 - 35n > 306$ 을 만족하는  $n$ 을 구하면 된다.

$n = 42$ 이면  $-S_{42} = 294 < 306$ ,  $n = 43$ 이면  $-S_{43} = 344 > 306$  이므로  $n$ 의 최솟값은 43



왼쪽 그림에서 각 색깔의 영역의 넓이가 모두 같을 때  $|S_n| = S_{18}$  이 성립한다. 따라서 빨간색영역의 가로 길이가 17이면

녹색의 가로의 길이는  $17(\sqrt{2} - 1)$  이어야 한다.

따라서  $n = 42.04 \cdots$  이면  $|S_n| = S_{18}$  이 된다.

하지만  $n$ 은 자연수 이므로  $|S_{42}| < S_{18} < |S_{43}|$  가 성립한다.

### ■ 등비수열의 일반항

$$a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)} = \frac{a_1}{r} r^n = Ar^n$$

따라서 등비수열은 상수항이 없는  $r$ 의 지수식이며, 지수식의 밑은 공비,  $n = 1$ 일 때 값이 첫째항이다.

등비수열의 합은 두 개의 등비수열의 합으로 쪼갤 수 있다 (수열 유인물 p2. 7-(5))

※ 1st. Step 09.

등비수열  $\{a_n\}$ 의 인접한 두 항을 더해도 등비수열이 된다.  $(pa_n + qa_{n+1} = par^{n-1} + qar \cdot r^{n-1} = (pa + qar)r^{n-1})$

$7a_n + a_{n+1} = a(7+r)r^{n-1}$  이므로  $a(7+r) = 18$ ,  $r = 2$  따라서  $a = 2$

$$a_2 = ar = 4$$

## 09 등비수열의 일반항

등비수열  $\{a_n\}$ 에 대하여 수열  $\{7a_n + a_{n+1}\}$ 이 첫째항이 18, 공비가 2인 등비수열일 때,  $a_2$ 의 값은?

- ① 2                      ② 4                      ③ 8  
④ 18                      ⑤ 36

유형⑨ 등비수열

17 대표문항

모든 항이 실수로 이루어진 등비수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  
 $a_1 + a_3 = 12$ ,  $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = 15$   
일 때,  $a_1 a_2 a_3 a_4$ 의 값은?  

①  $2^9$

②  $2^8$

③  $2^7$

④  $2^6$

⑤  $2^5$

11 등비중항

세 수  $a, b, c$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루고,  
 $a + b + c = 7$ ,  $a^2 + b^2 + c^2 = 91$   
일 때,  $abc$ 의 값은?  

①  $-27$

②  $-8$

③  $-2$

④  $8$

⑤  $27$

유형⑩ 등비중항

20 대표문항

공차가 0이 아닌 등차수열  $\{a_n\}$ 의 세 항  $a_2, a_4, a_9$ 가 이 순서대로 공비  $r$ 인 등비수열을 이룰 때,  $6r$ 의 값을 구하시오.

13 등비수열의 합

공비가 실수인 등비수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  
 $a_1 + a_2 + a_3 = 21$ ,  $a_2 + a_4 + a_6 = 126$   
일 때,  $a_1 + a_2 + \dots + a_k > 3000$ 을 만족시키는 자연수  $k$ 의 최솟값을 구하시오.

※ 2nd. Step 17.

$$a_1 + a_3 = a + ar^2 = 12, \quad a_5 + a_7 = (a + ar^2)r^4 = 3 \quad \text{이므로} \quad r^4 = \frac{1}{4} \quad \text{따라서} \quad r^2 = \frac{1}{2}, \quad a_1 + \frac{a_1}{2} = 12 \quad \text{이므로} \quad a_1 = 8$$

$$a_1 a_2 a_3 a_4 = a^4 r^{1+2+3} = a^4 r^6 = a^4 (r^2)^3 = (2^3)^4 (2^{-1})^3 = 2^{12-3} = 2^9 = 512$$

### ■ 등비중항

※ 1st. Step 11.

세 수가 등비수열을 이룰 경우 식을 세우는 방법에는 두 가지가 있다.

둘째항을 기준으로 ' $\frac{b}{r}, b, br$ ', 첫째항을 기준으로 ' $a, ar, ar^2$ '

첫째항을 기준으로 세 수를  $a, ar, ar^2$ 로 놓으면 세 수의 합은  $a(1+r+r^2) = 7 \dots \textcircled{1}$

$$a^2 + (ar)^2 + (ar^2)^2 = a^2(1+r^2+r^4) = a(1+r+r^2)a(1-r+r^2) = 7a(1-r+r^2) = 91 \quad \therefore a(1-r+r^2) = 13 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} : 2ar = -6 \quad \text{이므로} \quad ar = -3 \quad abc = a \cdot ar \cdot ar^2 = (ar)^3 = (-3)^3 = -27$$

※ 2nd. Step 20.

수열  $\{a_n\}$ 의 세 항  $a_2, a_4, a_9$ 가 순서대로 공비  $r$ 인 등비수열을 이루므로

$$a_2 = x - 2d, \quad a_4 = x, \quad a_9 = x + 5d \quad \text{라 놓으면} \quad (a_4)^2 = a_2 \times a_9 \quad \text{이므로} \quad x^2 = (x - 2d)(x + 5d) \quad \text{따라서} \quad d = \frac{3}{10}x$$

$$a_2 = x - 2d = \frac{4}{10}x = \frac{2}{5}x \quad \text{이고} \quad a_4 = a_2 \times r \quad \text{이므로} \quad r = a_4 \times \frac{1}{a_2} = x \times \frac{5}{2x} = \frac{5}{2} \quad \text{따라서} \quad 6r = 15$$

### ■ 등비 수열의 합

※ 1st. Step 13.

$$a_1 = a, \quad \text{공비를 } r \text{이라 하면} \quad a_1 + a_2 + a_3 = a(1+r+r^2) = 21 \dots \textcircled{1}$$

$$a_2 + a_4 + a_6 = ar(1+r^2+r^4) = ar(1+r+r^2)(1-r+r^2) = 126 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} : r(1-r+r^2) = 6 \quad \text{따라서} \quad r^3 - r^2 + r - 6 = (r-2)(r^2 + r - 3) = 0$$

$$r^2 + r - 3 \neq 0 \quad \text{이므로} \quad r = 2 \quad \textcircled{1} \text{식에 대입하면} \quad a = 3$$

$$S_k = \frac{3(2^k - 1)}{2 - 1} > 3000 \quad \text{따라서} \quad 2^k > 1001 \quad \text{이므로} \quad k \text{의 최솟값은 } 10 \quad (\because k \in \mathbb{N})$$

## 26

5와 15 사이에  $n$ 개의 수  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 을 넣어 만든 수열  $5, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, 15$ 는 공비가 1이 아닌 등비수열을 이루고,  $n$ 개의 수  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ 을 넣어 만든 수열  $5, b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, 15$ 는 공차가 0이 아닌 등차수열을 이룬다.

$$\frac{\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}\right)(b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n)}{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n} = 6$$

을 만족시키는  $n$ 의 값을 구하시오.

## 16 등비수열의 합과 일반항 사이의 관계

수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합  $S_n$ 이

$$S_n = 2^n - 1$$

일 때,  $a_1 + a_5 + a_9$ 의 값을 구하시오.

## 33

공비가 양수인 등비수열  $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_2 + a_4 + a_8 + \dots + a_{2^n} = 3 \times 2^n - 3$$

일 때,  $a_5 + a_7 + a_9 + \dots + a_{17}$ 의 값을 구하시오.

## 34

수열  $\{a_n\}$ 에 대하여 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합을  $S_n$ 이라 하면

$$a_1 = 1, a_2 = 3,$$

$$(S_{n+1} - S_{n-1})^2 = 4a_n a_{n+1} + 4 \quad (n=2, 3, 4, \dots)$$

일 때,  $a_{20}$ 의 값을 구하시오. (단,  $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < \dots$ )

※ 2nd. Step 26.

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}, \quad \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = \frac{\frac{1}{a_1} \left\{ 1 - \left( \frac{1}{r} \right)^n \right\}}{1 - \frac{1}{r}} = \frac{\frac{r}{a_1} \left\{ 1 - \left( \frac{1}{r} \right)^n \right\}}{r - 1} = \frac{\frac{1}{a_1 r^{n-1}} (r^n - 1)}{r - 1}$$

$$15 + 5 = (b_1 + b_n) = (b_2 + b_{n-1}) = \dots = (b_k + b_{n-k+1}) \quad \text{이므로} \quad b_1 + b_2 + \dots + b_n = \frac{n(5 + 15)}{2} = 10n$$

$$\text{따라서} \quad \frac{\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right)(b_1 + b_2 + \dots + b_n)}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} = \frac{\frac{1}{a_1 r^{n-1}} (r^n - 1) \times 10n}{a_1 (r^n - 1)} = \frac{10n}{(a_1)^2 r^{n-1}}$$

$$\text{한편, } a_1 a_n = a_1^2 r^{n-1} = 5 \times 15 = 75 \quad \text{이므로} \quad \frac{10n}{a_1^2 r^{n-1}} = \frac{10n}{75} = 6 \quad \text{따라서} \quad n = 45$$

## ■ 등비 수열의 합과 일반항과의 관계

※ 1st. Step 16.

$S_n = 2^n - 1$  이면 수열  $\{a_n\}$ 은 첫째항이  $S_1 = 2^1 - 1 = 1$ 이고 공비가 2인 등비수열이다.

$$\text{따라서 } a_n = 2^{n-1} \quad \text{이므로} \quad a_1 + a_5 + a_9 = 1 + 2^4 + 2^8 = \frac{16^3 - 1}{16 - 1} = 273$$

※ 2nd. Step 33.

$$a_{2n} = b_n \quad \text{이라 하면} \quad a_2 + a_4 + \dots + a_{2^n} = b_1 + b_2 + \dots + b_n = 3 \times 2^n - 3$$

따라서 수열  $\{b_n\}$ 은 첫째항이  $a_2 = b_1 = 3$ , 공비가  $r^2 = 2$ 인 등비수열. 따라서  $a_{2n} = b_n = 3 \times 2^{n-1}$

수열  $\{a_{2n-1}\}$ 과 수열  $\{a_n\}$ 은 공비가 서로 같고,  $a_5 = a_4 r = 6\sqrt{2}$  이므로

$$a_5 + a_7 + \dots + a_{17} = \frac{a_5 \{(r^2)^7 - 1\}}{r^2 - 1} = \frac{6\sqrt{2}(2^7 - 1)}{2 - 1} = 127 \times 6\sqrt{2} = 762\sqrt{2}$$

※ 2nd. Step 34.

$$(S_{n+1} - S_{n-1})^2 = (a_{n+1} + a_n)^2 = 4a_n a_{n+1} + 4 \quad \text{따라서} \quad (a_{n+1})^2 - 2a_{n+1}a_n + (a_n)^2 - 4 = (a_{n+1} - a_n)^2 - 2^2$$

$$(a_{n+1} - a_n - 2)(a_{n+1} - a_n + 2) = 0 \quad \text{이므로} \quad a_{n+1} = a_n + 2 \quad \text{또는} \quad a_{n+1} = a_n - 2$$

$a_1 = 1, a_2 = 3$ 이므로  $a_{n+1} = a_n + 2$  따라서 수열  $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1이고 공차가 2인 등차수열

$$a_n = 2n - 1 \quad \text{따라서} \quad a_{20} = 39$$

수열의 합, 수열의 귀납적 정의, 수학적 귀납법은 별도 유인물(수학학력신장반 강의노트 【8.수열】\_20210625수정)을 참고 하시기 바랍니다.

## 2차고사 Tip

1. 대체로 문제는 이 유인물에 있는 문제만큼 어렵지는 않습니다. 교과서와 보충교재의 문제를 다 풀 수 있다면 충분히 해결할 수 있습니다.
2. 이 유인물에 있는 문제는 그 풀이보다는 문제는 푸는데 있어 빨리 해결할 수 있는 tip이 많이 들어있습니다. 익숙해지면 충분히 시간을 절약할 수 있습니다.
3. 객관식 13번부터 16번까지는 1-12번까지 문제에 비해 조금 어렵습니다. 처음 접하는 문제라는 생각이 들 수 있습니다.
4. 객관식 13번은 2차 수행평가(OX 20문항, 객관식10문항)에 있는 문제와 비슷한 유형의 문제입니다.
5. 객관식 14번은 삼각함수의 변환을 잘 이해하고 있어야 하며, 사인법칙, 코사인법칙, 삼각형의 넓이를 적절하게 잘 이용해야 합니다.
6. 객관식 15번은 수학적 귀납법입니다. 처음 접하는 문제 형식이지만 괄호넣기이므로 논리적으로 해석하면 충분히 해결할 수 있습니다.
7. 객관식 16번은 수열의 귀납적 정의입니다. 일반항을 구하는 과정을 괄호넣기로 만들었습니다. 그렇게 어렵게 만들지 않았으니 충분히 도전 할 만 합니다.
8. 서답형 1번과 2번은 답안지 앞면에 작성해 주시고, 서답형 3, 4, 5번은 답안지 뒷면에 작성해 주시기 바랍니다.
9. 서답형의 모든 정답은 가급적 정수로 만드는 것을 좋아하지만 문제의 특성상 유리수와 무리수가 나올 수 있습니다.
10. 서답형 3-5번은 서술형입니다. 문제에 제시되지 않은 기호를 사용할 경우 반드시 기호에 대한 설명을 해야 합니다.  
예를 들어 공차를  $d$ 라 했을 경우,  $d$ 가 공차임을 명확하게 설명해야 하며, 공비를  $r$ 이라 했을 경우에도  $r$ 이 공비임을 명확하게 설명해야 합니다.  
첫째항을  $a_1$ 이라 하고 싶다면 수열을  $\{a_n\}$ 이라고 설명한 후 사용해야 합니다. 그 밖에도 통상적으로 사용하는 기호라 할지라도 문제에 있지 않았던 문자나 기호를 사용할 경우에는 반드시 기호나 문자에 대해 정의를 해주어야 합니다. 문제에서  $d, r, a_1$  과 같은 기호에 대해 설명하고 있다면 별도로 설명하지 않아도 됩니다.
11. 서답형 5번(마지막 번 문항)은 문제에 평가기준이 제시되어 있습니다. 붉은 글씨의 평가기준만 채점하니 다른 내용은 아무리 많이 써도 채점하지 않습니다.  
서답형 5번은 그림을 그려야 합니다. 비교적 정확하게 그려주시기 바랍니다. (그림을 평가하는 것은 평가기준 1, 2, 5)  
서답형 5번을 풀기 위해서는 계산이 필요한 부분이 있습니다만 풀이없이 정답을 평가하는 평가기준도 있습니다. (정답만 평가하는 것은 평가기준 3, 4)  
서답형 5번에서 계산과정과 정답을 모두 평가하는 부분이 있습니다 (평가기준 6, 7)