

2

로그함수

- 로그함수의 뜻을 안다.
- 로그함수의 그래프를 그릴 수 있고, 그 성질을 이해한다.

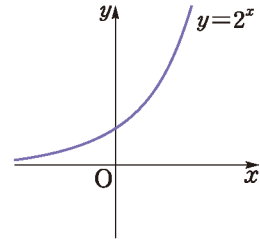
로그함수란 무엇일까

생각 **특**

오른쪽 그림은 지수함수 $y = 2^x$ 의 그래프이다.

탐구 ① 지수함수 $y = 2^x$ 의 역함수가 존재하는지 말해 보자.

탐구 ② 로그의 정의를 이용하여 x 를 y 에 대한 식으로 나타내 보자.



지수함수 $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$)은 실수 전체의 집합에서 양의 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

지수함수의 역함수를 구해 보자.

로그의 정의에 의하여

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$$

가 성립하므로 $x = \log_a y$ 에서 x 와 y 를 바꾸면 지수함수 $y = a^x$ 의 역함수

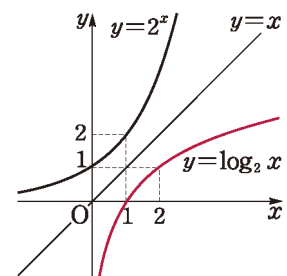
$$y = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

를 얻는다. 이 함수를 a 를 밑으로 하는 **로그함수**라고 한다.

로그함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 그려 보자.

로그함수 $y = \log_2 x$ 는 지수함수 $y = 2^x$ 의 역함수이므로 로그함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 지수함수 $y = 2^x$ 의 그래프를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭 이동하여 그릴 수 있다.

이때 함수 $y = \log_2 x$ 의 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다. 또 이 그래프의 점근선은 y 축이다.



일반적으로 $a > 0$, $a \neq 1$ 일 때, 로그함수 $y = \log_a x$ 의 그래프는 지수함수 $y = a^x$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

문제 1

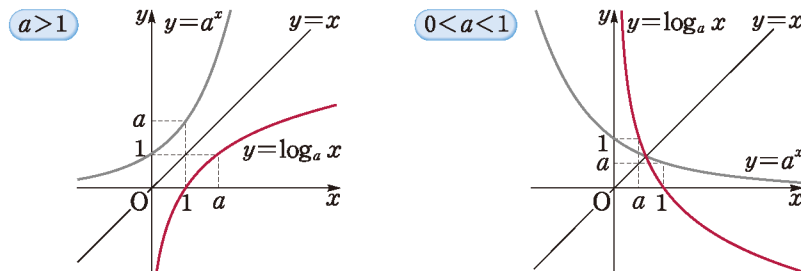
다음 로그함수의 그래프를 그리시오.

(1) $y = \log_3 x$

(2) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

로그함수 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)의 그래프는 a 의 값의 범위에 따라 다음 그림과 같다.

$a > 0, a \neq 1$ 일 때,
 $\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$



이상에서 로그함수는 다음과 같은 성질을 가짐을 알 수 있다.

로그함수 $y = \log_a x$ 의 성질

로그함수 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)에 대하여

- ① 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.
- ② $a > 1$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.
 $0 < a < 1$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.
- ③ 그래프는 점 $(1, 0)$ 을 지나고, 점근선은 y 축이다.

로그함수 $y = \log_a x$ 에서

(i) $a > 1$ 일 때,

$x_1 < x_2$ 이면

$\log_a x_1 < \log_a x_2$

(ii) $0 < a < 1$ 일 때,

$x_1 < x_2$ 이면

$\log_a x_1 > \log_a x_2$

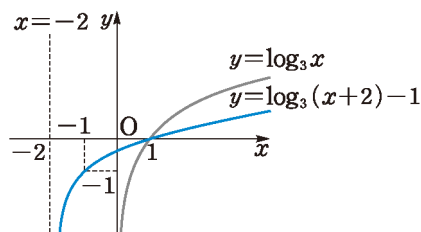
참고

$a > 0, a \neq 1$ 일 때, 함수 $y = \log_a x$ 와 $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ 의 그래프는 x 축에 대하여 대칭이다.

예제 1

함수 $y = \log_3(x+2) - 1$ 의 그래프를 그리고 점근선의 방정식을 구하시오.

풀이 함수 $y = \log_3(x+2) - 1$ 의 그래프는 함수 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다. 따라서 함수 $y = \log_3(x+2) - 1$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 점근선의 방정식은 $x = -2$ 이다.



답 풀이 참조

문제 2

다음 함수의 그래프를 그리고 점근선의 방정식을 구하시오.

(1) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+1) - 3$

(2) $y = \log_2(-x) + 2$

문제 3

정의역이 $\{x \mid -2 \leq x \leq 1\}$ 일 때, 함수 $y = \log_2(x+3) + 2$ 의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

예제 2

두 수 $\log_2 11$, $2\log_2 2\sqrt{3}$ 의 대소를 비교하시오.

풀이 $2\log_2 2\sqrt{3} = \log_2 (2\sqrt{3})^2 = \log_2 12$

함수 $y = \log_2 x$ 는 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

이때 $11 < 12$ 이므로 $\log_2 11 < \log_2 12$

$$\log_2 11 < 2\log_2 2\sqrt{3}$$

답 $\log_2 11 < 2\log_2 2\sqrt{3}$

문제 4

다음 두 수의 대소를 비교하시오.

(1) $8\log_7 2$, $3\log_7 6$

(2) $2\log_{\frac{1}{3}} 4$, $\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{3}} 64$

분석**하기**

두 함수 f , g 가 다음과 같다.

$$f(x) = 2\log_2 x, \quad g(x) = \log_2 x^2$$

1 두 함수 f , g 의 정의역을 구해 보고 두 함수가 같은지 다른지를 말해 보자.

2 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프를 그려 보자.