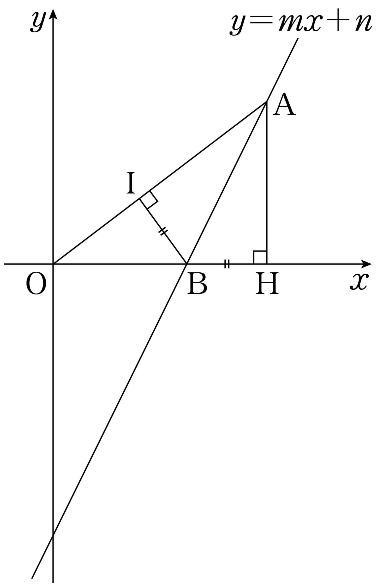
수학 준킬러 미니 모의고사02

1) 자연수 n에 대하여 두 함수 $f(x)=x^2+n^2$과 $g(x)=2nx+1$의 그래프가 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 점 A와 B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. 네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이가 66이 되도록 하는 n의 값은? [200617]

① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5

2) 그림과 같이 좌표평면 위의 점 A(8, 6)에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하고, 선분 OH 위의 점 B에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 I라 하자. $\overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{BI}}$일 때, 직선 AB의 방정식은 $y=mx+n$이다. $m+n$의 값은? (단, O는 원점이고, m, n은 상수이다.) [190317]



① -10
② -9
③ -8
④ -7
⑤ -6

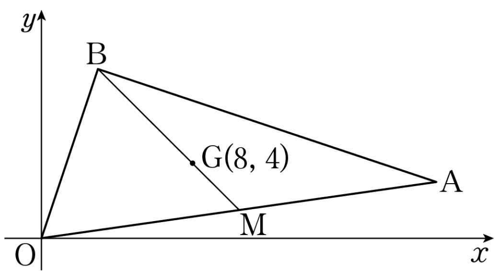
3) 원 $C: x^2+y^2-5x=0$ 위의 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

가. $\overline{\mathrm{OP}}=3$ 나. 점 P는 제1사분면 위의 점이다.

원 C 위의 점 P에서의 접선의 기울기가 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [190327]

4) 좌표평면의 제1사분면에 있는 두 점 A, B와 원점 O에 대하여 삼각형 OAB의 무게중심 G의 좌표는 $(8, 4)$이고, 점 B와 직선 OA 사이의 거리는 $6\sqrt{2}$이다. 다음은 직선 OB의 기울기가 직선 OA의 기울기보다 클 때, 직선 OA의 기울기를 구하는 과정이다.

선분 OA의 중점을 M이라 하자.

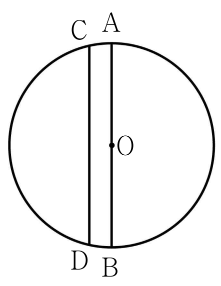
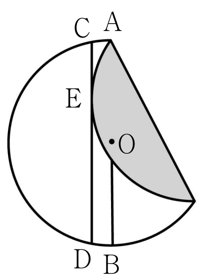
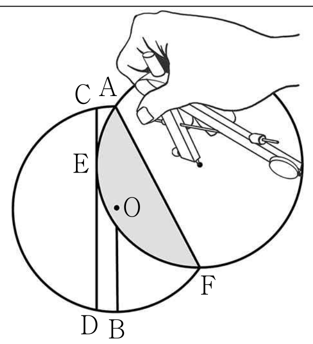


점 G가 삼각형 OAB의 무게중심이므로 $\overline{\mathrm{BG}} : \overline{\mathrm{GM}}=2:1$
이고, 점 B와 직선 OA 사이의 거리가 $6\sqrt{2}$이므로 점 G와 직선 OA 사이의 거리는 $\boxed{\text{(가)}}$이다.
직선 OA의 기울기를 m이라 하면 점 G와 직선 OA 사이의 거리는 $\dfrac{\boxed{\text{(나)}}}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}$
이고 $\boxed{\text{(가)}}$와 같다. 즉, $\boxed{\text{(나)}}=\boxed{\text{(가)}}\times\sqrt{m^2+1}$
이다. 양변을 제곱하여 m의 값을 구하면
$m=\boxed{}$ 또는 $m=\boxed{}$이다.
이때 직선 OG의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로 직선 OA의 기울기는 $\boxed{\text{(다)}}$이다.

위의 (가), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q라 하고, (나)에 알맞은 식을 $f(m)$이라 할 때, $\dfrac{f(q)}{p^2}$의 값은? [200318]

① $\frac{2}{7}$
② $\frac{5}{14}$
③ $\frac{3}{7}$
④ $\frac{1}{2}$
⑤ $\frac{4}{7}$

5) 반지름의 길이가 6인 원 모양의 종이가 있을 때, 다음과 같은 방법으로 새로운 원을 그린다.

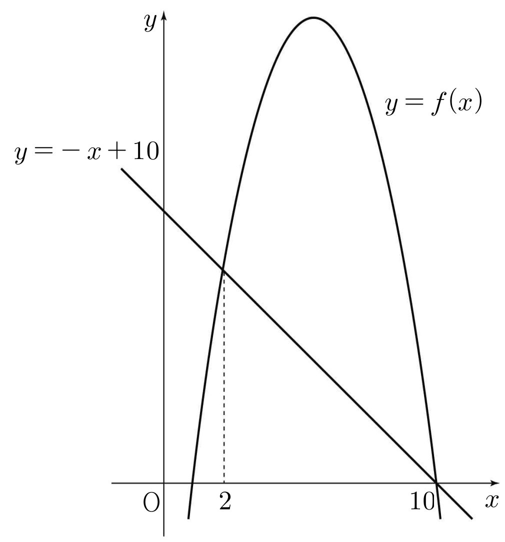
Ⅰ		원의 중심 O를 지나는 직선을 그렸을 때, 원과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. 원과 두 점에서 만나도록 직선 AB와 평행한 직선을 그렸을 때, 원과 만나는 두 점을 각각 C, D라 하자.
Ⅱ		점 A를 지나는 현을 접는 선으로 하여 직선 CD에 접하도록 종이를 접고, 그 접점을 E라 하자.
Ⅲ		점 A를 지나는 현이 원과 만나는 점 중 점 A가 아닌 점을 F라 하자. 세 점 A, E, F를 지나는 새로운 원을 그린다.

원의 중심 O를 좌표평면의 원점으로 하고, 두 점 A, B를 지나는 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 그렸을 때, 세 점 A, E, F를 지나는 원의 중심을 $\mathrm{O}'(a,\ b)$라 하자. 삼각형 AEO'의 넓이가 12일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, 종이의 두께는 무시한다.) [190928]

6) 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ -9)$, $\mathrm{B}(5,\ 3)$에 대하여 $\angle \mathrm{APB}=45°$를 만족시키는 점 P가 있다. 서로 다른 세 점 A, B, P를 지나는 원의 중심을 C라 하자. 선분 OC의 길이를 k라 할 때, k의 최솟값은? (단, O는 원점이다.) [200920]

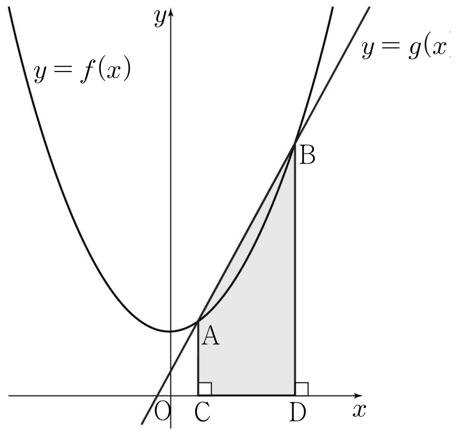
① 3
② 4
③ 5
④ 6
⑤ 7

7) 그림은 이차함수 $f(x)=-x^2+11x-10$의 그래프와 직선 $y=-x+10$을 나타낸 것이다. 직선 $y=-x+10$ 위의 한 점 $\mathrm{A}(t,\ -t+10)$에 대하여 점 A를 지나고 y축에 평행한 직선이 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점을 B, 점 B를 지나고 x축과 평행한 직선이 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점 중 B가 아닌 점을 C, 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선과 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선이 만나는 점을 D라 하자. 네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은? (단, $2<t<10$, $t \neq \frac{11}{2}$이다.) [200620]



① 30
② 33
③ 36
④ 39
⑤ 42

1) 답 : ④

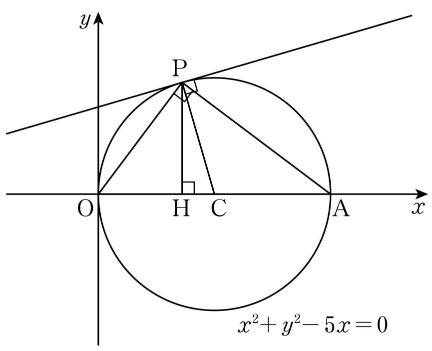


두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표를 구하면
$x^2+n^2=2nx+1$, $x^2-2nx+n^2-1=0$이고
$x=n-1$ 또는 $x=n+1$이다.
따라서 점 $\mathrm{A}\left(n-1,\, 2n^2-2n+1\right)$, $\mathrm{B}\left(n+1,\, 2n^2+2n+1\right)$라 하면 $\mathrm{C}(n-1,\,0)$, $\mathrm{D}(n+1,\,0)$이다.
사각형 ACDB의 넓이는
$\dfrac{1}{2}(\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BD}})\times\overline{\mathrm{CD}}=\dfrac{1}{2}(4n^2+2)\times 2=4n^2+2$이다.
따라서 문제의 조건을 만족시키는 자연수 n은
$4n^2+2=66$, $n^2=16$이므로 $n=4$이다.

2) 답 : ③

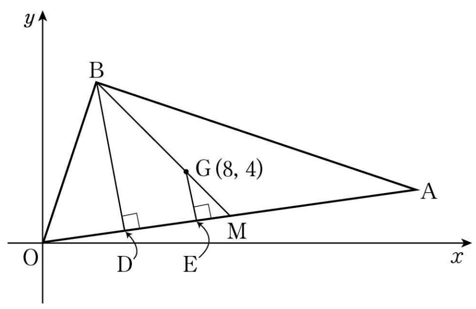
점 $\mathrm{A}(8,\,6)$이므로 두 점 O, A를 지나는 직선의 방정식은 $y=\dfrac{3}{4}x$,
즉 $3x-4y=0$
점 B의 좌표를 $(a,\,0)\ (0<a<8)$이라 하면
$\overline{\mathrm{BI}}=\dfrac{|3\times a-4\times 0|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{3a}{5}$
$\overline{\mathrm{BH}}=8-a$, $\overline{\mathrm{BI}}=\overline{\mathrm{BH}}$에서 $\dfrac{3a}{5}=8-a$, $a=5$
그러므로 점 $\mathrm{B}(5,\,0)$이다.
두 점 $\mathrm{A}(8,\,6)$, $\mathrm{B}(5,\,0)$을 지나는 직선의 방정식은
$y-0=\dfrac{6-0}{8-5}(x-5)$, $y=2x-10$
따라서 $m=2$, $n=-10$이므로 $m+n=2+(-10)=-8$

3) 답 : 31



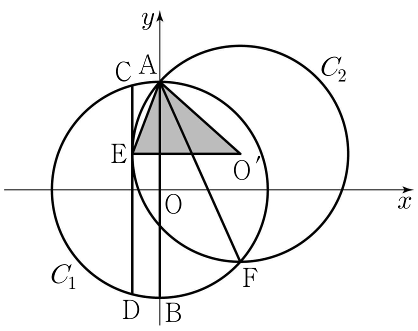
원 $\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{5}{2}\right)^2$의 중심을 C라 하면 좌표는 $\mathrm{C}\left(\dfrac{5}{2},\,0\right)$이다.
원이 x축과 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 A라 하고 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.
점 P가 원 C 위의 점이고 선분 OA가 원 C의 지름이므로
$\angle\mathrm{OPA}=90°$
삼각형 OAP에서 피타고라스의 정리에 의하여
$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OP}}^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$
삼각형 OAP와 삼각형 OPH에서 $\angle\mathrm{OPA}=\angle\mathrm{OHP}=90°$
$\angle\mathrm{AOP}=\angle\mathrm{POH}$
$\triangle\mathrm{OAP}\backsim\triangle\mathrm{OPH}$ ($\because$ AA 닮음)
$\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OP}}:\overline{\mathrm{OH}}$이고 조건 (가)에서 $\overline{\mathrm{OP}}=3$이고 $\overline{\mathrm{OA}}=5$이므로
$5:3=3:\overline{\mathrm{OH}}$, $\overline{\mathrm{OH}}=\dfrac{9}{5}$
$\overline{\mathrm{OH}}:\overline{\mathrm{HP}}=\overline{\mathrm{OP}}:\overline{\mathrm{PA}}$, $\dfrac{9}{5}:\overline{\mathrm{HP}}=3:4$, $\overline{\mathrm{HP}}=\dfrac{12}{5}$
따라서 점 $\mathrm{P}\left(\dfrac{9}{5},\,\dfrac{12}{5}\right)$이다.
$\mathrm{C}\left(\dfrac{5}{2},\,0\right)$이므로 직선 CP의 기울기는
$$\frac{-\dfrac{12}{5}}{\dfrac{5}{2}-\dfrac{9}{5}}=\frac{-\dfrac{24}{10}}{\dfrac{7}{10}}=-\frac{24}{7}$$
점 P에서의 접선과 직선 CP는 서로 수직이고 두 직선의 기울기의 곱이 -1이므로 점 P에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{7}{24}$
따라서 $p=24$, $q=7$이므로 $p+q=31$

4) 답 : ②
선분 OA의 중점을 M, 두 점 B, G에서 직선 OA에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하자.



점 G가 삼각형 OAB의 무게중심이므로 $\overline{\mathrm{BG}}:\overline{\mathrm{GM}}=2:1$
이고, 삼각형 MBD와 삼각형 MGE는 서로 닮음이므로
$\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{GE}}=3:1$이다.
점 B와 직선 OA 사이의 거리 $\overline{\mathrm{BD}}$가 $6\sqrt{2}$이므로
$\overline{\mathrm{GE}}=\dfrac{1}{3}\times 6\sqrt{2}=\boxed{2\sqrt{2}}$
직선 OA의 기울기를 m이라 하면 직선 OA의 방정식은 $y=mx$,
즉 $mx-y=0$이므로 점 G와 직선 OA 사이의 거리는
$\dfrac{\boxed{|8m-4|}}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}$이고 $\boxed{2\sqrt{2}}$와 같다.
즉, $\dfrac{\boxed{|8m-4|}}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\boxed{2\sqrt{2}}$, $\boxed{|8m-4|}=\boxed{2\sqrt{2}}\times\sqrt{m^2+1}$
이다. 양변을 제곱하면 $(8m-4)^2=8(m^2+1)$
$7m^2-8m+1=0$, $(7m-1)(m-1)=0$, $m=\dfrac{1}{7}$ 또는 $m=1$
이때 직선 OG의 기울기가 $\dfrac{1}{2}$이므로 $m<\dfrac{1}{2}$을 만족시키는 직선 OA의 기울기는 $\boxed{\dfrac{1}{7}}$이다.
따라서 $p=2\sqrt{2}$, $q=\dfrac{1}{7}$, $f(m)=|8m-4|$이므로
$$\frac{f(q)}{p^2}=\frac{\left|8\times\dfrac{1}{7}-4\right|}{(2\sqrt{2})^2}=\frac{\dfrac{20}{7}}{8}=\frac{5}{14}$$

5) 답 : 24
점 O를 중심으로 하는 원을 C_1, 점 O′을 중심으로 하는 원을 C_2라 하자.



직선 CD는 원 C_2의 접선이므로 직선 CD와 직선 EO′은 서로 수직이다.

O′$(a,\ b)$에 대하여 삼각형 AEO′의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 6\times(6-b)=12$

$b=2$

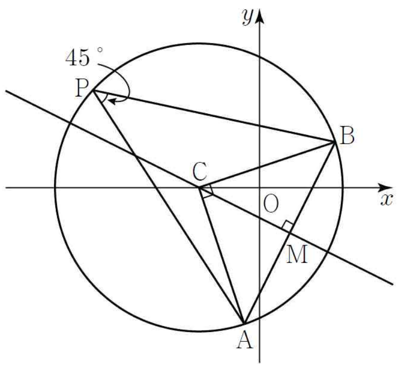
따라서 원 C_2의 방정식은 $(x-a)^2+(y-2)^2=36$

원 C_2는 점 A$(0,\ 6)$을 지나므로 $a^2+16=36$

$a^2=20$

따라서 $a^2+b^2=24$

6) 답 : ②



호 AB에 대한 원주각이 ∠APB$=45°$이므로 호 AB에 대한 중심각은 ∠ACB$=90°$

삼각형 ABC는 $\overline{\mathrm{CA}}=\overline{\mathrm{CB}}$인 직각이등변삼각형이다.

주어진 원의 반지름의 길이를 $r=\overline{\mathrm{CA}}$라 하면

삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AB}_2}=\overline{\mathrm{CA}_2}+\overline{\mathrm{CB}_2}=2r^2$

선분 AB의 길이가 $6\sqrt{5}$이므로 $r=3\sqrt{10}$

선분 AB의 중점을 M이라 하면 점 M의 좌표는 M$(2,\ -3)$

직선 AB의 기울기가 2이고 직선 CM은 선분 AB의 수직이등분선이므로 직선 CM의 방정식은 $y=-\frac{1}{2}x-2$

점 C의 좌표를 C$(2a,\ -a-2)$ 라 하자.

점 C를 중심으로 하는 원의 방정식은 $(x-2a)^2+(y+a+2)^2=90$

점 B$(5,\ 3)$ 이 원 위의 점이므로 $(5-2a)^2+(5+a)^2=90$

$5a^2-10a-40=0$에서 $a^2-2a-8=(a-4)(a+2)=0$

$a=4$ 또는 $a=-2$

C$(8,\ -6)$ 또는 C$(-4,\ 0)$

$k=10$ 또는 $k=4$

따라서 k의 최솟값은 4

7) 답 : ③

이차방정식 $-x^2+11x-10=-x+10$의 근은

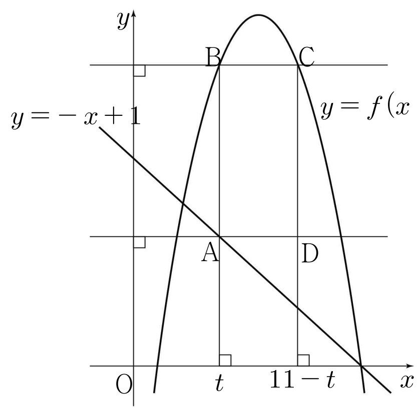
$x=2,\ 10$이므로 두 점 $(2,8)$과 $(10,0)$에서 두 그래프가 만난다.

A$(t,\ -t+10)$, B$(t,\ -t^2+11t-10)$

라 하면 선분 AB의 길이는

$-t^2+11t-10-(-t+10)=-t^2+12t-20$이다.

ⅰ) $2<t<\frac{11}{2}$인 경우



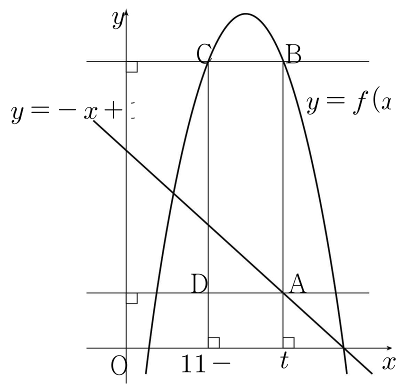
선분 BC의 길이는 $2\times\left(\frac{11}{2}-t\right)=11-2t$이다.

직사각형 BADC의 둘레의 길이는

$2(-t^2+10t-9)=-2(t-5)^2+32$이다.

$2<t<\frac{11}{2}$에서 직사각형 BADC의 둘레의 길이의 최댓값은 32

ⅱ) $\frac{11}{2}<t<10$인 경우



선분 BC의 길이는 $2\times\left(t-\frac{11}{2}\right)=2t-11$이다.

직사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$2(-t^2+14t-31)=-2(t-7)^2+36$이다.

$\frac{11}{2}<t<10$에서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 36

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 36이다.