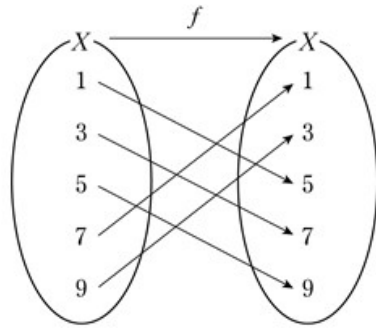


집합 · 명제 · 함수 주요기출

1) 그림은 함수 $f: X \rightarrow X$ 를 나타낸 것이다. $f(5) + (f \circ f)(9)$ 의 값은? [200305]

- ① 18
- ② 16
- ③ 14
- ④ 12
- ⑤ 10



2) 실수 a 에 대한 명제

‘모든 실수 x 에 대하여 $x^2 - 2ax + 4a - 4 \geq 0$ 이다.’

가 참인 명제가 되도록 하는 a 의 값은? [201111]

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

3) 집합 $X = \{-3, 1\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & (x < 0) \\ x^2 - 2x + b & (x \geq 0) \end{cases}$$

이 항등함수일 때, ab 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [191111]

- ① 4
- ② 6
- ③ 8
- ④ 10
- ⑤ 12

4) 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 $Y = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ 로의 함수 f 를

$$f(x) = (2x^2 \text{의 일의 자리의 숫자})$$

로 정의하자. $f(a) = 2, f(b) = 8$ 을 만족시키는 X 의 원소 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 최댓값은? [180313]

- ① 5
- ② 6
- ③ 7
- ④ 8
- ⑤ 9

5) 명제 ‘모든 실수 x 에 대하여 $2x^2 + 6x + a \geq 0$ 이다.’가 거짓이 되도록 하는 정수 a 의 최댓값은? [190315]

- ① 0
- ② 2
- ③ 4
- ④ 6
- ⑤ 8

6) 함수 $f(x) = x^2 - 2x + a$ 가

$$(f \circ f)(2) = (f \circ f)(4)$$

를 만족시킬 때, $f(6)$ 의 값은? (단, a 는 상수이다.) [200314점]

- ① 21
- ② 22
- ③ 23
- ④ 24
- ⑤ 25

7) 자연수 n 에 대하여 자연수 전체 집합의 부분집합 A_n 을 다음과 같이 정의하자.

$$A_n = \{x \mid x \text{는 } \sqrt{n} \text{ 이하의 홀수}\}$$

$A_n \subset A_{25}$ 를 만족시키는 n 의 최댓값을 구하시오. [190325]

8) 명제 ‘어떤 실수 x 에 대하여 $x^2 + 8x + 2k - 1 \leq 0$ 이다.’가 거짓이 되도록 하는 정수 k 의 최솟값을 구하시오. [200327]

9) 집합 $X = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ 에 대하여 함수 $f: X \rightarrow X$ 는 일대일 대응이다. $3 \leq n \leq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 $f(n)f(n+2)$ 의 값이 짝수일 때, $f(3)+f(7)$ 의 최댓값을 구하시오. [180327]

10) 두 함수

$$f(x) = x + a$$
$$g(x) = \begin{cases} 2x - 6 & (x < a) \\ x^2 & (x \geq a) \end{cases}$$

에 대하여 $(g \circ f)(1) + (f \circ g)(4) = 57$ 을 만족시키는 모든 실수 a 의 값의 합을 S 라 할 때, $10S^2$ 의 값을 구하시오. [191128]

11) 전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합

$$A = \{1, 2\}, B = \{2, 3, 4\}$$

에 대하여

$$X \cap A \neq \emptyset, X \cap B \neq \emptyset$$

을 만족시키는 U 의 부분집합 X 의 개수를 구하시오. [200328]

12) 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 에 대하여 함수 $f: X \rightarrow X$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- 가. 집합 X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 이다.

나. $1 \leq x \leq 3$ 일 때, $(f \circ f)(x) = f(x) - 2x$ 이다.

$f(2) + f(3) + f(4)$ 의 값을 구하시오. [170328]

13) 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 함수 $f: X \rightarrow X$ 가 있다. 함수 f 가 일대일 대응일 때, 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [170320]

- ㄱ. $f(1) \times f(2) = 6$ 이면 $f(3) + f(4) + f(5) = 10$ 이다.

ㄴ. 집합 X 의 모든 원소 x 에 대하여 $(f \circ f)(x) = x$ 이면 $f(a) = a$ 인 집합 X 의 원소 a 가 존재한다.

ㄷ. 집합 X 의 어떤 원소 x 에 대하여 $(f \circ f \circ f)(x) = x$ 이면 $f(b) = b$ 인 집합 X 의 원소 b 가 존재한다.

- ① ㄱ

② ㄷ

③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14) 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 에 대하여 함수 $f: X \rightarrow X$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- 가. 함수 f 의 치역의 원소의 개수는 7이다.

나. $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) + f(7) + f(8) = 42$

다. 함수 f 의 치역의 원소 중 최댓값과 최솟값의 차는 6이다.

집합 X 의 어떤 두 원소 a, b 에 대하여 $f(a) = f(b) = n$ 을 만족하는 자연수 n 의 값을 구하시오. (단, $a \neq b$) [181128]

15) 두 이차함수 $f(x) = x^2 - 2x - 3$, $g(x) = x^2 + 2x + a$ 가 있다. x 에 대한 방정식 $f(g(x)) = f(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 정수 a 의 개수는? [190321]

- ① 1

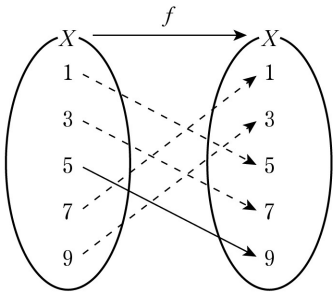
② 2

③ 3

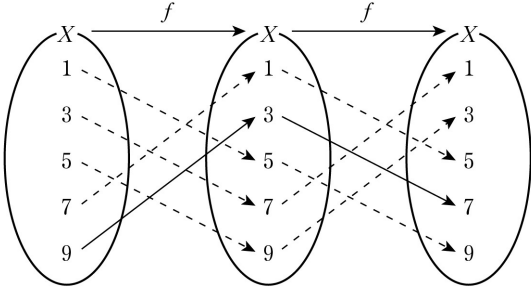
④ 4

⑤ 5

1) 답 : ②



$f(5) = 9$ 이다.



$f(9) = 3$ 이고 $f(3) = 7$ 이므로 $(f \circ f)(9) = f(f(9)) = f(3) = 7$
따라서 $f(5) + (f \circ f)(9) = 9 + 7 = 16$

2) 답 : ②

모든 실수 x 에 대하여 $x^2 - 2ax + 4a - 4 \geq 0$ 이므로

이차방정식 $x^2 - 2ax + 4a - 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$D = (-2a)^2 - 4(4a - 4) \leq 0$, $(a - 2)^2 \leq 0$, 따라서 $a = 2$

3) 답 : ②

함수 $f(x)$ 가 항등함수이므로 집합 X 의 모든 원소 x 에 대하여 $f(x) = x$ 이다.

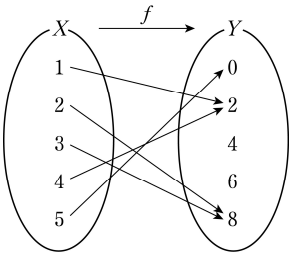
$x = -3$ 일 때, $2 \times (-3) + a = -3$ 에서 $a = 3$

$x = 1$ 일 때, $1^2 - 2 \times 1 + b = 1$ 에서 $b = 2$

따라서 $a \times b = 6$

4) 답 : ③

집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 $Y = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ 로의 함수 f 가 $f(x) = (2x^2$ 의 일의 자리의 숫자)이므로 $f(1) = 2$, $f(2) = 8$, $f(3) = 8$, $f(4) = 2$, $f(5) = 0$ 이며, 함수의 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



함숫값이 2인 정의역 X 의 원소는 1과 4이므로 $f(a) = 2$ 인 X 의 원소 a 는 $a = 1$ 또는 $a = 4$

함숫값이 8인 정의역 X 의 원소는 2와 3이므로 $f(b) = 8$ 인 X 의 원소 b 는 $b = 2$ 또는 $b = 3$

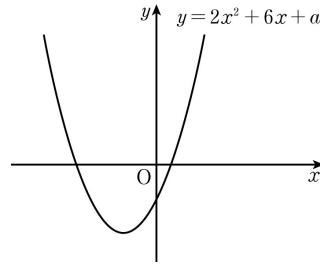
a , b 의 순서쌍 (a, b) 로 가능한 것은 $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(4, 2)$, $(4, 3)$ 이므로 $a + b$ 의 값은 3, 4, 6, 7

따라서 $a + b$ 의 최댓값은 7

5) 답 : ④

명제 '모든 실수 x 에 대하여 $2x^2 + 6x + a \geq 0$ 이다.'가 거짓이면 이 명제의 부정 '어떤 실수 x 에 대하여 $2x^2 + 6x + a < 0$ 이다.'는 참이다.

따라서 이차함수 $y = 2x^2 + 6x + a$ 의 그래프와 x 축이 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.



이차방정식 $2x^2 + 6x + a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $\frac{D}{4} = 3^2 - 2a > 0$ 에서 $a < \frac{9}{2}$, 따라서 정수 a 의 최댓값은 4이다.

6) 답 : ①

$f(x) = x^2 - 2x + a$ 에서 $f(2) = 2^2 - 4 + a = a$

$f(4) = 4^2 - 8 + a = a + 8$

$(f \circ f)(2) = (f \circ f)(4)$ 에서 $f(f(2)) = f(f(4))$, $f(a) = f(a + 8)$

이때 함수 $f(x) = x^2 - 2x + a$ 에서 $f(x) = (x - 1)^2 + a - 1$

이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 축이 직선 $x = 1$ 이고, 직선 $x = 1$ 에 대하여 대칭이다.

$a \neq a + 8$ 이므로 $f(a) = f(a + 8)$ 이려면 $\frac{a + (a + 8)}{2} = 1$, $a = -3$

따라서 함수 $f(x)$ 가 $f(x) = x^2 - 2x - 3$ 이므로

$f(6) = 6^2 - 2 \times 6 - 3 = 21$

7) 답 : 48

$\sqrt{25} = 5$ 이므로 $A_{25} = \{1, 3, 5\}$

$1 \leq \sqrt{n} < 7$ 이면 $A_n \subset A_{25}$ 이므로 $1 \leq n < 49$

따라서 자연수 n 의 최댓값은 48이다.

8) 답 : 9

명제 '어떤 실수 x 에 대하여 $x^2 + 8x + 2k - 1 \leq 0$ 이다.'

가 거짓이라면 이 명제의 부정

'모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 8x + 2k - 1 > 0$ 이다.'

가 참이어야 하므로 이차방정식 $x^2 + 8x + 2k - 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때, $D < 0$ 이어야 한다.

$\frac{D}{4} = 4^2 - (2k - 1) < 0$, $k > \frac{17}{2}$

이므로 정수 k 의 최솟값은 9이다.

9) 답 : 12

3 이상 5 이하의 자연수 n 에 대하여 $f(n)f(n+2)$ 의 값이 짝수이므로 $f(3) \times f(5)$, $f(4) \times f(6)$, $f(5) \times f(7)$ 은 모두 짝수이다.

$f(4)$ 또는 $f(6)$ 은 적어도 하나가 짝수이고, 집합 X 의 원소 중 짝수인 것은 4, 6뿐이므로 $f(3) \times f(5)$ 와 $f(5) \times f(7)$ 이 모두 짝수이려면 $f(5)$ 는 짝수가 되어야 한다.

따라서 $f(3)$, $f(7)$ 은 모두 홀수이므로 $f(3) + f(7)$ 의 최댓값은 $f(3) = 5$, $f(7) = 7$ 또는 $f(3) = 7$, $f(7) = 5$ 일 때 $5 + 7 = 12$ 이다.

10) 답 : 40

$(g \circ f)(1) = g(a + 1) = (a + 1)^2$

$a \leq 4$ 일 때, $(f \circ g)(4) = f(16) = a + 16$

$(g \circ f)(1) + (f \circ g)(4) = a^2 + 3a + 17 = 57$

$a^2 + 3a - 40 = (a - 5)(a + 8) = 0$, $a = -8$

$a > 4$ 일 때, $(f \circ g)(4) = f(2) = a + 2$

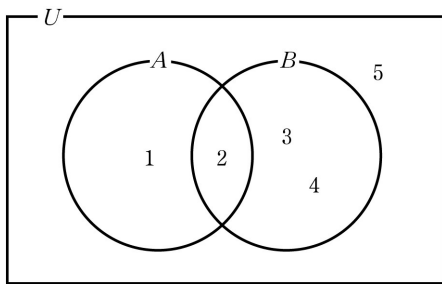
$(g \circ f)(1) + (f \circ g)(4) = a^2 + 3a + 3 = 57$

$a^2 + 3a - 54 = (a - 6)(a + 9) = 0$, $a = 6$

$S = -8 + 6 = -2$, 따라서 $10S^2 = 40$

11) 답 : 22

주어진 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.



$A \cap B = \{2\}$ 이므로 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) $2 \in X$ 인 경우

이때 $X \cap A \neq \emptyset$, $X \cap B \neq \emptyset$ 을 만족시킨다.

그러므로 집합 X 는 전체집합 U 의 2가 아닌 원소인 1, 3, 4, 5의 일부 또는 전부를 원소로 갖거나 어느 것도 원소로 갖지 않을 수 있다. 따라서 $2 \in X$ 인 경우의 집합 X 의 개수는 집합 $\{1, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합의 개수와 같으므로 $2^4 = 16$

(ii) $2 \notin X$ 인 경우

2를 제외한 집합 A 의 원소는 1이고, 2를 제외한 집합 B 의 원소는 3, 4이므로 $X \cap A \neq \emptyset$, $X \cap B \neq \emptyset$ 을 만족시키려면 집합 X 는 1을 반드시 원소로 갖고 3 또는 4를 원소로 가져야 한다.

이때 $1 \in X$, $3 \in X$, $4 \notin X$ 인 경우와 $1 \in X$, $3 \notin X$, $4 \in X$ 인 경우와 $1 \in X$, $3 \in X$, $4 \in X$ 인 경우의 3가지 경우가 있다.

이때 각 경우에서 집합 X 는 집합 $(A \cup B)^C$ 의 원소인 5를 원소로 갖거나 갖지 않을 수 있다.

따라서 $2 \notin X$ 인 경우의 집합 X 의 개수는 $3 \times 2 = 6$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 집합 X 의 개수는 $16 + 6 = 22$

12) 답 : 17

조건 (가)에 의하여 함수 f 는 일대일 대응이다.

집합 X 의 임의의 원소 x 에 대하여 $1 \leq f(x) \leq 7$

조건 (나)에서 $f(f(3)) = f(3) - 6 \geq 1$, 즉 $f(3) \geq 7$ 이므로 $f(3) = 7$

$f(f(3)) = f(7) = 7 - 6 = 1$

따라서 $f(3) = 7$, $f(7) = 1$ ㉠

$f(7) = 1$ 이므로 $f(f(2)) = f(2) - 4 \geq 2$

즉 $f(2) \geq 6$ 이고 $f(3) = 7$ 이므로 $f(2) = 6$ 에서 $f(f(2)) = f(6) = 6 - 4 = 2$

따라서 $f(2) = 6$, $f(6) = 2$ ㉡

$f(7) = 1$, $f(6) = 2$ 이므로 $f(f(1)) = f(1) - 2 \geq 3$

즉 $f(1) \geq 5$ 이고 $f(2) = 6$, $f(3) = 7$ 이므로 $f(1) = 5$

$f(f(1)) = f(5) = 5 - 2 = 3$

따라서 $f(1) = 5$, $f(5) = 3$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에 의하여 $f(4) = 4$ 이다.

따라서 $f(2) + f(3) + f(4) = 6 + 7 + 4 = 17$

13) 답 : ㉢

ㄱ. 함수 f 가 일대일 대응이므로 $f(1) \times f(2) = 6$ 에서 $f(1)$ 과 $f(2)$ 의 값은 각각 2와 3 또는 3과 2이다. 따라서 $f(3) + f(4) + f(5)$ 의 값은 10이다. (참)

ㄴ. $(f \circ f)(x) = x$ 일 때, $f(a) = b$ 이면 $(f \circ f)(a) = f(f(a)) = a$ 이므로 $f(b) = a$ 이다.

따라서 $(f \circ f)(x) = x$ 를 만족하는 함수 f 의 대응관계는 $f(a) = a$ 이거나 서로 다른 두 원소 a, b 에 대하여 $f(a) = b$ 이면서 $f(b) = a$ 이어야만 한다.

집합 X 의 원소가 다섯 개이므로 원소를 두 개씩 짝을 지어도 짝지어지지 않는 원소가 존재한다.

따라서 $(f \circ f)(x) = x$ 이면 $f(a) = a$ 인 집합 X 의 원소 a 가 존재한다. (참)

ㄷ. (반례) $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 1$, $f(4) = 5$, $f(5) = 4$ 라 하면

$(f \circ f \circ f)(1) = f(f(f(1))) = f(f(2)) = f(3) = 1$

에서 $(f \circ f \circ f)(1) = 1$ 이므로 집합 X 의 어떤 원소 x 에 대하여 $(f \circ f \circ f)(x) = x$ 이지만 $f(b) = b$ 인 집합 X 의 원소 b 는 존재하지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

14) 답 : 7

조건 (가)에서 함수 f 의 치역의 원소의 개수가 7이므로 집합 X 의 서로 다른 두 원소 a, b 에 대하여

$f(a) = f(b) = n$ 을 만족하는 집합 X 의 원소 n 은 한 개 있다. 이때 집합 X 의 원소 중 함숫값으로 사용되지 않은 원소를 m 이라 하자.

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$ 이므로 조건 (나)에서

$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) + f(7) + f(8) = 36 + n - m = 42$

$\therefore n - m = 6$

집합 X 의 원소 n, m 에 대하여 $n - m = 6$ 인 경우는 다음 두 가지이다.

(i) $n = 8$, $m = 2$ 일 때

함수 f 의 치역은 $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 이므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

(ii) $n = 7$, $m = 1$ 일 때

함수 f 의 치역은 $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 이므로 조건 (다)를 만족시킨다. 따라서 $n = 7$

15) 답 : ㉣

$f(g(x)) = f(x)$ 에서 $\{g(x)\}^2 - 2g(x) - 3 = x^2 - 2x - 3$

$\{g(x)\}^2 - x^2 - 2\{g(x) - x\} = 0$, $\{g(x) - x\}\{g(x) + x - 2\} = 0$

따라서 $g(x) = x$ 또는 $g(x) = -x + 2$ 이므로 $x^2 + 2x + a = x$

$x^2 + x + a = 0$ ㉠

$x^2 + 2x + a = -x + 2$, $x^2 + 3x + a - 2 = 0$ ㉡

㉠의 판별식을 D_1 이라 하면 $D_1 = 1 - 4a$

㉡의 판별식을 D_2 라 하면 $D_2 = 9 - 4(a - 2) = 17 - 4a$

(i) 방정식 ㉠은 서로 다른 두 실근을 갖고, 방정식 ㉡이 실근을 갖지 않는 경우

$D_1 > 0$ 에서 $a < \frac{1}{4}$

$D_2 < 0$ 에서 $a > \frac{17}{4}$

따라서 조건을 만족시키는 실수 a 의 값은 존재하지 않는다.

(ii) 두 방정식 ㉠, ㉡이 중근을 갖는 경우

$D_1 = 0$ 에서 $a = \frac{1}{4}$

$D_2 = 0$ 에서 $a = \frac{17}{4}$

따라서 조건을 만족시키는 실수 a 의 값은 존재하지 않는다.

(iii) 방정식 ㉠은 실근을 갖지 않고, 방정식 ㉡이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우

$D_1 < 0$ 에서 $a > \frac{1}{4}$

$D_2 > 0$ 에서 $a < \frac{17}{4}$

따라서 $\frac{1}{4} < a < \frac{17}{4}$ 이다.

(i), (ii), (iii)에서 정수 a 는 1, 2, 3, 4이므로 개수는 4이다.