Ⅱ. 방정식과 부등식

1) 두 복소수 $\alpha=\frac{1+i}{2i}$, $\beta=\frac{1-i}{2i}$에 대하여 $(2\alpha^2+3)(2\beta^2+3)$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$이다.)
① 6
② 10
③ 14
④ 18
⑤ 22

2) 복소수 $z=a+bi$ (a, b는 0이 아닌 실수)에 대하여 z^2-z가 실수일 때, 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $i=\sqrt{-1}$이고, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다)

ㄱ. $\overline{z^2-z}$는 실수이다.
ㄴ. $z+\overline{z}=1$
ㄷ. $z\overline{z}>\frac{1}{4}$

① ㄱ
② ㄴ
③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

3) x에 대한 이차방정식 $x^2-px+p+3=0$이 허근 a를 가질 때, a^3이 실수가 되도록 하는 모든 실수 p의 값의 곱은?
① -2
② -3
③ -4
④ -5
⑤ -6

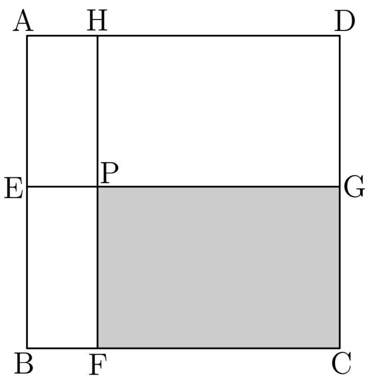
4) 0이 아닌 세 실수 a, b, c가 다음 조건을 만족시킨다.

가. $b+c<a$
나. $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\frac{b}{a}}$

세 수 a,b,c의 대소 관계로 옳은 것은?
① $a<c<b$
② $b<a<c$
③ $b<a<c$
④ $c<a<b$
⑤ $c<b<a$

5) 등식$(p+2qi)^2=-16i$를 만족시키는 두 실수 p, q는 x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 실근이다. 두 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값은? (단, $p>0$이고 $i=\sqrt{-1}$이다.)
① 16
② 18
③ 20
④ 22
⑤ 24

6) 한 변의 길이가 10인 정사각형 $ABCD$가 있다. 그림과 같이 정사각형 $ABCD$의 내부에 한 점 P를 잡고, 점 P를 지나고 정사각형의 각 변에 평행한 두 직선이 정사각형의 네 변과 만나는 점을 각각 E, F, G, H라 하자. 직사각형 $PFCG$의 둘레의 길이가 28이고 넓이가 46일 때, 두 선분 AE와 AH의 길이를 두 근으로 하는 이차방정식은? (단, 이차방정식의 이차항의 계수는 1이다.)



① $x^2-6x+4=0$
② $x^2-6x+6=0$
③ $x^2-6x+8=0$
④ $x^2-8x+6=0$
⑤ $x^2-8x+8=0$

7) 세 유리수 a, b, c에 대하여 x에 대한 이차방정식

$$ax^2+\sqrt{3}bx+c=0$$

의 한 근이 $\alpha=2+\sqrt{3}$이다. 다른 한 근을 β라 할 때, $\alpha+\dfrac{1}{\beta}$의 값은?

① -4
② $-2\sqrt{3}$
③ 0
④ $2\sqrt{3}$
⑤ 4

8) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$에서 만나고 $\alpha+\beta=20$일 때, 방정식 $f(2x-5)=0$의 모든 실근의 합을 구하시오.

9) 좌표평면에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점을 A라 하고 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 두 점을 B, C라 할 때, 세 점 A, B, C가 다음 조건을 만족시킨다.

가. 점 A는 이차함수 $y=-x^2-2x-7$의 그래프의 꼭짓점이다. 나. 삼각형 ABC의 넓이는 12이다.

$f(3)$의 값을 구하시오.

10) x에 대한 이차함수 $y=x^2-4kx+4k^2+k$의 그래프와 직선 $y=2ax+b$가 실수 k의 값에 관계없이 항상 접할 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $\frac{1}{8}$

② $\frac{3}{16}$

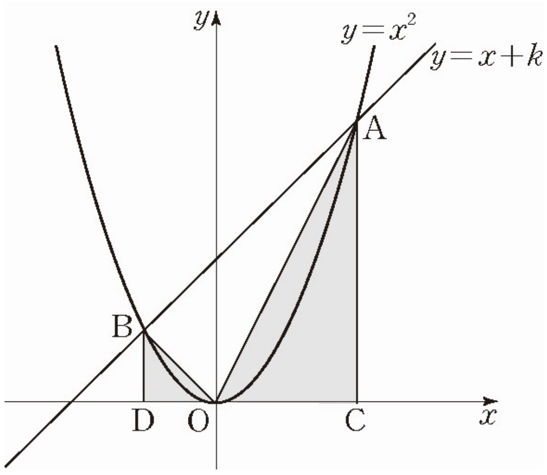
③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{5}{16}$

⑤ $\frac{3}{8}$

11) 원점을 지나고 기울기가 양수 m인 직선이 이차함수 $y=x^2-2$의 그래프와 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A', B'이라 하자. 선분 AA'과 선분 BB'의 길이의 차가 16일 때, m의 값을 구하시오.

12) 그림과 같이 이차함수 $y=x^2$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 점 A와 B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. 삼각형 AOC의 넓이를 S_1, 삼각형 DOB의 넓이를 S_2라 할 때, $S_1-S_2=20$을 만족시키는 양수 k의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, 두 점 A, B는 각각 제 1사분면과 제 2사분면 위에 있다.)



13) 이차함수 $f(x)=x^2+ax-(b-7)^2$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

가. $x=-1$에서 최솟값을 가진다.
나. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=cx$가 한 점에서만 만난다.

세 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하시오

14) 두 양수 p, q에 대하여 이차함수 $f(x)=-x^2+px-q$가 다음 조건을 만족시킬 때, p^2+q^2의 값을 구하시오.

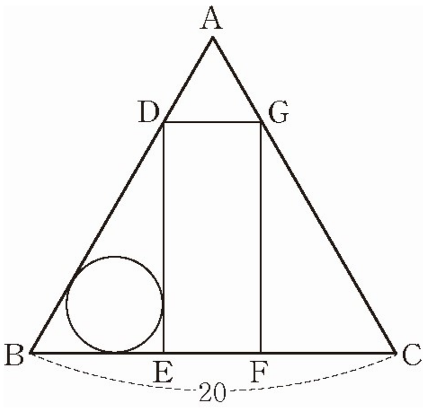
> 가. $y=f(x)$의 그래프는 x축에 접한다.
> 나. $-p \le x \le p$에서 $f(x)$의 최솟값은 -54이다.

15) 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 가. x에 대한 방정식 $f(x)=0$의 두 근은 -2와 4이다.
> 나. $5 \le x \le 8$에서 이차함수 $f(x)$의 최댓값은 80이다.

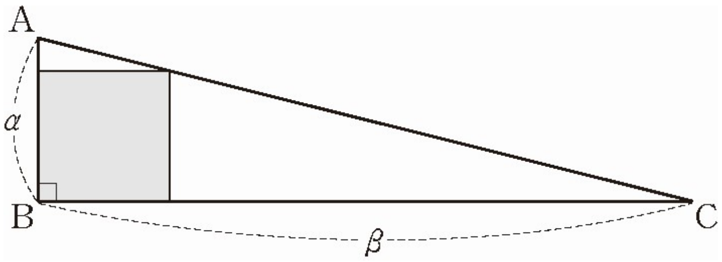
$f(-5)$의 값을 구하시오.

16) 그림과 같이 한 변의 길이가 20인 정삼각형 ABC에 대하여 변 AB 위의 점 D, 변 AC 위의 점 G, 변 BC 위의 두 점 E, F를 꼭짓점으로 하는 직사각형 $DEFG$가 있다. 직사각형 $DEFG$의 넓이가 최대일 때, 삼각형 DBE에 내접하는 원의 둘레의 길이는 $(p\sqrt{3}+q)\pi$이다. p^2+q^2의 값은? (단, p, q는 유리수이다.)



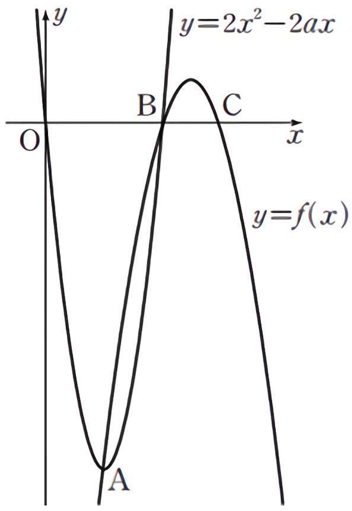
① 10
② 20
③ 30
④ 40
⑤ 50

17) 이차방정식 $x^2-4x+2=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하자. 그림과 같이 $\overline{AB}=\alpha$, $\overline{BC}=\beta$인 직각삼각형 ABC에 내접하는 정사각형의 넓이와 둘레의 길이를 두 근으로 하는 x에 대한 이차방정식이 $4x^2+mx+n=0$일 때, 두 상수 m, n에 대하여 $m+n$의 값은? (단, 정사각형의 두 변은 선분 AB와 선분 BC 위에 있다.)



① -11
② -10
③ -9
④ -8
⑤ -7

18) 양수 a에 대하여 이차함수 $y=2x^2-2ax$의 그래프의 꼭짓점을 A, x축과 만나는 두 점을 각각 O, B라 하자. 점 A를 지나고 최고차항의 계수가 -1인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 두 점을 각각 B, C라 할 때, 선분 BC의 길이는 3이다. 삼각형 ACB의 넓이를 구하시오. (단, O는 원점이다.)



19) $-2 \le x \le 5$에서 정의된 이차함수 $f(x)$가

$$f(0)=f(4),\ f(-1)+|f(4)|=0$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 최솟값이 -19일 때, $f(3)$의 값을 구하시오.

20) 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

가. $f(-4)=0$
나. 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \le f(-2)$이다.

다음에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

ㄱ. $f(0)=0$
ㄴ. $-1 \le x \le 1$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(1)$이다.
ㄷ. 실수 p에 대하여 $p \le x \le p+2$에서 함수 $f(x)$의 최솟값을 $g(p)$라 할 때, 함수 $g(p)$의 최댓값이 1이면 $f(-2)=\frac{4}{3}$이다.

① ㄱ
② ㄱ, ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1) 답 : ②

$\alpha+\beta=\frac{1+i}{2i}+\frac{1-i}{2i}=\frac{2}{2i}=\frac{1}{i}=-i$

$\alpha\beta=\frac{1+i}{2i}\times\frac{1-i}{2i}=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}$

이므로 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=0$

따라서 $(2\alpha^2+3)(2\beta^2+3)=4(\alpha\beta)^2+6(\alpha^2+\beta^2)+9$

$=4\times\frac{1}{4}+6\times0+9=10$

2) 답 : ⑤

ㄱ. z^2-z는 실수이므로 $\overline{z^2-z}$도 실수이다. (참)

ㄴ. $z=a+bi\,(b\neq0)$에 대하여

$z^2-z=a^2+2abi-b^2-a-bi=(a^2-a-b^2)+(2a-1)bi$

z^2-z가 실수이고, $b\neq0$이므로 $2a-1=0$, 즉 $a=\frac{1}{2}$

따라서 $z=\frac{1}{2}+bi$이고 $\overline{z}=\frac{1}{2}-bi$이므로 $z+\overline{z}=1$ (참)

ㄷ. $z=\frac{1}{2}+bi$이고 $\overline{z}=\frac{1}{2}-bi$이므로 $z\overline{z}=\frac{1}{4}+b^2$

$b\neq0$이므로 $z\overline{z}>\frac{1}{4}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

3) 답 : ②

복소수 α가 이차방정식 $x^2-px+p+3=0$의 한 근이면 $\overline{\alpha}$도 근이다.

$a=a+bi\,(a,b$는 실수, $b\neq0)$라 하면 $\overline{\alpha}=a-bi$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\overline{\alpha}=2a=p,\ \alpha\overline{\alpha}=a^2+b^2=p+3$

$a=\frac{p}{2},\ b^2=-a^2+p+3=-\frac{p^2}{4}+p+3\cdots\cdots$ ㉠

$a^3=(a+bi)^3$을 전개한 후 허수부분이 0임을 이용하여 p의 값의 곱을 구한다.

$a^3=(a+bi)^3=a^3+3a^2bi-3ab^2-b^3i=(a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)i$

a^3이 실수이므로 허수부분인 $3a^2b-b^3=0$이다.

$b\neq0$이므로 $b^2=3a^2\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$-\frac{p^2}{4}+p+3=3\left(\frac{p}{2}\right)^2$에서 $-p^2+4p+12=3p^2$

$4p^2-4p-12=0$, $p^2-p-3=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 p의 값의 곱은 -3이다.

4) 답 : ④

조건 ㈏에서 $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\frac{b}{a}}$이므로 $a<0,b>0$

즉, $a<b\cdots\cdots$㉠

조건 ㈎에서 $b+c<a$이고 $b>0$이므로 $c<b+c<a\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $c<a<b$

5) 답 : ②

$(p+2qi)^2=-16i$의 좌변을 전개하면 $p^2-4q^2+4pqi=-16i$

$p^2-4q^2,4pq$가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$p^2-4q^2=0,4pq=-16$

그러므로 $p=\pm2q,pq=-4$

(ⅰ) $p=2q$일 때, $pq=-4$에서 $q^2=-2$

그런데 $q^2=-2$인 실수 q는 존재하지 않는다.

(ⅱ) $p=-2q$일 때,

$pq=-4$에서 $q^2=2$이므로 $q=\sqrt{2}$ 또는 $q=-\sqrt{2}$

$p>0$이므로 $p=2\sqrt{2},q=-\sqrt{2}$

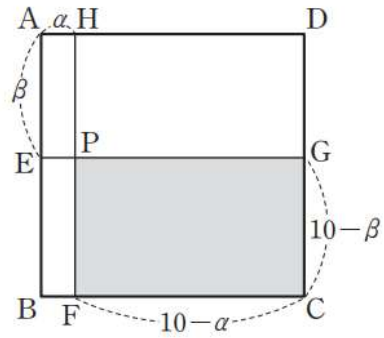
(ⅰ), (ⅱ)에서$p=2\sqrt{2},q=-\sqrt{2}$

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 실근이 p,q이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $2\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=-a,2\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})=b$

즉, $a=-\sqrt{2},b=-4$

따라서 $a^2+b^2=(-\sqrt{2})^2+(-4)^2=18$

6) 답 : ②



$\overline{AH}=\alpha,\overline{AE}=\beta$라 하면 $\overline{PG}=10-\alpha,\overline{PF}=10-\beta$

이때 직사각형 PFCG의 둘레의 길이가 28이므로

$2(10-\alpha)+2(10-\beta)=28$에서 $\alpha+\beta=6$

또, 직사각형 PFCG의 넓이는 46이므로

$(10-\alpha)(10-\beta)=46$에서 $100-10(\alpha+\beta)+\alpha\beta=46$

$100-10\times6+\alpha\beta=46$, $\alpha\beta=6$

따라서 α,β를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-6x+6=0$

7) 답 : ③

$t=\sqrt{3}x$라 하면 주어진 방정식은

$\frac{a}{3}t^2+bt+c=0$, 즉 $at^2+3bt+3c=0$

이 방정식은 한 근이 $t=\sqrt{3}(2+\sqrt{3})=3+2\sqrt{3}$이고 계수가 모두 유리수이므로 다른 한 근은 $t=3-2\sqrt{3}$이다.

따라서 $\beta=\frac{t}{\sqrt{3}}=\frac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=-2+\sqrt{3}$이므로

$\alpha+\frac{1}{\beta}=2+\sqrt{3}+\frac{1}{-2+\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}-(2+\sqrt{3})=0$

8) 답 : 15

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점 $(\alpha,0),(\beta,0)$에서 만나므로 $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)(a$는 상수, $a\neq0)$로 놓을 수 있다. 이차방정식 $f(x)=0$에 x 대신 $2x-5$를 대입하면

$f(2x-5)=0$

$a(2x-5-\alpha)(2x-5-\beta)=0$

$4a\left(x-\frac{5+\alpha}{2}\right)\left(x-\frac{5+\beta}{2}\right)=0$

$x=\frac{\alpha+5}{2}$ 또는 $x=\frac{\beta+5}{2}$

이때 $\alpha+\beta=20$ 이므로 $f(2x-5)=0$의 모든 실근의 합은

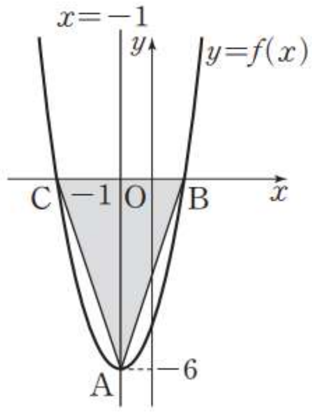
$\frac{\alpha+5}{2}+\frac{\beta+5}{2}=\frac{\alpha+\beta+10}{2}=\frac{20+10}{2}=15$

9) 답 : 18

$y=-x^2-2x-7=-(x+1)^2-6$

이므로 이차함수 $y=-x^2-2x-7$의 그래프의 꼭짓점 A의 좌표는 (-1, -6)이다.

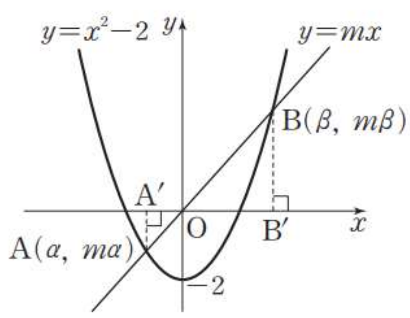
즉, $f(x)=a(x+1)^2-6(a$는 상수, $a\neq0)$으로 놓을 수 있다.



이때 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점에서 만나려면 $y=f(x)$ $a>0$이어야 한다.
조건 ㈏에서 삼각형 ABC의 넓이가 12이고 꼭짓점의 y좌표가 -6이므로 $\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times 6=12$에서 $\overline{BC}=4$
이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=-1$에 대하여 대칭이므로 B(1, 0), C(-3, 0) 또는 B(-3, 0), C(1, 0)
함수 $f(x)=a(x+1)^2-6$의 그래프가 점 (1, 0)을 지나므로
$0=a(1+1)^2-6, a=\frac{3}{2}$
따라서 $f(x)=\frac{3}{2}(x+1)^2-6$이므로 $f(3)=24-6=18$

10) 답 : ②
x에 대한 이차함수 $y=x^2-4kx+4k^2+k$의 그래프와 직선 $y=2ax+b$가 접하려면 이차방정식 $x^2-4kx+4k^2+k=2ax+b$,
즉 $x^2-2(2k+a)x+4k^2+k-b=0$이 중근을 가져야 한다.
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=\{-(2k+a)\}^2-(4k^2+k-b)=0$
$(4a-1)k+a^2+b=0$ …… ㉠
㉠이 실수 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로 $4a-1=0, a^2+b=0$
따라서 $a=\frac{1}{4}, b=-\frac{1}{16}$이므로 $a+b=\frac{3}{16}$

11) 답 : 4



그림과 같이 두 점 A', B'의 x좌표를 각각 $\alpha, \beta(\alpha<0<\beta)$라 하면 α, β가 이차방정식 $x^2-2=mx$, 즉 $x^2-mx-2=0$의 두 근이므로
근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=m$
$\overline{AA'}=-m\alpha, \overline{BB'}=m\beta$이고 선분 AA'과 선분 BB'의 길이의 차가 16이므로 $|\overline{AA'}-\overline{BB'}|=|-m\alpha-m\beta|=|m(\alpha+\beta)|=m^2=16$
$m>0$이므로 $m=4$

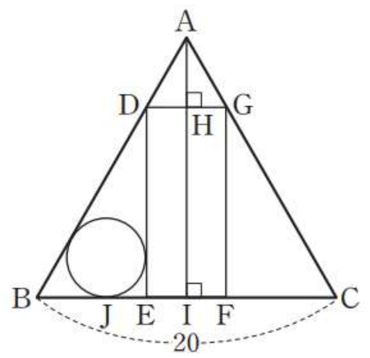
12) 답 : 13
두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하면 α, β는 이차방정식 $x^2-x-k=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=1, \alpha\beta=-k$ …… ㉠
두 점 A, B는 곡선 $y=x^2$위의 점이므로 $A(\alpha, \alpha^2), B(\beta, \beta^2)$
두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발이 각각 C, D이므로 $C(\alpha, 0), D(\beta, 0)$
$\alpha>0$ 이므로 삼각형 AOC의 넓이 S_1은 $S_1=\frac{1}{2}\times\alpha\times\alpha^2=\frac{1}{2}\alpha^3$
$\beta<0$이므로 삼각형 DOB의 넓이 S_2는 $S_2=\frac{1}{2}\times(-\beta)\times\beta^2=-\frac{1}{2}\beta^3$
이때 $S_1-S_2=20$이므로 $\frac{1}{2}(\alpha^3+\beta^3)=20$
$(a^3+b^3)=40$ …… ㉡
$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$에서 ㉠, ㉡에 의하여
$40=1^3-3\times(-k)\times 1$
따라서 $k=13$

13) 답 : 11
$f(x)=x^2+ax-(b-7)^2=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}-(b-7)^2$
이고, 조건 ㈎에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최솟값을 가지므로
$-\frac{a}{2}=-1$에서 $a=2$
조건 ㈏에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=cx$가 한 점에서 만나므로 x에 대한 방정식 $x^2+ax-(b-7)^2-cx=0$, 즉 $x^2+(a-c)x-(b-7)^2=0$이 중근을 갖는다.
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D=(a-c)^2+4(b-7)^2=0$
이때 $(a-c)^2\geq 0, 4(b-7)^2\geq 0$이므로 $(a-c)^2=0, 4(b-7)^2=0$
따라서 $a=c=2, b=7$이므로 $a+b+c=11$

14) 답 : 60
$f(x)=-x^2+px-q=-\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+\frac{p^2}{4}-q$
조건 ㈎에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축에 접하므로
$\frac{p^2}{4}-q=0, q=\frac{p^2}{4}$ …… ㉠
따라서 $f(x)=-\left(x-\frac{p}{2}\right)^2$이고, 조건 ㈏에 의하여 $-p\leq x\leq p$에서 $f(x)$의 최솟값은 $f(-p)=-54$
즉, $-\frac{9p^2}{4}=-54$이므로 $p^2=24$
㉠에서 $q=\frac{24}{4}=6$ 그러므로 $p^2+q^2=24+6^2=60$

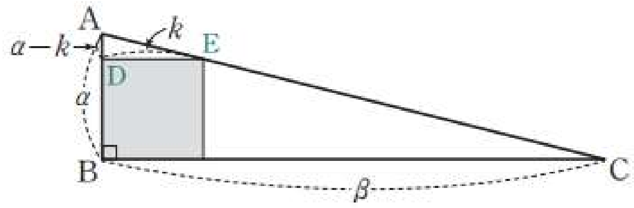
15) 답 : 54
조건 ㈎에서 x에 대한 방정식 $f(x)=0$의 두 근이 -2, 4이므로
$f(x)=a(x+2)(x-4)$(a는 상수, $a\neq 0$)라 하면
$f(x)=a(x^2-2x-8)=a(x-1)^2-9a$
조건 ㈏에서
(ⅰ) $a>0$일 때,
이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하고 꼭짓점의 x좌표 1이 $5\leq x\leq 8$에 속하지 않으므로 이차함수 $f(x)$는 $x=8$에서 최댓값 80을 갖는다. 즉, $f(8)=80$이므로 $40a=80, a=2$
(ⅱ) $a<0$일 때,
이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하고 꼭짓점의 x좌표 1이 $5\leq x\leq 8$에 속하지 않으므로 이차함수 $f(x)$는 $x=5$에서 최댓값 80을 갖는다. 즉, $f(5)=80$이므로 $7a=80, a=\frac{80}{7}$
그런데 $a<0$이므로 이를 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.
(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=2$
따라서 $f(x)=2(x+2)(x-4)$이므로 $f(-5)=2\times(-3)\times(-9)=54$

16) 답 : ⑤



오른쪽 그림과 같이 점 A에서 선분 DG, 선분 BC에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하고, 원과 선분 BC와의 교점을 J라 하자.
$\overline{DH}=a\,(0<a<10)$라 하면 $\overline{AH}=\sqrt{3}\,a$, $\overline{DE}=10\sqrt{3}-\sqrt{3}\,a$
직사각형 DEFG의 넓이를 S라 하면
$S=2a(10\sqrt{3}-\sqrt{3}\,a)=-2\sqrt{3}\,a^2+20\sqrt{3}\,a$
$=-2\sqrt{3}\,(a-5)^2+50\sqrt{3}$
이므로 $=a=5$일 때, 직사각형 DEFG의 넓이는 최대이다.
원의 반지름의 길이를 b라 하면 $\overline{EI}=a$, $\overline{JE}=b$, $\overline{BJ}=\sqrt{3}\,b$이므로
$a+(1+\sqrt{3})b=10$
$a=5$일 때, $b=\dfrac{(5\sqrt{3}-1)}{2}$이므로 원의 둘레의 길이는
$2\pi\times\dfrac{5(\sqrt{3}-1)}{2}=5(\sqrt{3}-1)\pi$
따라서 $p=5, q=-5$이므로 $p^2+q^2=25+25=50$

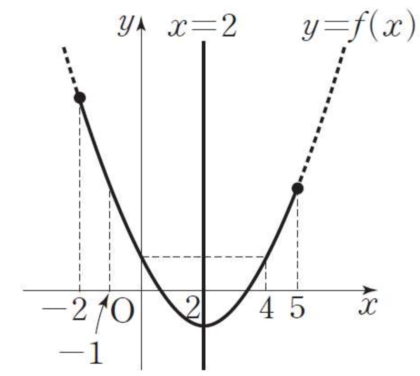
17) 답 : ⑤
근과 계수의 관계를 이용하여 두 근 α,β의 합과 곱을 구한다.
이차방정식 $x^2-4x+2=0$의 두 실근이 α,β이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=2$
정사각형의 한 변의 길이를 구한다.



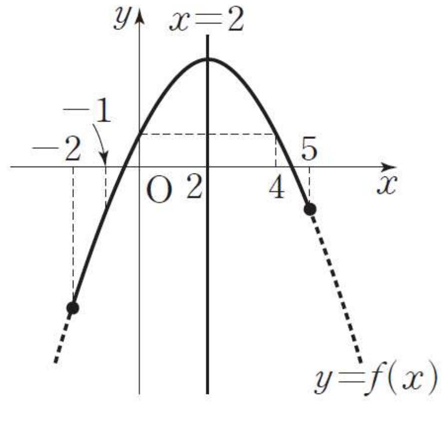
직각삼각형에 내접하는 정사각형의 한 변의 길이를 k라 하면
$\alpha:\beta=(\alpha-k):k$, $\alpha k=\beta(\alpha-k)$, $\alpha k=\alpha\beta-\beta k$
$k=\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$
정사각형의 넓이와 둘레의 길이를 두 근으로 하는 x에 대한 이차방정식을 구한다.
따라서 직각삼각형 ABC에 내접하는 정사각형의 넓이와 둘레의 길이는 각각 $k^2=\dfrac{1}{4}$, $4k=2$이므로
x^2의 계수가 4이고 $\dfrac{1}{4}$, 2를 두 근으로 하는 이차방정식은
$4\left(x-\dfrac{1}{4}\right)(x-2)=0$, 즉 $4x^2-9x+2=0$
즉, $m=-9, n=2$이므로 $m+n=-7$

18) 답 : 27
세 점 A, B, C의 좌표를 구한 후 이차함수 $f(x)$를 a를 이용하여 나타낸다.
$y=2x^2-2ax=2(x^2-ax)=2\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{2}$
이므로 이차함수 $y=2x^2-2ax$의 그래프의 꼭짓점 A의 좌표는 $\left(\dfrac{a}{2},-\dfrac{a^2}{2}\right)$이다.
또, 이차함수 $y=2x^2-2ax$의 그래프가 x축과 만나는 점 B의 x좌표는 $2x^2-2ax=0$에서 $2x(x-a)=0$이므로 $x=a$
즉, 점 B의 좌표는 $(a,\ 0)$이다.
이때 $\overline{BC}=3$이므로 점 C의 좌표는 $(a+3,\ 0)$이다.
x^2의 계수가 -1이고 x축과 두 점 $B(a,0)$, $C(a+3,0)$에서 만나는 이차함수 $y=f(x)$의 식은 $f(x)=-(x-a)(x-a-3)$
a의 값을 구하고 삼각형 ACB의 넓이를 구한다.
함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $A\left(\dfrac{a}{2},-\dfrac{a^2}{2}\right)$을 지나므로
$-\dfrac{a^2}{2}=-\left(-\dfrac{a}{2}\right)\left(-\dfrac{a}{2}-3\right)$, $a^2-6a=0, a(a-6)=0$
$a>0$이므로 $a=6$
따라서 삼각형 ACB의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times3\times18=27$

19) 답 : 11
함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식을 구한다.
$f(0)=f(4)$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축은 직선 $x=2$이다.
a의 부호에 따라 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그린 후 주어진 조건을 만족시키는 함수 $y=f(x)$를 구한다.
$f(x)=a(x-2)^2+b$ (a,b는 상수, $a\neq0$)라 하자.
이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축은 직선 $x=2$이므로
$f(-1)\neq f(4)$
따라서 $f(-1)+|f(4)|=0$에서 f(-1)=f(4)=0이 성립하지 않으므로
$f(-1)=-|f(4)|<0$이고 $|f(-1)|=|f(4)|\cdots\cdots$ ㉠
이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 a의 부호에 따라 다음 두 가지 경우로 나눌 수 있다.
(ⅰ) a>0인 경우
$f(4)<f(-1)<0$이 되어 ㉠을 만족시키지 않는다.



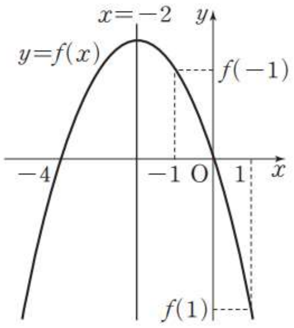
(ⅱ) a<0인 경우
㉠에서 $f(-1)<0$이므로 $f(4)>0$



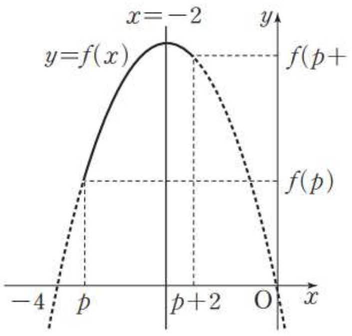
그러므로 $f(-1)+|f(4)|=0$에서 $f(-1)+f(4)=0$
즉, $13a+2b=0\cdots\cdots$㉡
$-2\le x\le5$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 -19이므로 $f(-2)=-19$
즉, $16a+b=-19\cdots\cdots$㉢
㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-2, b=13$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $f(x)=-2(x-2)^2+13$이므로
$f(3)=-2\times1^2+13=11$

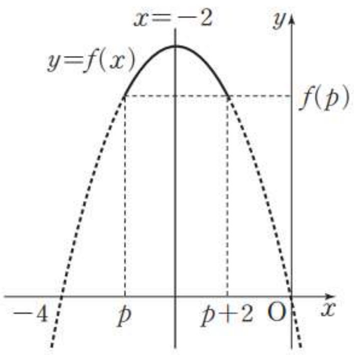
20) 답 : ⑤
조건 ㈎, ㈏에 의하여 함수 $f(x)=ax(x+4)(a<0)$라 할 수 있고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



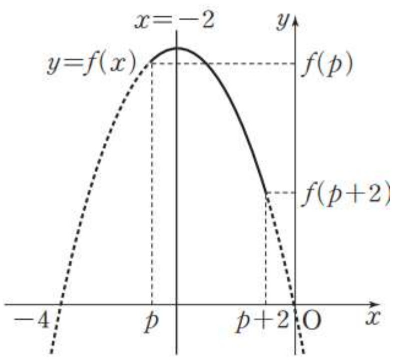
ㄱ. 함수 $f(x)$의 그래프의 축이 직선 $x-2$이므로 $f(0)=0$ (참)
ㄴ. 위의 그림과 같이 $-1\le x\le1$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(1)$이다. (참)
ㄷ. 함수 $f(x)$에서
(ⅰ)$p<-3$일 때,



$f(p)<f(p+2)$이므로 $g(p)=f(p)$
(ⅱ) $p=-3$일 때,



$f(p)=f(p+2)$이므로 $g(p)=f(p)$
(ⅲ) $p>-3$일 때,



$f(p)>f(p+2)$이므로 $g(p)=f(p+2)$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 함수 $g(p)$는 다음과 같다.
$g(p)=\begin{cases} f(p) & (p\le-3) \\ f(p+2) & (p>-3) \end{cases}$
$p\le-3$인 모든 p에 대하여 $g(p)\le f(-3)$이고
p>-3인 모든 p에 대하여 $g(p)<f(-3)$이므로
$g(p)$의 최댓값은 $f(-3)$이다.

$f(-3)=1$에서 $a=-\dfrac{1}{3}$이므로
$f(-2)=-\dfrac{1}{3}\times(-2)\times(-2+4)=\dfrac{4}{3}$(참)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.