<전국연합학력평가 기출 6회>

1. 답 ③ **정답률 95%**

[출제의도] 복소수 계산하기

$z_1 z_2 = (2-3i)(2+3i) = 2^2 - (3i)^2 = 4+9$

따라서 $z_1 z_2 = 13$

2. 답 27 **정답률 58%**

[출제의도] 이차방정식 이해하기

α는 이차방정식 $x^2+5x-2=0$의 한 근이므로

$\alpha^2+5\alpha-2=0$에서

$$\alpha^2 = -5\alpha+2$$

이다.

근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta = -5$이므로

$$\alpha^2-5\beta = (-5\alpha+2)-5\beta = -5(\alpha+\beta)+2 = 27$$

이다.

3. 답 ① **정답률 70%**

[출제의도] 나머지정리와 이차방정식의 근과 계수의 관계 이해하기

(가)에서 $f(1) = 1+p+q = 1$

$p+q = 0 \cdots\cdots$ ㉠

(나)에서 $a-i$도 이차방정식의 근이므로

근과 계수의 관계에 의해

$p = -2a,\ q = a^2+1 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $p+q = -2a+a^2+1 = 0$

$a=1,\ p=-2,\ q=2$

따라서 $p+2q = 2$

4. 답 15 **정답률 62%**

[출제의도] 이차방정식의 근과 계수와의 관계를 이용하여 수학내적문제 해결하기

$3x^2-12x-k=0$의 두 실근을 α, β라 하면,

$\alpha+\beta = 4,\ \alpha\beta = -\dfrac{k}{3},\ |\alpha|+|\beta| = 6$이므로

$(|\alpha|+|\beta|)^2 = \alpha^2+2|\alpha\beta|+\beta^2$

$= (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2|\alpha\beta|$

$= 16+\dfrac{2k}{3}+\dfrac{2|k|}{3}$

따라서 $k+|k| = 30$이다.

$k \le 0$이면 성립하지 않으므로 $k>0$이다.

$\therefore\ k = 15$

5. 답 ⑤ **정답률 50%**

[출제의도] 복소수의 성질 추론하기

$z = a+bi$에 대하여 $iz = i(a+bi) = -b+ai$, $\overline{z} = a-bi$인데

$iz = \overline{z}$이므로 $a=-b$이다. 따라서 $z = a-ai$이다.

ㄱ. $z+\overline{z} = (a-ai)+(a+ai) = 2a = -2b$이다. (참)

ㄴ. $iz = \overline{z}$의 양변에 i를 곱하면 $i\overline{z} = -z$이다. (참)

ㄷ. $iz = \overline{z}$이므로 $\dfrac{\overline{z}}{z} = i$이고 $i\overline{z} = -z$이므로 $\dfrac{z}{\overline{z}} = -i$ 이다. 따라서 $\dfrac{\overline{z}}{z}+\dfrac{z}{\overline{z}} = 0$이다. (참)

그러므로 ㄱ, ㄴ, ㄷ이 모두 옳다.

[다른 풀이 1]

ㄴ. $i\overline{z} = i(a+ai) = ai-a = -(a-ai) = -z$

ㄷ. $\dfrac{\overline{z}}{z}+\dfrac{z}{\overline{z}} = \dfrac{a+ai}{a-ai}+\dfrac{a-ai}{a+ai} = \dfrac{(a+ai)^2+(a-ai)^2}{(a-ai)(a+ai)} = 0$

[다른 풀이 2]

ㄷ. $iz = \overline{z}$의 양변을 제곱하면 $z^2+(\overline{z})^2 = 0$이고 $z\overline{z} = 2a^2 \ne 0$이므로

$\dfrac{\overline{z}}{z}+\dfrac{z}{\overline{z}} = \dfrac{z^2+(\overline{z})^2}{z\overline{z}} = 0$이다.

6. 답 25 **정답률 42%**

[출제의도] 복소수의 성질 이해하기

자연수 k에 대하여

$$i^n = \begin{cases} i & (n=4k-3 \text{ 일 때}) \\ -1 & (n=4k-2 \text{ 일 때}) \\ -i & (n=4k-1 \text{ 일 때}) \\ 1 & (n=4k \text{ 일 때}) \end{cases}$$

이므로

$\dfrac{1}{i}-\dfrac{1}{i^2}+\dfrac{1}{i^3}-\dfrac{1}{i^4}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n+1}}{i^n}$

$= -i+1+i-1+\cdots+\dfrac{(-1)^{n+1}}{i^n}$

$$= \begin{cases} -i & (n=4k-3 \text{ 일 때}) \\ 1-i & (n=4k-2 \text{ 일 때}) \\ 1 & (n=4k-1 \text{ 일 때}) \\ 0 & (n=4k \text{ 일 때}) \end{cases}$$

따라서 주어진 등식을 만족하는 n의 값은 자연수 k에 대하여 $n=4k-2$일 때 이다.

$0 < 4k-2 \le 100$

$\dfrac{2}{4} < k \le \dfrac{102}{4}$ 이므로 식을 만족하는 자연수 k는 $1, 2, 3, \cdots, 25$ 이다.

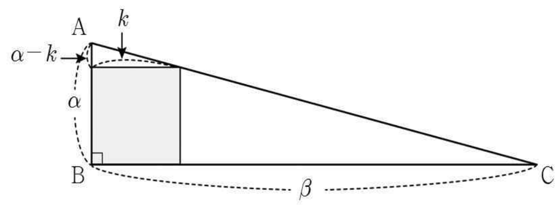
$\therefore$ 25개

7. 답 ⑤ **정답률 46%**

[출제의도] 근과 계수의 관계를 이용하여 이차방정식 문제 해결하기

근과 계수의 관계에 따라 $\alpha+\beta = 4,\ \alpha\beta = 2$이다.

직각삼각형에 내접하는 정사각형의 한 변의 길이를 k라 하면



$\alpha : \beta = \alpha-k : k$

$k = \dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} = \dfrac{1}{2}$

이다. 따라서 정사각형의 넓이 $k^2 = \dfrac{1}{4}$과 둘레의 길이 $4k = 2$를 두 근으로 하는 이차방정식은 $4(x-2)\left(x-\dfrac{1}{4}\right) = 4x^2-9x+2 = 0$

이다. 따라서 $m+n = -9+2 = -7$이다.

[다른 풀이]

정사각형의 넓이 $k^2 = \dfrac{1}{4}$과 둘레의 길이 $4k = 2$를 두 근으로 하는 이차방정식은 근과 계수의 관계에 의해 두 근의 합이 $\dfrac{9}{4}$이고 곱이 $\dfrac{1}{2}$이므로

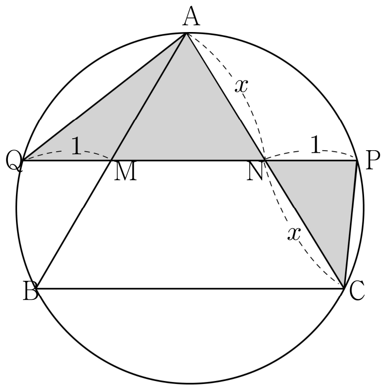
$$x^2-\frac{9}{4}x+\frac{1}{2} = 0$$

$$4x^2-9x+2 = 0$$

따라서 $m+n = -9+2 = -7$이다.

8. 답 30 **정답률 17%**

[출제의도] 이차방정식을 이용하여 다항식의 연산 문제 해결하기



그림과 같이 반직선 NM이 삼각형 ABC의 외접원과 만나는 점을 Q라 하자. 삼각형 AQN과 삼각형 PCN이 닮음이므로

$1+x : x = x : 1$

이다. 따라서

$1+x=x^2$

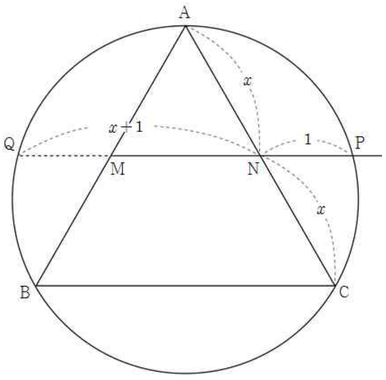
$x^2-x-1=0$

이므로 $x-1-\frac{1}{x}=0$에서 $x-\frac{1}{x}=1$이다.

그러므로 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=3$이다.

따라서 $10\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=30$이다.

[다른 풀이]



원의 성질에 의해 $\overline{\mathrm{NA}}\times\overline{\mathrm{NC}}=\overline{\mathrm{NP}}\times\overline{\mathrm{NQ}}$에서

$x\times x=1\times(x+1)$

이다. 따라서

$x^2=x+1$

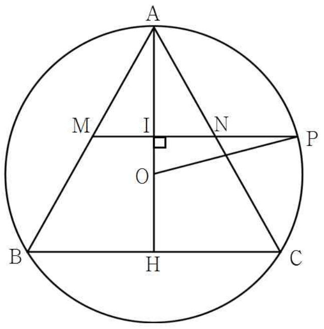
$x^2-x-1=0$

이므로 $x-1-\frac{1}{x}=0$에서 $x-\frac{1}{x}=1$이다.

그러므로 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=3$이다.

따라서 $10\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=30$이다.

[다른 풀이]



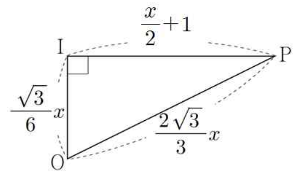
그림과 같이 삼각형 ABC의 외심을 O, 선분 MN의 중점을 I라 하면 $\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{3}\,x$이므로

$\overline{\mathrm{IO}}=\frac{1}{6}\overline{\mathrm{AH}}=\frac{\sqrt{3}}{6}x$

$\overline{\mathrm{IP}}=\overline{\in}+\overline{\mathrm{NP}}=\frac{x}{2}+1$

$\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OA}}=\frac{2}{3}\overline{\mathrm{AH}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}x$

이다.



그림과 같이 삼각형 POI에서 피타고라스의 정리에 의해

$\left(\frac{\sqrt{3}}{6}x\right)^2+\left(\frac{x}{2}+1\right)^2=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}x\right)^2$

이고 식을 정리하면

$x^2-x-1=0$

이므로 $x-1-\frac{1}{x}=0$에서 $x-\frac{1}{x}=1$이다.

그러므로 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=3$이다.

따라서 $10\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=30$이다.

<전국연합학력평가 기출 7회>

1. 답 ④ 정답률 91%

[출제의도] 서로 같은 복소수의 성질 이해하기

$2x(3+i)=6x+2xi=3y+4i$에서

$x=2,\ y=4$

따라서 $x+y=6$

2. 답 ④ 정답률 77%

[출제의도] 이차방정식의 근의 판별 이해하기

이차방정식 $x^2+4x+k-3=0$이 실근을 가지려면

판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=4-(k-3)\geq 0$ 즉, $k\leq 7$

따라서 자연수 k의 개수는 7

3. 답 24 정답률 66%

[출제의도] 이차방정식의 해를 이용하여 문제 해결하기

이차방정식 $x^2+4x-3=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2+4\alpha-3=0$

$\beta^2+4\beta-3=0$

이 성립한다. 따라서

$\alpha^2+4\alpha-4=-1$

$\beta^2+4\beta-4=-1$

이므로

$$\frac{6\beta}{\alpha^2+4\alpha-4}+\frac{6\alpha}{\beta^2+4\beta-4}=-6(\beta+\alpha)$$

이다. 근과 계수의 관계에 따라 $\alpha+\beta=-4$이므로

$$\frac{6\beta}{\alpha^2+4\alpha-4}+\frac{6\alpha}{\beta^2+4\beta-4}=-6(\alpha+\beta)=24$$

이다.

4. 답 12 정답률 70%

[출제의도] 복소수의 성질을 이용하여 문제 해결하기

$\overline{z}=\frac{z^2}{4i}$에서 $4i\overline{z}=z^2$이다.

$z=a+2i$이면 $\overline{z}=a-2i$이므로

$4i\overline{z} = z^2$에 대입하면

$4i(a-2i) = (a+2i)^2$, $4ai + 8 = a^2 + 4ai - 4$이다.

따라서 $a^2 - 12 = 0$이므로 $a^2 = 12$이다.

5. 답 ③ **정답률 47%**

[출제의도] 실수의 성질을 이용하여 이차방정식 문제해결하기

$2+\sqrt{3}$은 방정식 $ax^2 + \sqrt{3}bx + c = 0$의 한 근이므로

$a(2+\sqrt{3})^2 + \sqrt{3}b(2+\sqrt{3}) + c = 0$이다.

정리하면 $(7a+3b+c) + (4a+2b)\sqrt{3} = 0$이고

a, b, c가 유리수이므로

$7a+3b+c=0$, $4a+2b=0$이다. 따라서

$b = -2a$, $c = -a$

이다.

그러므로 주어진 방정식은

$a(x^2 - 2\sqrt{3}x - 1) = 0$이고

이 이차방정식의 두 근은 $x = \sqrt{3} \pm 2$이다.

따라서 $\beta = -2+\sqrt{3}$이므로

$a + \frac{1}{\beta} = 2 + \sqrt{3} + \frac{1}{-2+\sqrt{3}} = 0$이다.

[다른 풀이1]

$t = \sqrt{3}x$라 두면 주어진 방정식은

$\frac{a}{3}t^2 + bt + c = 0$ 즉, $at^2 + 3bt + 3c = 0$이다.

이 방정식은 한 근이 $t = \sqrt{3}(2+\sqrt{3})$

$= 3 + 2\sqrt{3}$

이고 계수가 모두 유리수이므로 다른 한 근은

$t = 3 - 2\sqrt{3}$이다.

따라서 주어진 방정식의 다른 한 근

$\beta = \frac{t}{\sqrt{3}} = \frac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -2+\sqrt{3}$이므로

$a + \frac{1}{\beta} = 2 + \sqrt{3} + \frac{1}{-2+\sqrt{3}} = 0$이다.

[다른 풀이2]

$\alpha = 2+\sqrt{3}$에서 $\alpha - \sqrt{3} = 2$이고 양변을 제곱하여 정리하면

$\alpha^2 - 2\sqrt{3}\alpha - 1 = 0$이다.

따라서 α는 이차방정식 $a(x^2 - 2\sqrt{3}x - 1) = 0$의 근이다.

근과 계수의 관계에 의해 $2+\sqrt{3}+\beta = 2\sqrt{3}$이므로 $\beta = -2+\sqrt{3}$이다.

따라서 $a + \frac{1}{\beta} = 2 + \sqrt{3} + \frac{1}{-2+\sqrt{3}} = 0$이다.

〈참고〉 아래와 같은 방법으로 풀 수도 있다.

두 유리수 p, q에 대하여

$\overline{p+q\sqrt{3}} = p - q\sqrt{3}$이라 하자.

$f(x) = ax^2 + \sqrt{3}bx + c$이라 하고

$\alpha = 2+\sqrt{3}$이라 하면 $f(\alpha) = 0$이다.

즉, $a\alpha^2 + \sqrt{3}b\alpha + c = 0$이다.

$\overline{a\alpha^2 + \sqrt{3}b\alpha + c} = \overline{0}$

$\overline{a\alpha^2} + \overline{\sqrt{3}b\alpha} + \overline{c} = \overline{0}$

$\overline{a}\,\overline{\alpha}^2 + \overline{\sqrt{3}}\,\overline{b}\,\overline{\alpha} + \overline{c} = \overline{0}$

$a\overline{\alpha}^2 - \sqrt{3}b\overline{\alpha} + c = 0$

$a(-\overline{\alpha})^2 + \sqrt{3}b(-\overline{\alpha}) + c = 0$

이므로 $f(-\overline{\alpha}) = 0$이다.

따라서 $-\overline{\alpha} = -(2-\sqrt{3})$

$= -2+\sqrt{3}$

은 이 방정식의 다른 한 근이다.

따라서 $\beta = \sqrt{3} - 2$이므로

$a + \frac{1}{\beta} = 2 + \sqrt{3} + \frac{1}{-2+\sqrt{3}} = 0$이다.

6. 답 ② **정답률 38%**

[출제의도] 이차방정식의 근의 성질과 복소수의 성질을 이용하여 문제해결하기

복소수 α가 이차방정식 $x^2 - px + p + 3 = 0$의 한 근이면 $\overline{\alpha}$도 근이므로

$\alpha = a + bi$라 하면, $\overline{\alpha} = a - bi$ (a, b는 실수, $b \neq 0$)이고,

근과 계수의 관계에 의해

$\alpha + \overline{\alpha} = 2a = p$, $\alpha\overline{\alpha} = a^2 + b^2 = p + 3$이므로

$a = \frac{p}{2}$, $b^2 = -a^2 + p + 3 = -\frac{p^2}{4} + p + 3$ …… ㉠

$\alpha^3 = (a+bi)^3$

$= a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i$

$= (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i$

α^3이 실수이므로 허수부분인 $3a^2b - b^3 = 0$이다.

$b \neq 0$이므로 $b^2 = 3a^2$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$-\frac{p^2}{4} + p + 3 = 3\left(\frac{p}{2}\right)^2$을 정리하면

$p^2 - p - 3 = 0$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의해 모든 실수 p의 곱은 -3이다.

[다른풀이1]

이차방정식 $x^2 - px + p + 3 = 0$이 허근을 가지므로

판별식을 D라 하면 $D = p^2 - 4(p+3) < 0$이므로

$-2 < p < 6$이다.

이차방정식 $x^2 - px + p + 3 = 0$의 한 허근이 α이므로

$\alpha^2 - p\alpha + p + 3 = 0$이 성립한다.

즉, $\alpha^2 = p\alpha - p - 3$이다.

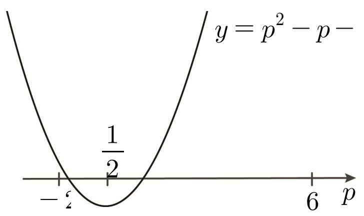
$\alpha^3 = \alpha^2 \times \alpha = p\alpha^2 - (p+3)\alpha$

$= p(p\alpha - p - 3) - (p+3)\alpha$

$= (p^2 - p - 3)\alpha - p(p+3)$이므로

α^3은 실수, $p(p+3)$은 실수, α는 허수이므로

$p^2 - p - 3 = 0$이다.



$f(p) = p^2 - p - 3$이라 하면

$f(p) = \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}$이다.

ⅰ) 축 $p = \frac{1}{2}$은 -2와 6 사이에 존재하고

ⅱ) $f(-2) > 0$, $f(6) > 0$

ⅲ) $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$이므로 실근이 존재한다.

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의해 $p^2 - p - 3 = 0$의 두 실근은 -2와 6사이에 존재한다.

따라서 α^3이 실수가 되는 모든 실수 p의 값의 곱은 -3이다.

[다른풀이2]

이차방정식 $x^2 - px + p + 3 = 0$이 허근을 가지므로

판별식을 D라 하면 $D = p^2 - 4(p+3) < 0$이므로 $-2 < p < 6$이다.

이차방정식 $x^2 - px + p + 3 = 0$의 한 허근이 α이므로

$\alpha^2 - p\alpha + p + 3 = 0$이고, $\alpha^2 - p\alpha + p^2 = p^2 - p - 3$이다.

식의 양변에 $\alpha + p$를 각각 곱하면

$\alpha^3 + p^3 = (\alpha + p)(p^2 - p - 3)$이므로

$\alpha^3 = (p^2 - p - 3)\alpha - p(p+3)$이다.

α^3이 실수이므로 $p^2 - p - 3 = 0$이다.

7. 답 27 **정답률 24%**

[출제의도] 복소수의 성질을 이해하고, 주어진 식의 최댓값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\alpha = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ 에서 $\alpha^2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^2 = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2} = \beta$ ⋯ ㉠

$\alpha^3 = \left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^3 = i$ ⋯ ㉡

$\alpha^{12} = (\alpha^3)^4 = i^4 = 1$ ⋯ ㉢

㉠에서 $\alpha^m \beta^n = \alpha^m (\alpha^2)^n = \alpha^{m+2n}$

㉡에서 $\alpha^m \beta^n = \alpha^{m+2n} = i$ 을 만족하는 $m+2n$ 의 값 중 최소인 자연수는 3 이고 ㉢에 의해 $m+2n$ 이 가질 수 있는 값은 $3, 15, 27, 39, \cdots$ 이다.

그런데 m, n은 각각 10 이하의 자연수이므로 $m+2n \leqq 30$이다.

$\therefore\ m+2n = 3,\ 15,\ 27$

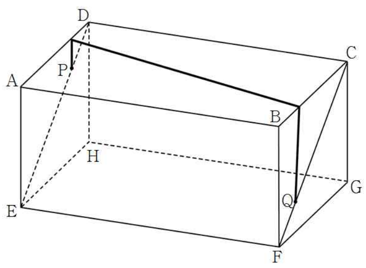
따라서 구하는 최댓값은 27 이다.

8. 답 240 **정답률 20%**

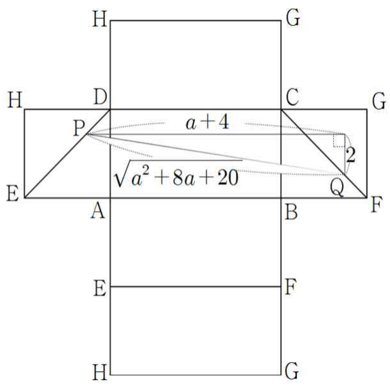
[출제의도] 이차방정식을 이용하여 최단거리 문제 해결하기

점 P 에서 직육면체의 겉면을 따라 점 Q 에 도달하는 최단거리를 구하기 위해 고려해야 할 경로는 아래와 같이 두 가지가 있다.

i) 아래 그림과 같은 경로로 이동하는 경우



그림의 전개도는 아래 [그림1]과 같다.



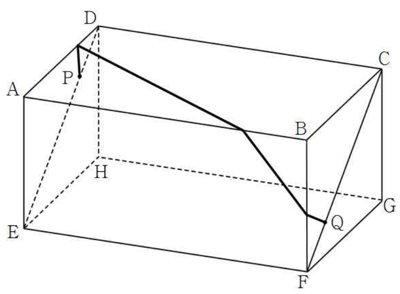
[그림1]

[그림1]에서

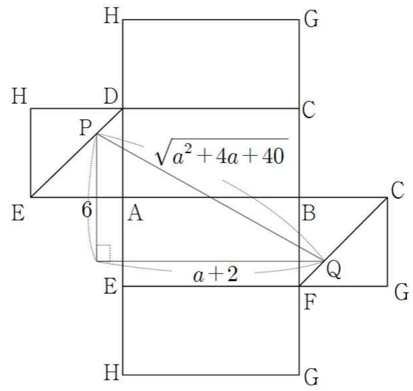
$$\overline{PQ} = \sqrt{(a+4)^2+2^2} = \sqrt{a^2+8a+20}$$

이다.

ii) 아래 그림과 같은 경로로 이동하는 경우



그림의 전개도는 아래 [그림2]와 같다.



[그림2]

[그림2]에서 $\overline{PQ} = \sqrt{(a+2)^2+6^2} = \sqrt{a^2+4a+40}$ 이다.

$a > 5$ 이므로 i), ii) 에 의해

$(a^2+4a+40) - (a^2+8a+20) = -4a+20 < 0$

이 되어 $\sqrt{a^2+4a+40}$ 이 최단거리이다.

정리하면

$$\sqrt{a^2+4a+40} = 2\sqrt{34}$$

$$a^2+4a+40 = 136$$

$$a^2+4a-96 = 0$$

$$(a-8)(a+12) = 0$$

이므로 $a = 8$ 이다.

따라서 $30a = 240$ 이다.