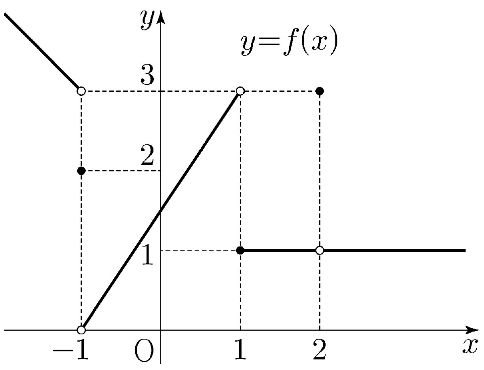
함수의 극한과 연속 주요기출

1) 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to-1-}f(x)+\lim_{x\to2}f(x)$의 값은? [2111 3점]

① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5

2) 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=1$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [2109 3점]

① 4
② 6
③ 8
④ 10
⑤ 12

3) 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이고

$$\lim_{x\to2-}f(x)=a+2,\ \lim_{x\to2+}f(x)=3a-2$$

를 만족시킬 때, $a+f(2)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [1909 3점]

4) 함수

$$f(x)=\begin{cases}-3x+a & (x\le1)\\ \dfrac{x+b}{\sqrt{x+3}-2} & (x>1)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$의 값을 구하시오. [2011 4점]

5) 함수

$$f(x)=\begin{cases}-2x+6 & (x<a)\\ 2x-a & (x\ge a)\end{cases}$$

에 대하여 함수 $\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은? [2106 3점]

① 2
② 4
③ 6
④ 8
⑤ 10

6) 상수항과 계수가 모두 정수인 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 최댓값은? [1911 4점]

가. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)g(x)}{x^3}=2$

나. $\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)g(x)}{x^2}=-4$

① 4
② 6
③ 8
④ 10
⑤ 12

7) 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=1,\ \lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=2$$

를 만족시킨다. $f(1)\le 12$일 때, $f(2)$의 최댓값은? [1909 4점]

① 27
② 30
③ 33
④ 36
⑤ 39

8) 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\{f(x)\}^3-\{f(x)\}^2-x^2f(x)+x^2=0$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 최댓값이 1이고 최솟값이 0일 때, $f\left(-\frac{4}{3}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [2111 4점]

① $\frac{1}{2}$
② 1
③ $\frac{3}{2}$
④ 2
⑤ $\frac{5}{2}$

9) 두 함수

$$f(x)=\begin{cases}-2x+3 & (x<0)\\ -2x+2 & (x\ge 0)\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}2x & (x<a)\\ 2x-1 & (x\ge a)\end{cases}$$

가 있다. 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수 a의 값은? [1906 4점]

① -2
② -1
③ 0
④ 1
⑤ 2

10) 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

가. 모든 실수 x에 대하여 $f(x)g(x)=x(x+3)$이다. 나. $g(0)=1$

$f(1)$이 자연수일 때, $g(2)$의 최솟값은? [1811 4점]

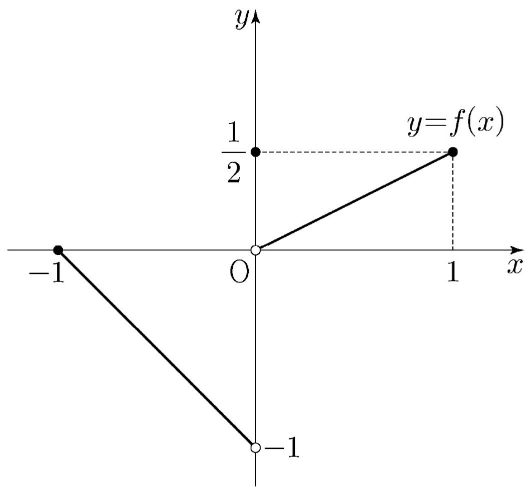
① $\frac{5}{13}$
② $\frac{5}{14}$
③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{5}{16}$
⑤ $\frac{5}{17}$

11) 다음 조건을 만족시키는 모든 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값은? [1906 4점]

> $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^{n+1}+1}=6$, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=4$ 인 자연수 n이 존재한다.

① 12
② 13
③ 14
④ 15
⑤ 16

12) 닫힌 구간 $[-1,\ 1]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



닫힌 구간 $[-1,\ 1]$에서 $g(x)$, $h(x)$가
$g(x)=f(x)+|f(x)|$, $h(x)=f(x)+f(-x)$일 때, 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [1809 4점]

> ㄱ. $\lim_{x\to 0}g(x)=0$
> ㄴ. 함수 $|h(x)|$는 $x=0$에서 연속이다.
> ㄷ. 함수 $g(x)|h(x)|$는 $x=0$에서 연속이다.

① ㄱ
② ㄷ
③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1) 답 : ④

$x \to -1-$일 때 $f(x) \to 3$이므로 $\lim_{x \to -1-} f(x) = 3$

또, $x \to 2$일 때, $f(x) \to 1$이므로 $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$

따라서 $\lim_{x \to -1-} f(x) + \lim_{x \to 2} f(x) = 3 + 1 = 4$

2) 답 : ②

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$에서 $x \to 0$이면 (분모) $\to 0$이고

극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

따라서 $f(0) = 0$

같은 방법으로 $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$에서 $f(1) = 0$

따라서 삼차함수 $f(x)$를 $f(x) = x(x-1)(ax+b)$ (a, b는 상수) 로 놓을 수 있다.

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} (x-1)(ax+b) = -b$이므로 $b = -1$

$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \to 1} x(ax+b) = a+b$이므로 $a+b = 1$

따라서 $a = 2$이므로 $f(x) = x(x-1)(2x-1)$

따라서 $f(2) = 2 \times 1 \times 3 = 6$

3) 답 : 6

$x = 2$에서 연속이므로 $a+2 = 3a-2$이다. 따라서 $a = 2$이고

$f(2) = \lim_{x \to 2} 4$

4) 답 : 6

$f(1) = -3 + a = \lim_{x \to 1+} \frac{x+b}{\sqrt{x+3}-2}$

$= \lim_{x \to 1+} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} = \lim_{x \to 1+} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1} = 4$

따라서 $a = 7$이고 $b = -1$이므로

$a + b = 6$

5) 답 : ④

구간으로 주어진 함수에서 $x = a$에서 연속이면 실수 전체에서 연속이다.

함수 $\{f(x)\}^2$이 $x = a$에서 연속이려면

$\{f(a)\}^2 = \lim_{x \to a+} \{f(x)\}^2 = a^2$, $\lim_{x \to a-} \{f(x)\}^2 = (-2a+6)^2$

$a^2 = (-2a+6)^2$, $a^2 - 8a + 12 = 0$, $\therefore$ (두 근의 합) $= 8$

6) 답 : ③

조건 (가), (나)에 의하여

$f(x)g(x) = x^2(2x+a)$ (a는 상수) 로 놓을 수 있다.

조건 (나)에 의하여 $a = -4$이므로 $f(x)g(x) = 2x^2(x-2)$

이때 $f(2)$가 최대가 되는 $f(x)$는

$f(x) = 2x^2$

이므로 구하는 최댓값은 $f(2) = 8$

7) 답 : ③

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^3} = 1$에서 다항함수 $f(x)$는 3차식이고 최고차항의 계수가 1임을 알 수 있다.

$\lim_{x \to -1} \frac{f(x)}{x+1} = 2$에서 다항함수 $f(x)$는 $f(-1) = 0$이고

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$($a,b,c$상수)라 하면 $x+1$로 나눈 몫

$x^2 + (a-1)x + (-a+b+1)$에 $x = -1$을 대입 한 값이 2임을 알 수 있다.

정리하면 $f(-1) = 0$에서 $a - b + c = 1$ • • • ①

$x^2 + (a-1)x + (-a+b+1)$에 $x = -1$대입 한 값이 2 이므로

$2a - b = 1$ • • • ②

$f(1) \le 12$이므로 $a + b + c \le 11$ • • • ③

②식에서 $b = 2a - 1$, ①식에서 $c = 1 + b - a$ 를 ③식에 대입하면

$a + b + 1 + b - a \le 11$ 이므로 $b \le 5$ 그러므로 b의 최댓값은 5,

$b = 2a - 1$이므로 $2a - 1 \le 5$, $a \le 3$그러므로 a최댓값은 3

③식에서 a,b의 최댓값이 3,5이므로 c의 값은 3이 된다.

그러므로 $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 3$이 된다.

따라서 $f(2) = 33$

8) 답 : ③

$\{f(x)\}^3 - \{f(x)\}^2 - x^2 f(x) + x^2 = 0$에서

$\{f(x) - x\}\{f(x) + x\}\{f(x) - 1\} = 0$이므로

$f(x) = 1$, $f(x) = -x$, $f(x) = x$

이때, $f(0) = 1$ 또는 $f(0) = 0$이다.

(i) $f(0) = 1$일 때,

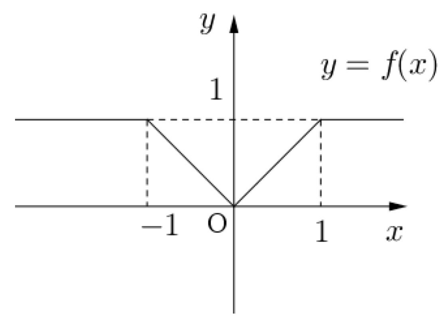
함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고, 최댓값이 1이므로 $f(x) = 1$이다. 이때, 함수 $f(x)$의 최솟값이 0이 아니므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) $f(0) = 0$일 때,

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고, 최댓값이 1이므로

$f(x) = \begin{cases} |x| & (|x| \le 1) \\ 1 & (|x| > 1) \end{cases}$ 이다.

(i), (ii)에서 $f(x) = \begin{cases} |x| & (|x| \le 1) \\ 1 & (|x| > 1) \end{cases}$



따라서 $f\left(-\frac{4}{3}\right) = 1$, $f(0) = 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$이므로

$f\left(-\frac{4}{3}\right) + f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + 0 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

9) 답 : ④

함수 $f(x)$는 $x = 0$에서만 불연속이고, 함수 $g(x)$는 $x = a$에서만 불연속이므로 함수 $f(x)g(x)$가 $x = 0$, $x = a$에서만 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이다.

만일 $a < 0$이면 $f(0)g(0) = 2 \times (-1) = -2$

$\lim_{x \to 0+} f(x)g(x) = 2 \times (-1) = -2$

$\lim_{x \to 0-} f(x)g(x) = 3 \times (-1) = -3$이므로

함수 $f(x)g(x)$가 $x = 0$에서 불연속이다.

즉, $a \ge 0$이다.

이때, $x = a$에서 함수 $f(x)g(x)$의 연속성을 조사하면

$f(a)g(a) = (-2a+2)(2a-1)$

$\lim_{x \to a+} f(x)g(x) = (-2a+2)(2a-1)$

$\lim_{x \to a-} f(x)g(x) = (-2a+2) \times 2a$

이므로 함수 $f(x)g(x)$가 $x = a$에서 연속이려면

$(-2a+2)(2a-1) = (-2a+2) \times 2a$ 이어야 한다.

따라서 $a = 1$

10) 답 : ①

조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)g(x) = x(x+3)$

이고 조건 (나)에서 $g(0) = 1$ 이므로 위의 식에 $x = 0$ 을 대입하면

$f(0)g(0) = 0$, $f(0) = 0$

이때, $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=x(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)

이때, $g(x)=\dfrac{x(x+3)}{f(x)}=\dfrac{x(x+3)}{x(x^2+ax+b)}$

한편, 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim_{x\to0}g(x)=g(0)$ 에서

$\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}\dfrac{x(x+3)}{x(x^2+ax+b)}=\lim_{x\to0}\dfrac{x+3}{x^2+ax+b}=\dfrac{3}{b}$

또, $g(0)=1$ 이므로 $b=3$

이때 $g(x)=\dfrac{x+3}{x^2+ax+3}$

함수 $g(x)$가 실수전체 집합에서 연속이어야 하므로 방정식 $x^2+ax+3=0$은 허근을 가져야 한다. 그러므로 $D=a^2-12<0$

$(a+2\sqrt{3})(a-2\sqrt{3})<0$, $-2\sqrt{3}<a<2\sqrt{3}$ ⋯ ㉠

한편, $f(1)$이 자연수이므로 $f(1)=1\times(1^2+a+3)=a+4$

에서 $a+4$가 자연수이어야 하므로 $a>-4$이고 a는 정수이다.

㉠에서 a의 값은 -3, -2, -1, 0 , 1, 2, 3 이다.

한편 $g(2)=\dfrac{5}{2a+7}$이고

$a=3$일 때, 이 값은 최솟값 $\dfrac{5}{13}$를 갖는다.

11) 답 : ③

(ⅰ) $n=1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^2+1}=6$

$\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=4$ 를 만족시키려면

$f(x)=4x^3+3x^2+ax$ (a는 상수) 의 꼴이어야 한다.

이때,

$\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}(4x^2+3x+a)=a$ 이므로 $a=4$

즉, $f(x)=4x^3+3x^2+4x$이므로

$f(1)=4+3+4=11$

(ⅱ) $n=2$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^3+1}=6$

$\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=4$ 를 만족시키려면

$f(x)=10x^3+bx^2$ (b는 상수) 의 꼴이어야 한다.

이때,

$\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}(10x+b)=b$ 이므로 $b=4$

즉, $f(x)=10x^3+4x^2$이므로

$f(1)=10+4=14$

(ⅲ) $n\geq 3$ 일 때,

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^{n+1}+1}=6$

$\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^n}=4$ 를 만족시키려면

$f(x)=6x^{n+1}+cx^n$ (c는 상수) 의 꼴이어야 한다.

이때,

$\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^n}=\lim_{x\to0}(6x+c)=c$ 이므로 $c=4$

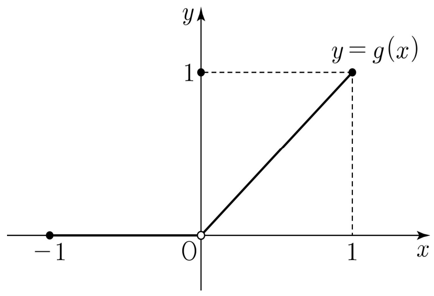
즉, $f(x)=6x^{n+1}+4x^n$이므로

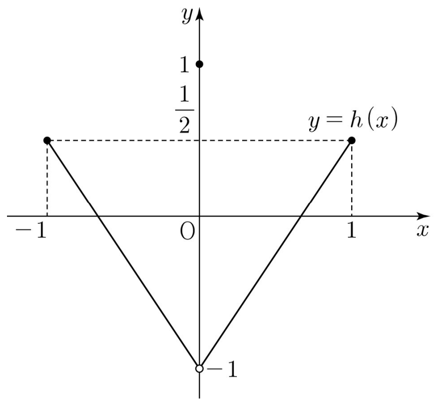
$f(1)=6+4=10$

(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 구하는 $f(1)$의 최댓값은 14

12) 답 : ③

주어진 조건에 따라 $g(x)=f(x)+|f(x)|$, $h(x)=f(x)+f(-x)$의 그래프를 그리면 아래와 같다.





ㄱ. $\lim_{x\to0-}g(x)=0$, $\lim_{x\to0+}g(x)=0$이므로 $\lim_{x\to0}g(x)=0$이다. (참)

ㄴ. $\lim_{x\to0-}|h(x)|=|-1|=1$, $\lim_{x\to0+}|h(x)|=|-1|=1$, $|h(x)|=1$ 이므로 함수 $|h(x)|$는 $x=0$에서 연속이다. (참)

ㄷ. $\lim_{x\to0}g(x)=0$, $\lim_{x\to0}|h(x)|=1$에서 $\lim_{x\to0}g(x)|h(x)|=0\times1=0$

$g(0)|h(0)|=1\times1=1$

$\lim_{x\to0}g(x)|h(x)|\neq g(0)|h(0)|$이므로 함수 $g(x)|h(x)|$는 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)