

# 수학 준킬러 미니 모의고사08

- 1) 양의 실수 전체의 집합  $X$ 에서  $X$ 로의 일대일대응인 두 함수  $f, g$ 에 대하여

$$f^{-1}(x) = x^2, \quad (f \circ g^{-1})(x^2) = x$$

일 때,  $(f \circ g)(20)$ 의 값은? [160316]

- ①  $2\sqrt{5}$
- ②  $4\sqrt{10}$
- ③ 40
- ④ 200
- ⑤ 400

- 2) 좌표평면 위의 세 점  $O(0, 0)$ ,  $A(6, -8)$ ,  $B(7, -1)$ 을 지나는 원  $C$ 에 대하여 원  $C$  위의 점  $O$ 에서의 접선을  $l_1$ 이라 하자. 두 삼각형  $OAB$ 와  $OPB$ 의 넓이가 같게 되는 직선  $l_1$  위의 점  $P$ , 점  $P$ 에서  $x$ 축에 내린 수선의 발을  $Q$ 라 할 때, 다음은 선분  $QO$ 의 길이를 구하는 과정이다. (단, 점  $P$ 는 제3사분면 위의 점이다.)

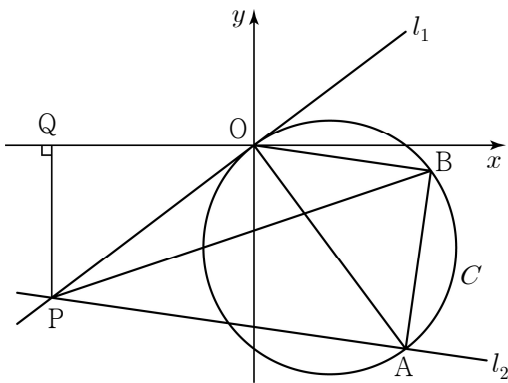
그림과 같이 세 점  $O, A, B$ 를 지나는 원  $C$ 의 방정식은  $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$ 이므로 선분  $OA$ 는 원  $C$ 의 지름이다.

직선  $l_1$ 은 직선  $OA$ 와 수직이고 점  $O$ 를 지나므로

직선  $l_1$ 의 방정식은  $y = \boxed{\text{(가)}}$ 이다.

점  $A$ 를 지나고 직선  $OB$ 와 평행한 직선을  $l_2$ 라 하면,

두 직선  $l_1, l_2$ 가 만나는 점이 두 삼각형  $OAB$ 와  $OPB$ 의 넓이가 같게 되는 점  $P$ 이다.



직선  $l_2$ 의 방정식은  $y = \boxed{\text{(나)}}$ 이다.

점  $P$ 는 두 직선  $l_1, l_2$ 가 만나는 점이므로

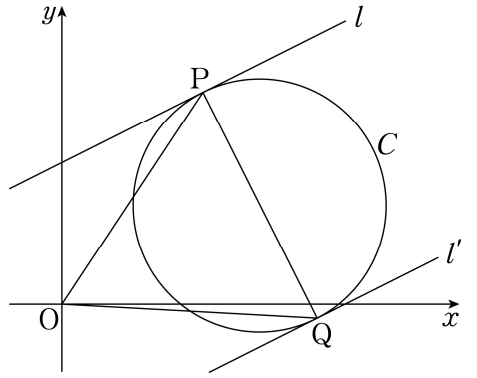
점  $P$ 의  $x$ 좌표는  $\boxed{\text{(다)}}$ 이다.

따라서 선분  $QO$ 의 길이는  $|\boxed{\text{(다)}}|$ 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각  $f(x), g(x)$ 라 하고, (다)에 알맞은 수를  $k$ 라 할 때,  $f(2k) + g(-1)$ 의 값은? [180919]

- ① -20
- ② -19
- ③ -18
- ④ -17
- ⑤ -16

- 3) 그림과 같이 좌표평면에서 직선  $l: x-2y+5=0$ 이 원  $C$ 와 점  $P$ 에서 접하고, 직선  $l$ 과 평행한 직선  $l'$ 이 원  $C$ 와 점  $Q$ 에서 접한다. 삼각형  $POQ$ 가 정삼각형이 되도록 하는 원  $C$ 의 중심이 점  $(a, b)$ 일 때,  $a+b$ 의 값은? (단,  $a, b$ 는 양수이고,  $O$ 는 원점이다.) [170318]



- ①  $3\sqrt{3}$
- ② 6
- ③  $3\sqrt{5}$
- ④  $3\sqrt{6}$
- ⑤  $3\sqrt{7}$

- 4) 집합  $X = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 함수  $f: X \rightarrow X$ 를 다음과 같이 정의한다.

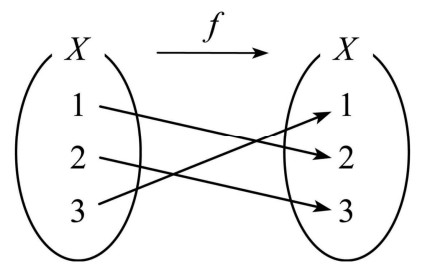
$$f^1(x) = f(x),$$

$$f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$$

( $n = 1, 2, 3, \dots$ )라 할 때,

$f^{100}(1) - f^{200}(3)$ 의 값은? [160317]

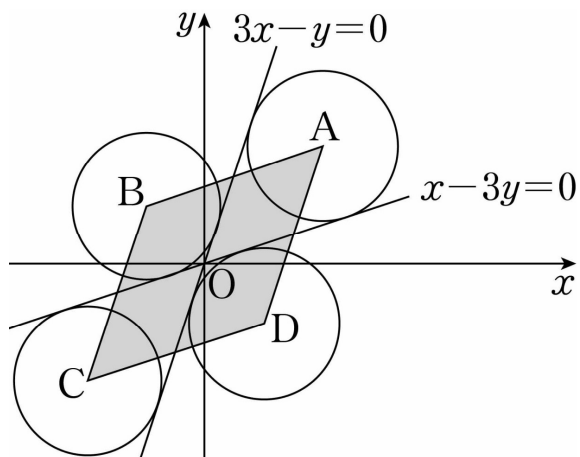
- ① -2
- ② 2
- ③ -1
- ④ 1
- ⑤ 0



5)  $3 < a < 7$ 인 실수  $a$ 에 대하여 이차함수  $y = x^2 - 2ax - 20$ 의 그래프 위의 점  $P$ 와 직선  $y = 2x - 12a$  사이의 거리의 최솟값을  $f(a)$ 라 하자.  $f(a)$ 의 최댓값은? [171119]

- ①  $\frac{4\sqrt{5}}{5}$
- ②  $\sqrt{5}$
- ③  $\frac{6\sqrt{5}}{5}$
- ④  $\frac{7\sqrt{5}}{5}$
- ⑤  $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

6) 그림과 같이 좌표평면에서 두 직선  $x - 3y = 0$ ,  $3x - y = 0$ 에 모두 접하고 반지름의 길이가 4인 네 원의 중심을 각각  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ 라 할 때, 사각형  $ABCD$ 의 넓이를 구하시오. [170329]

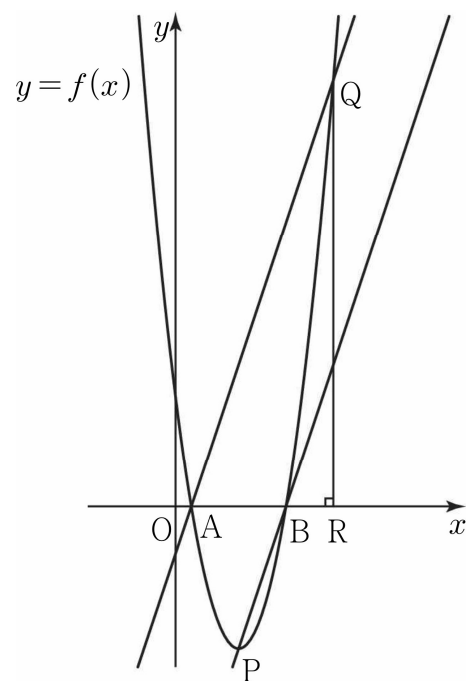


7) 좌표평면에서 기울기가  $a$  ( $0 < a < 3$ )인 직선  $l$ 과 기울기가  $b$ 인 직선  $m$ 이 원  $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 1$ 의 넓이를 4등분 한다. 직선  $l$ 과  $x$ 축,  $y$ 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를  $S_1$ , 직선  $m$ 과  $x$ 축,  $y$ 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를  $S_2$ 라 할 때,  $S_1 + S_2$ 의 최솟값을 구하시오. [171128]

8) 그림과 같이 최고차항의 계수가 1인 이차함수  $y = f(x)$ 의 그래프가 두 점  $A(1, 0)$ ,  $B(a, 0)$ 을 지난다. 이차함수  $y = f(x)$ 의 그래프의 꼭짓점을  $P$ , 점  $A$ 를 지나고 직선  $PB$ 에 평행한 직선이 이차함수  $y = f(x)$ 의 그래프와 만나는 점 중  $A$ 가 아닌 점을  $Q$ , 점  $Q$ 에서  $x$ 축에 내린 수선의 발을  $R$ 라 하자. 직선  $PB$ 의 기울기를  $m$ 이라 할 때, 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단,  $a > 1$ ) [180920]

- ㉠.  $f(2) = 2 - a$   
 ㉡.  $\overline{AR} = 3m$   
 ㉢. 삼각형  $BRQ$ 의 넓이가  $\frac{81}{2}$ 일 때,  $a + m = 10$ 이다.

- ① ㉠
- ② ㉡
- ③ ㉠, ㉡
- ④ ㉡, ㉢
- ⑤ ㉠, ㉡, ㉢



1) 답 : ①

$$f^{-1}(x) = x^2 \text{에서 } f(x^2) = x \cdots \textcircled{A}$$

$$(f \circ g^{-1})(x^2) = x \text{에서 } f(g^{-1}(x^2)) = x \cdots \textcircled{B}$$

$f$ 는 일대일 대응이므로  $\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 에서  $g^{-1}(x^2) = x^2$

$$\therefore g(x^2) = x^2$$

따라서  $g(20) = 20, f(20) = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$  이므로

$$(f \circ g)(20) = f(g(20)) = f(20) = 2\sqrt{5}$$

2) 답 : ②

그림과 같이 세 점  $O, A, B$ 를 지나는 원  $C$ 의 방정식은  $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$  이므로 선분  $OA$ 는 원  $C$ 의 지름이다.

직선  $l_1$ 은 직선  $OA$ 와 수직이고 점  $O$ 를 지나므로

$$\text{직선 } l_1 \text{의 방정식은 } y = \frac{3}{4}x \text{ 이다.}$$

점  $A$ 를 지나고 직선  $OB$ 와 평행한 직선을  $l_2$ 라 하면, 두 직선  $l_1, l_2$ 가 만나는 점이 두 삼각형  $OAB$ 와  $OPB$ 의 넓이가 같게 되는 점  $P$ 이다.

직선  $l_2$ 의 기울기와 직선  $OB$ 의 기울기는 같고, 직선  $l_2$ 는 점  $A$ 를 지나므로  $y - (-8) = -\frac{1}{7}(x - 6)$

즉, 직선  $l_2$ 의 방정식은

$$y = -\frac{1}{7}x - \frac{50}{7} \text{ 이다.}$$

점  $P$ 는 두 직선  $l_1, l_2$ 가 만나는 점이므로 점  $P$ 의  $x$ 좌표는 방정식  $-\frac{1}{7}x - \frac{50}{7} = \frac{3}{4}x$ 의 근이다. 즉, 점  $P$ 의  $x$ 좌표는  $-8$ 이다.

따라서 선분  $QO$ 의 길이는  $|-8|$ 이다.

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{3}{4}x, g(x) = -\frac{1}{7}x - \frac{50}{7}$$

$$k = -8 \text{이므로 } f(2k) + g(-1) = -19$$

3) 답 : ①

평행한 두 직선  $l, l'$ 이 원  $C$ 의 접선이므로 선분  $PQ$ 는 원  $C$ 의 지름이고 원  $C$ 의 중심인 점  $C(a, b)$ 는 선분  $PQ$ 의 중점이다.

삼각형  $POQ$ 가 정삼각형이므로 직선  $OC$ 가 선분  $PQ$ 를 수직이등분한다.

그러므로 직선  $OC$ 는 직선  $l$ 과 평행하다. 직선  $OC$ 의 방정식은  $x - 2y = 0$ 이므로  $a - 2b = 0 \cdots \textcircled{A}$

원점  $O$ 와 직선  $l: x - 2y + 5 = 0$  사이

의 거리  $\frac{|5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \sqrt{5}$ 가 원  $C$ 의 반지름의 길이이다.

삼각형  $POQ$ 가 정삼각형이므로 선분  $OC$ 의 길이는 원  $C$ 의 반지름의 길이의  $\sqrt{3}$ 배이다.

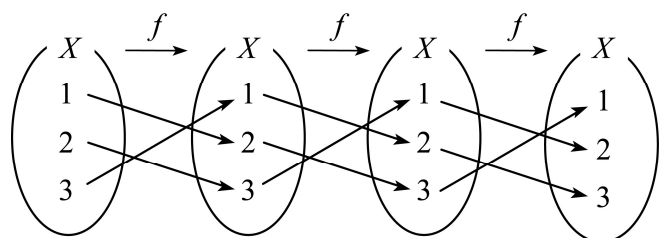
$$\overline{OC} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{15}$$

$$a^2 + b^2 = 15 \cdots \textcircled{B}$$

$a, b$ 는 양수이고,  $\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 에 의하여

$$a = 2\sqrt{3}, b = \sqrt{3} \text{에서 } a + b = 3\sqrt{3}$$

4) 답 : ⑤



그림과 같이 대응관계를 이용하여 합성함수의 값을 구하면

$$f^3(1) = f(f(f(1))) = f(f(2)) = f(3) = 1$$

같은 방법으로  $f^3(2) = 2, f^3(3) = 3$  이다.

$$\therefore f^3(x) = x$$

$$f^{100}(x) = (f^{3 \cdot 33} \circ f)(x) = f(x),$$

$$f^{200}(x) = (f^{3 \cdot 66} \circ f^2)(x) = f^2(x)$$

$$\therefore f^{100}(1) = f(1) = 2$$

$$f^{200}(3) = f^2(3) = f(f(3)) = f(1) = 2$$

$$\therefore f^{100}(1) - f^{200}(3) = 2 - 2 = 0$$

5) 답 : ①

$3 < a < 7$ 일 때, 이차함수  $y = x^2 - 2ax - 20$ 의 그래프와 직선  $y = 2x - 12a$ 가 만나지 않으므로 기울기가 2인 직선이 이차함수  $y = x^2 - 2ax - 20$ 에 접할 때의 접점이 점  $P$ 일 때, 점  $P$ 와 직선  $y = 2x - 12a$  사이의 거리가 최소가 된다.

$y = x^2 - 2ax - 20$ 에 접하고 기울기가 2인 직선을  $y = 2x + b$ 라 하면  $x^2 - 2ax - 20 = 2x + b$

$x^2 - 2(a+1)x - 20 - b = 0$ 의 판별식을  $D$ 라 하면

$$D = 4(a+1)^2 + 4(20+b) = 0,$$

$$b = -(a+1)^2 - 20 = -a^2 - 2a - 21 \text{이므로}$$

$$\text{접선의 방정식은 } y = 2x - a^2 - 2a - 21$$

$f(a)$ 는 두 직선  $y = 2x - 12a$ 와  $y = 2x - a^2 - 2a - 21$  사이의 거리와 같으므로 직선  $y = 2x - 12a$  위의 점  $(6a, 0)$ 과

직선  $y = 2x - a^2 - 2a - 21$  사이의 거리를 구하면

$$f(a) = \frac{|12a - a^2 - 2a - 21|}{\sqrt{5}} = \frac{|-a^2 + 10a - 21|}{\sqrt{5}} = \frac{|-(a-5)^2 + 4|}{\sqrt{5}}$$

( $3 < a < 7$ )

$$\text{따라서 } f(a) \text{의 최댓값은 } f(5) = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

6) 답 : 80

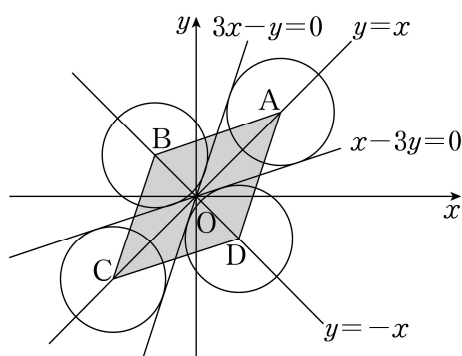
원의 중심의 좌표를  $(a, b)$ 라 하면 원의 중심으로부터 두 직선까지의

$$\text{거리가 같으므로 } \frac{|a-3b|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}} = \frac{|3a-b|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}$$

$$a-3b = \pm(3a-b), a-3b = 3a-b \text{에서 } b = -a$$

$$a-3b = -(3a-b) \text{에서 } b = a$$

따라서 원의 중심은 직선  $y = x$  또는 직선  $y = -x$  위에 있다.



(i) 원의 중심이 직선  $y = x$  위에 있는 경우

원의 중심인 점  $(a, a)$ 와 직선  $3x - y = 0$  사이의 거리는 4이므로

$$4 = \frac{|3a - a|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{|2a|}{\sqrt{10}}$$

$$|2a| = 4\sqrt{10}, a = \pm 2\sqrt{10}$$

따라서 점  $A$ 와 점  $C$ 의 좌표는

$$A(2\sqrt{10}, 2\sqrt{10}), C(-2\sqrt{10}, -2\sqrt{10})$$

(ii) 원의 중심이 직선  $y = -x$  위에 있는 경우

원의 중심인 점  $(a, -a)$ 와 직선  $3x - y = 0$  사이의 거리는 4이므로

$$4 = \frac{|3a - (-a)|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{|4a|}{\sqrt{10}}, |4a| = 4\sqrt{10}$$

$$a = \pm \sqrt{10}$$

따라서 점 B와 점 D의 좌표는

$$B(-\sqrt{10}, \sqrt{10}), D(\sqrt{10}, -\sqrt{10})$$

네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하는 사각형은 두 선분 AC, BD를 대각선으로 하는 마름모이다.

$$\overline{AC} = \sqrt{(-2\sqrt{10}-2\sqrt{10})^2 + (-2\sqrt{10}-2\sqrt{10})^2} = 8\sqrt{5}$$

$$\overline{BD} = \sqrt{\{\sqrt{10}-(-\sqrt{10})\}^2 + (-\sqrt{10}-\sqrt{10})^2} = 4\sqrt{5}$$

$$\text{사각형 ABCD의 넓이는 } \frac{1}{2} \times 8\sqrt{5} \times 4\sqrt{5} = 80$$

7) 답 : 10

두 직선  $l, m$ 이 원  $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 1$ 의 넓이를 4등분하므로 두 직선  $l, m$ 은 원의 중심  $(1, 3)$ 을 지나고 서로 수직인 직선이다.

직선  $l$ 의 기울기가  $a(0 < a < 3)$ 이므로 직선  $m$ 의 기울기는  $b = -\frac{1}{a}$

$$l: y = a(x-1)+3, m: y = -\frac{1}{a}(x-1)+3$$

직선  $l$ 의  $x$ 절편과  $y$ 절편은 각각  $1-\frac{3}{a}, 3-a$ 이고,

직선  $m$ 의  $x$ 절편과  $y$ 절편은 각각  $1+3a, 3+\frac{1}{a}$ 이므로 직선  $l$ 과  $x$

축,  $y$ 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이  $S_1$ 은  $S_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{a}-1\right)(3-a)$

직선  $m$ 과  $x$ 축,  $y$ 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이  $S_2$ 는

$$S_2 = \frac{1}{2}(1+3a)\left(3+\frac{1}{a}\right)$$

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{a}-1\right)(3-a) + \frac{1}{2}(1+3a)\left(3+\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{10}{a}+10a\right) \geq 10$$

(단, 등호는  $a=1$ 일 때 성립한다.)

따라서  $S_1 + S_2$ 의 최솟값은 10

8) 답 : ⑤

ㄱ. 최고차항의 계수가 1이고  $x$ 축과 만나는 점의  $x$ 좌표가 1,  $a$ 이므로  $f(x) = (x-1)(x-a)$

따라서  $f(2) = 2-a$  (참)

ㄴ. 이차함수  $y = f(x)$ 의 축의 방정식이  $x = \frac{a+1}{2}$ 이므로

$$\text{점 P의 } x\text{좌표는 } \frac{a+1}{2} \dots \textcircled{㉠}$$

이차함수  $y = f(x)$ 와 직선 PB의 방정식을 연립하여 정리하면

$$(x-1)(x-a) = m(x-a), (x-a)(x-1-m) = 0 \text{에서}$$

$$x = a \text{ 또는 } x = m+1 \text{이므로 점 P의 } x\text{좌표는 } m+1 \dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에 의해 } a = 2m+1 \dots \textcircled{㉢}$$

이차함수  $y = f(x)$ 와 직선 AQ의 방정식을 연립하여 정리하면

$$(x-1)(x-a) = m(x-1)$$

$$(x-1)(x-m-a) = 0 \text{에서 } x = 1 \text{ 또는 } x = m+a \text{이므로}$$

두 점 Q, R의  $x$ 좌표는  $m+a$

$$\textcircled{㉢} \text{에 의해 } \overline{AR} = (a+m)-1 = 3m \text{ (참)}$$

$$\textcircled{ㄴ}. \overline{BR} = m, \overline{QR} = m(a+m-1) = 3m^2 \text{이고, 삼각형 BRQ의 넓이가}$$

$$\frac{81}{2} \text{이므로 } \frac{1}{2} \times m \times 3m^2 = \frac{81}{2}$$

$$\text{즉, } m = 3, a = 7 \text{ 따라서 } a+m = 10 \text{ (참)}$$