

수학 준킬러 미니 모의고사06

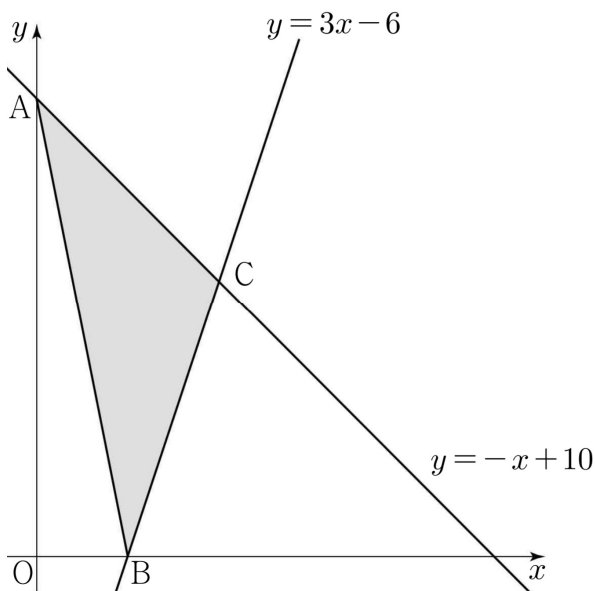
1) 2 이상의 세 자연수 p, q, r 에 대하여

$$42 \times (42 - 1) \times (42 + 6) + 5 \times 42 - 5 = p \times q \times r$$

일 때, $p+q+r$ 의 값은? [181116]

- ① 131
- ② 133
- ③ 135
- ④ 137
- ⑤ 139

2) 그림과 같이 좌표평면에서 직선 $y = -x + 10$ 과 y 축과의 교점을 A, 직선 $y = 3x - 6$ 과 x 축과의 교점을 B, 두 직선 $y = -x + 10$, $y = 3x - 6$ 의 교점을 C라 하자. x 축 위의 점 $D(a, 0)(a > 2)$ 에 대하여 삼각형 ABD의 넓이가 삼각형 ABC의 넓이와 같도록 하는 a 의 값은? [181117]



- ① 5
- ② $\frac{26}{5}$
- ③ $\frac{27}{5}$
- ④ $\frac{28}{5}$
- ⑤ $\frac{29}{5}$

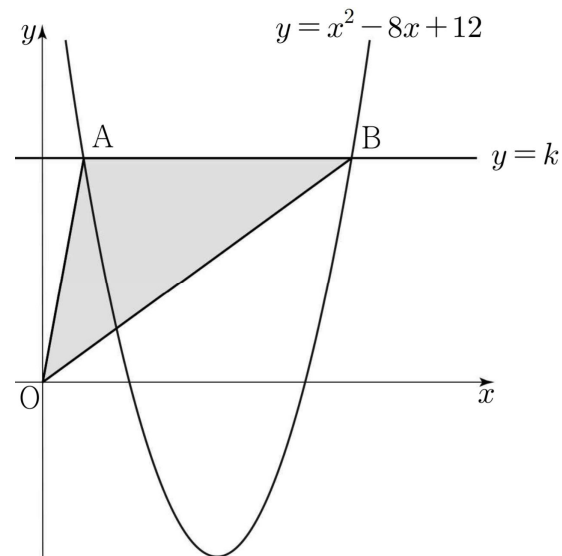
3) 최고차항의 계수가 1인 두 이차다항식 $f(x), g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- 가. $f(x) - g(x)$ 를 $x - 2$ 로 나눈 몫과 나머지가 서로 같다.
 나. $f(x)g(x)$ 는 $x^2 - 1$ 로 나누어떨어진다.

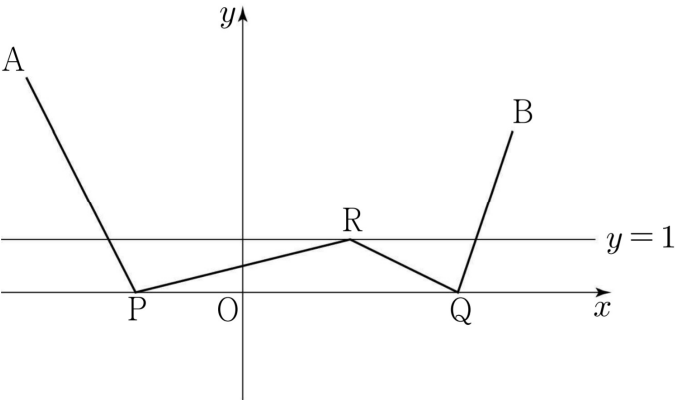
$g(4) = 3$ 일 때, $f(2) + g(2)$ 의 값은? [181118]

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

4) 그림과 같이 이차함수 $y = x^2 - 8x + 12$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. 삼각형 AOB의 넓이가 15일 때, 양수 k 의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [181127]



5) 좌표평면 위에 두 점 $A(-4, 4)$, $B(5, 3)$ 이 있다. x 축 위의 두 점 P , Q 와 직선 $y=1$ 위의 점 R 에 대하여 $\overline{AP} + \overline{PR} + \overline{RQ} + \overline{QB}$ 의 최솟값은? [181119]



- ① 12
- ② $5\sqrt{6}$
- ③ $2\sqrt{39}$
- ④ $9\sqrt{2}$
- ⑤ $2\sqrt{42}$

6) 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 에 대하여 함수 $f: X \rightarrow X$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- 가. 함수 f 의 치역의 원소의 개수는 7이다.
나. $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) + f(7) + f(8) = 42$
다. 함수 f 의 치역의 원소 중 최댓값과 최솟값의 차는 6이다.

집합 X 의 어떤 두 원소 a , b 에 대하여 $f(a) = f(b) = n$ 을 만족하는 자연수 n 의 값을 구하시오. (단, $a \neq b$) [181128]

7) 자연수 n 에 대하여 이차함수 $y = 2x^2$ 의 그래프와 직선 $y = nx$ 의 교점 중 원점이 아닌 점을 A , 이차함수 $y = 2x^2$ 의 그래프와 직선 $y = (n+2)x$ 의 교점 중 원점이 아닌 점을 B 라 하자. 다음은 삼각형 OAB 의 넓이를 $S(n)$ 이라 할 때, $S(n) > 100$ 을 만족시키는 n 의 최솟값을 구하는 과정이다. (단, O 는 원점이다.)

이차함수 $y = 2x^2$ 의 그래프와 직선 $y = nx$ 의 교점 A 의 x 좌표를 구하면 $2x^2 = nx (x \neq 0)$ 에서 $x = \frac{n}{2}$

점 A 를 지나고 x 축에 수직인 직선이 직선 $y = (n+2)x$ 와 만나는 점을 A' 이라 하자. 선분 AA' 의 길이는

$$\overline{AA'} = \boxed{\text{(가)}} - \frac{n^2}{2}$$

이므로 삼각형 OAB 의 넓이 $S(n)$ 은

$$S(n) = \frac{1}{2} \times n \times \left(\boxed{\text{(나)}} \right)$$

따라서 $S(n) > 100$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 $\boxed{\text{(다)}}$ 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$ 이라 하고, (다)에 알맞은 수를 k 라 할 때, $f(k) + g(k)$ 의 값을 구하시오. [181129]

8) 18 이하의 자연수 k 에 대하여 두 집합

$$A = \{x \mid x \text{는 } k \text{의 양의 약수}\}, B = \{2, 5, 6\}$$

이 있다. $n(A \cap B) = 2$ 일 때, 다음에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [181120]

- ㄱ. $A \cap B = \{2, 5\}$ 이면 $k = 10$ 이다.
ㄴ. $A \cap B = \{5, 6\}$ 을 만족하는 k 가 존재한다.
ㄷ. 집합 $A - B$ 의 모든 원소의 합이 홀수가 되는 모든 k 의 값의 합은 28이다.

- ① ㄱ
- ② ㄷ
- ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

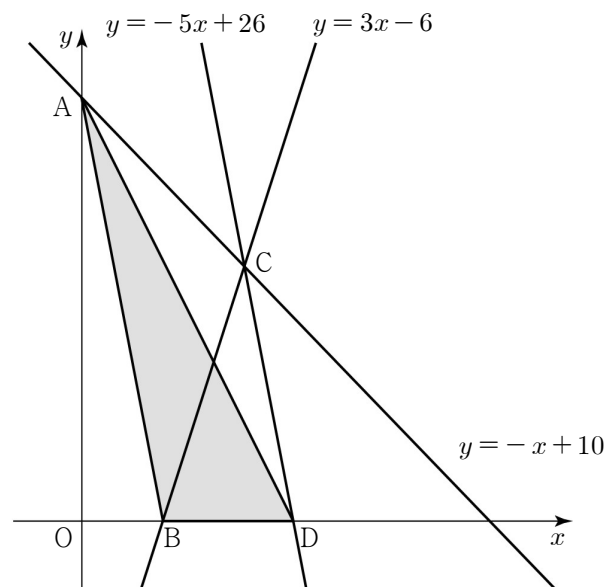
1) 답 : ①

$42 = A$ 라 하면

$$\begin{aligned} 42 \times (42-1) \times (42+6) + 5 \times 42 - 5 &= A(A-1)(A+6) + 5A - 5 \\ &= A(A-1)(A+6) + 5(A-1) \\ &= (A-1)\{A(A+6)+5\} = (A-1)(A^2+6A+5) \\ &= (A-1)(A+1)(A+5) = 41 \times 43 \times 47 \end{aligned}$$

따라서 $p+q+r = 41+43+47 = 131$

2) 답 : ②



x 축 위의 점 $D(a, 0)$ ($a > 2$)에 대하여 삼각형 ABC의 넓이와 삼각형 ABD의 넓이가 같으려면 직선 AB와 점 C 사이의 거리와 직선 AB와 점 D 사이의 거리가 같아야 하므로 점 C를 지나고 직선 AB에 평행한 직선 위에 점 D가 있어야 한다.

직선 $y = -x + 10$ 의 y 절편이 10이므로 점 A의 좌표는 (0, 10)이고 직선 $y = 3x - 6$ 의 x 절편이 2이므로 점 B의 좌표는 (2, 0)이다.

직선 AB의 기울기는 $\frac{0-10}{2-0} = -5$ 이고 두 직선 $y = -x + 10$,

$y = 3x - 6$ 의 교점 C의 좌표는 (4, 6)이므로 점 C를 지나고 직선 AB에 평행한 직선의 방정식은 $y - 6 = -5(x - 4)$, $y = -5x + 26$

점 $D(a, 0)$ 이 직선 $y = -5x + 26$ 위의 점이므로 $0 = -5a + 26$

따라서 $a = \frac{26}{5}$

3) 답 : ②

조건 (가)에 의해 $f(x) - g(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 몫과 나머지를 a 라 하면 $f(x) - g(x) = (x-2)a + a = a(x-1)$

$x=1$ 을 대입하면 $f(1) - g(1) = 0 \dots \textcircled{7}$

조건 (나)에 의해 $f(x)g(x)$ 를 x^2-1 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 $f(x)g(x) = (x^2-1)Q(x)$

$x=1$ 을 대입하면 $f(1)g(1) = 0 \dots \textcircled{8}$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에 의해 $f(1) = g(1) = 0$ 이다.

인수정리에 의하여 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 각각 $x-1$ 을 인수로 가지므로

$f(x) = (x-1)(x+p)$, $g(x) = (x-1)(x+q)$ 라 하자.

$g(4) = (4-1)(4+q) = 3$ 이므로 $q = -3$

$g(x) = (x-1)(x-3)$

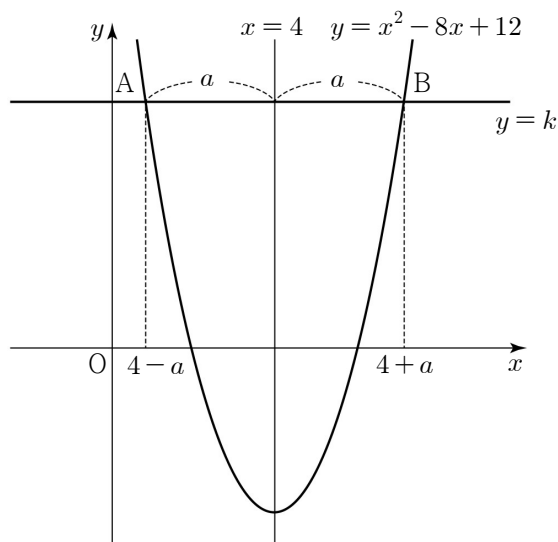
$f(x)g(x) = (x-1)^2(x-3)(x+p) = (x^2-1)Q(x)$

$x=-1$ 을 대입하면 $(-2)^2 \times (-4) \times (-1+p) = 0$ 에서 $p = 1$

$f(x) = (x-1)(x+1)$

따라서 $f(2) + g(2) = 3 + (-1) = 2$

4) 답 : 5



$y = x^2 - 8x + 12 = (x-4)^2 - 4$ 이므로 이차함수 $y = x^2 - 8x + 12$ 의 그래프는 직선 $x=4$ 에 대하여 대칭이다.

두 점 A, B의 좌표를 $(4-a, k)$, $(4+a, k)$ 라 하면 $\overline{AB} = 2a$

점 $A(4-a, k)$ 가 이차함수 $y = (x-4)^2 - 4$ 위의 점이므로

$k = a^2 - 4 \dots \textcircled{9}$

삼각형 AOB의 넓이가 15이므로 $\frac{1}{2} \times 2a \times k = ak = 15 \dots \textcircled{10}$

$\textcircled{9}, \textcircled{10}$ 을 연립하면 $a(a^2 - 4) = 15$, $a^3 - 4a - 15 = 0$

조립제법을 이용하여 $a^3 - 4a - 15$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & 0 & -4 & -15 \\ & & 3 & 9 & 15 \\ \hline & 1 & 3 & 5 & 0 \end{array}$$

$(a-3)(a^2+3a+5) = 0$

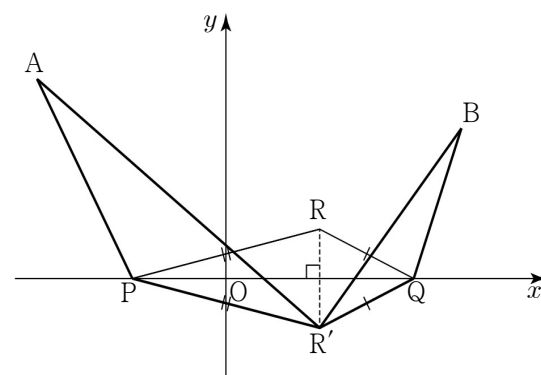
$a^2+3a+5 > 0$ 이므로 $a = 3$

따라서 $k = 5$

5) 답 : ④

점 R는 직선 $y=1$ 위에 있으므로 점 R의 좌표를 $(a, 1)$ 이라 하자.

점 R를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 R' 이라 하면 점 R' 의 좌표는 $(a, -1)$ 이다.



그림과 같이 $\overline{AP} + \overline{PR} = \overline{AP} + \overline{PR'} \geq \overline{AR'}$,

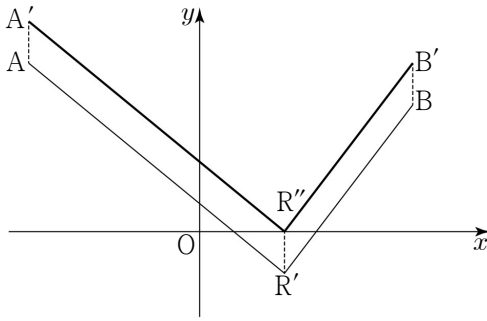
$\overline{RQ} + \overline{QB} = \overline{R'Q} + \overline{QB} \geq \overline{R'B}$ 이므로 $\overline{AP} + \overline{PR} + \overline{RQ} + \overline{QB} \geq \overline{AR'} + \overline{R'B}$

$\overline{AR'} + \overline{R'B}$ 의 값은 점 $R'(a, -1)$ 의 위치에 따라 변하므로

$\overline{AP} + \overline{PR} + \overline{RQ} + \overline{QB}$ 의 최솟값은 $\overline{AR'} + \overline{R'B}$ 의 최솟값과 같다.

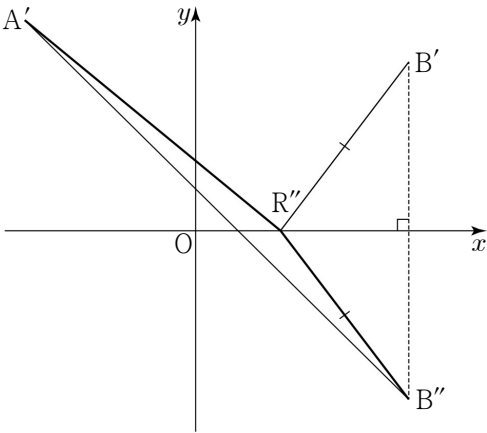
세 점 $A(-4, 4)$, $B(5, 3)$, $R'(a, -1)$ 을 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점을 각각 A' , B' , R'' 이라 하면

$A'(-4, 5)$, $B'(5, 4)$, $R''(a, 0)$ 이고 $\overline{AR'} + \overline{R'B} = \overline{A'R''} + \overline{R''B'}$ 이다.



점 B' 을 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 B'' 이라 하면 점 B'' 의 좌표는 $(5, -4)$ 이다.

$\overline{A'R'} + \overline{R'B'} = \overline{A'R''} + \overline{R''B''} \geq \overline{A'B''}$ 이므로
 $\overline{AP} + \overline{PR} + \overline{RQ} + \overline{QB}$ 의 최솟값은 $\overline{A'B''}$ 과 같다.



점 $A'(-4, 5)$ 이고 점 $B''(5, -4)$ 에 대하여
 $\overline{A'B''} = \sqrt{\{5 - (-4)\}^2 + \{-4 - 5\}^2} = 9\sqrt{2}$
 따라서 $\overline{AP} + \overline{PR} + \overline{RQ} + \overline{QB}$ 의 최솟값은 $9\sqrt{2}$

6) 답 : 7

조건 (가)에서 함수 f 의 치역의 원소의 개수가 7이므로 집합 X 의 서로 다른 두 원소 a, b 에 대하여

$f(a) = f(b) = n$ 을 만족하는 집합 X 의 원소 n 은 한 개 있다. 이때 집합 X 의 원소 중 함수값으로 사용되지 않은 원소를 m 이라 하자.

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$ 이므로 조건 (나)에서
 $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) + f(7) + f(8) = 36 + n - m = 42$
 $\therefore n - m = 6$

집합 X 의 원소 n, m 에 대하여 $n - m = 6$ 인 경우는 두 가지이다.

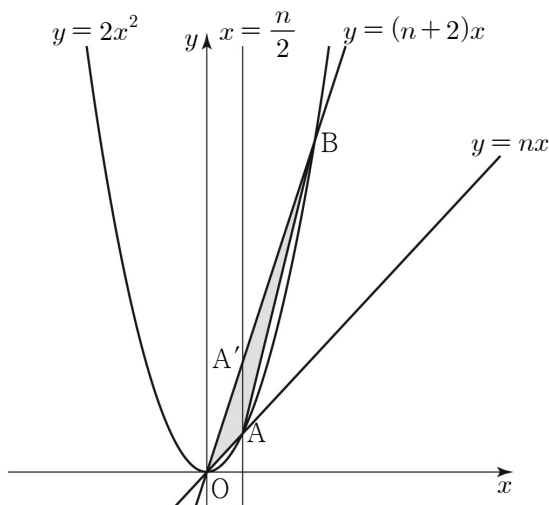
(i) $n = 8, m = 2$ 일 때

함수 f 의 치역은 $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 이므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

(ii) $n = 7, m = 1$ 일 때

함수 f 의 치역은 $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 이므로 조건 (다)를 만족시킨다.
 따라서 $n = 7$

7) 답 : 231



점 A 는 이차함수 $y = 2x^2$ 의 그래프와 직선 $y = nx$ 의 교점이다.

$$2x^2 = nx \text{에서 } x \neq 0 \text{이므로 } x = \frac{n}{2}$$

$$\therefore \text{점 } A \text{의 좌표는 } \left(\frac{n}{2}, \frac{n^2}{2}\right)$$

점 B 는 이차함수 $y = 2x^2$ 의 그래프와 직선 $y = (n+2)x$ 의 교점이다.

$$2x^2 = (n+2)x \text{에서 } x \neq 0 \text{이므로 } x = \frac{n+2}{2}$$

$$\therefore \text{점 } B \text{의 좌표는 } \left(\frac{n+2}{2}, \frac{(n+2)^2}{2}\right)$$

점 A 를 지나고 x 축에 수직인 직선이
 직선 $y = (n+2)x$ 와 만나는 점을 A' 이라 하자.

$$\text{점 } A' \text{의 좌표는 } \left(\frac{n}{2}, \frac{n^2+2n}{2}\right)$$

$$\text{선분 } AA' \text{의 길이는 } \overline{AA'} = \frac{n^2+2n}{2} - \frac{n^2}{2} = n$$

삼각형 OAB 의 넓이 $S(n)$ 은 삼각형 OAA' 의 넓이와 삼각형 ABA' 의 넓이의 합이므로

$$\begin{aligned} S(n) &= \frac{1}{2} \times n \times \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \times n \times \left(\frac{n+2}{2} - \frac{n}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times n \times \left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{n(n+2)}{4} > 100 \end{aligned}$$

부등식 $n(n+2) > 400$ 의 양변에 1을 더하면 $(n+1)^2 > 401$

$$n+1 > \sqrt{401}$$

$$20 < \sqrt{401} < 21 \text{이므로 } \sqrt{401} = 20 + \alpha (0 < \alpha < 1)$$

$$\therefore n > \sqrt{401} - 1 = (20 + \alpha) - 1 = 19 + \alpha$$

따라서 $S(n) > 100$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 $\boxed{20}$ 이다.

$$f(n) = \frac{n^2+2n}{2}, g(n) = \frac{n}{2} + 1, k = 20 \text{이므로}$$

$$f(k) + g(k) = f(20) + g(20) = 220 + 11 = 231$$

8) 답 : ③

$$\neg. A \cap B = \{2, 5\} \text{에서 } 2 \in A, 5 \in A$$

2와 5가 k 의 약수이므로 k 는 10의 배수이다.

k 는 18 이하의 자연수이므로 $k = 10$ (참)

$$\neg. A \cap B = \{5, 6\} \text{에서 } 5 \in A, 6 \in A$$

5와 6이 k 의 약수이므로 k 는 30의 배수이다.

k 는 18 이하의 자연수이므로 존재하지 않는다. (거짓)

$$\neg. (i) A \cap B = \{2, 5\} \text{일 때, } k = 10 \text{이고 } A = \{1, 2, 5, 10\} \text{이므로}$$

집합 $A - B = \{1, 10\}$ 의 모든 원소의 합은 11

$$(ii) A \cap B = \{2, 6\} \text{일 때, } 2 \in A, 6 \in A$$

2와 6이 k 의 약수이므로 k 는 6의 배수이다.

k 는 18 이하의 자연수이므로 가능한 k 는 6, 12, 18이다.

$k = 6$ 인 경우, $A = \{1, 2, 3, 6\}$ 이므로 집합 $A - B = \{1, 3\}$ 의 모든 원소의 합은 4

$k = 12$ 인 경우, $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 이므로 집합

$A - B = \{1, 3, 4, 12\}$ 의 모든 원소의 합은 20

$k = 18$ 인 경우, $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ 이므로 집합

$A - B = \{1, 3, 9, 18\}$ 의 모든 원소의 합은 31

\therefore 집합 $A - B$ 의 모든 원소의 합이 홀수가 되는 모든 k 의 값의 합은 $10 + 18 = 28$ (참)

따라서 옳은 것은 \neg, \neg