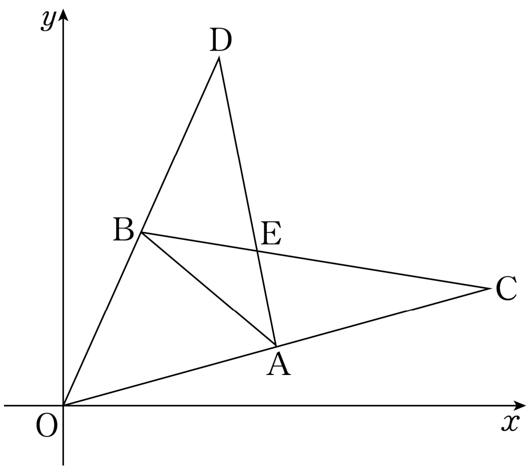
# 수학 준킬러 미니 모의고사03

1) 좌표평면에 두 점 $\mathrm{A}(-3,\ 1)$, $\mathrm{B}(1,\ k)$가 있다. 점 A를 $y$축에 대하여 대칭이동한 점을 P라 하고, 점 B를 $y$축의 방향으로 $-5$만큼 평행이동한 점을 Q라 하자. 직선 BP와 직선 PQ가 서로 수직이 되도록 하는 모든 실수 $k$의 값의 곱은? [190316]

① 8
② 10
③ 12
④ 14
⑤ 16

2) 그림과 같이 좌표평면에 원점 O를 한 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB가 있다. 선분 OA를 $2:1$로 외분하는 점을 C, 선분 OB를 $2:1$로 외분하는 점을 D라 할 때, 두 선분 AD와 BC의 교점을 E $(p,\ q)$라 하자. 삼각형 OAB의 무게중심의 좌표가 $(5,\ 4)$일 때, $p+q$의 값은? [190318]




① 12
② 14
③ 16
④ 18
⑤ 20

3) 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$, $\mathrm{B}(2,\ 1)$이 있다. $x$축 위의 점 C에 대하여 삼각형 ABC의 둘레의 길이의 최솟값이 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$일 때, 두 자연수 $a$, $b$의 합 $a+b$의 값을 구하시오. (단, 점 C는 직선 AB 위에 있지 않다.) [191127]

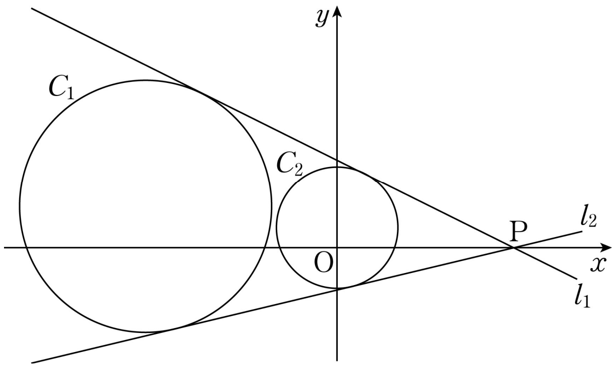
4) 곡선 $y=x^2$ 위의 임의의 점 $\mathrm{A}(t,\ t^2)$ $(0<t<1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B라 하고 두 점 A, B에서 $y$축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. 다음은 사각형 ABDC의 넓이가 $\frac{1}{8}$이 되는 상수 $t$의 값을 구하는 과정이다.

> 점 A에서 $y$축에 내린 수선의 발이 C이므로 $\overline{\mathrm{AC}}=t$
> 점 B에서 $y$축에 내린 수선의 발이 D이므로 $\overline{\mathrm{BD}}=t^2$
> $\overline{\mathrm{DC}}=\boxed{(가)}$이므로
> 사각형 ABDC의 넓이는 $\frac{1}{2}t^2\times\left(\boxed{(나)}\right)$
> 사각형 ABDC의 넓이가 $\frac{1}{8}$이므로
> $\frac{1}{2}t^2\times\left(\boxed{(나)}\right)=\frac{1}{8}$
> 따라서 $t=\boxed{(다)}$

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(t)$, $g(t)$라 하고, (다)에 알맞은 수를 $k$라 할 때, $f(k)\times g(k)$의 값은? [191119]

① $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$
② $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$
③ $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$
④ $\frac{2\sqrt{2}-1}{2}$
⑤ $\frac{2\sqrt{2}+1}{4}$

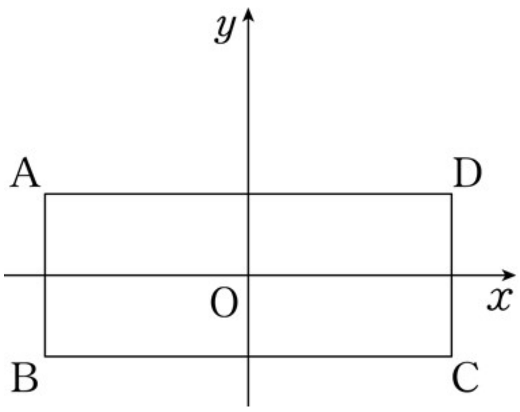
5) 좌표평면에 원 $C_1 : (x+7)^2+(y-2)^2=20$이 있다. 그림과 같이 점 $\mathrm{P}(a,\ 0)$에서 원 $C_1$에 그은 두 접선을 $l_1$, $l_2$라 하자. 두 직선 $l_1$, $l_2$가 원 $C_2 : x^2+(y-b)^2=5$에 모두 접할 때, 두 직선 $l_1$, $l_2$의 기울기의 곱을 $c$라 하자. $11(a+b+c)$의 값을 구하시오. (단, $a$, $b$는 양의 상수이다.) [190329]




6) 그림과 같이 두 대각선 AC, BD의 교점이 원점이고 네 변이 각각 $x$축 또는 $y$축에 평행한 직사각형 ABCD가 다음 조건을 만족시킨다.

가. $\overline{\mathrm{AD}} > \overline{\mathrm{AB}} > 2$
나. 직사각형 ABCD를 $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동한 직사각형의 내부와 직사각형 ABCD 내부와의 공통부분의 넓이는 18이다.
다. 직사각형 ABCD를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직사각형의 내부와 직사각형 ABCD 내부와의 공통부분의 넓이는 16이다.

직사각형 ABCD의 넓이는? (단, 점 A는 제2사분면 위의 점이다.) [190319]




① 32
② 36
③ 40
④ 44
⑤ 48

7) 두 자연수 $m$, $n$에 대하여 원 $C : (x-2)^2+(y-3)^2=9$를 $x$축의 방향으로 $m$만큼 평행이동한 원을 $C_1$, 원 $C_1$을 $y$축의 방향으로 $n$만큼 평행이동한 원을 $C_2$라 하자. 두 원 $C_1$, $C_2$와 직선 $l : 4x-3y=0$은 다음 조건을 만족시킨다.

가. 원 $C_1$은 직선 $l$과 서로 다른 두 점에서 만난다.
나. 원 $C_2$는 직선 $l$과 서로 다른 두 점에서 만난다.

$m+n$의 최댓값을 구하시오. [190328]

1) 답 : ②

점 P는 점 A$(-3,\ 1)$을 $y$축에 대하여 대칭이동한 점이므로 그 좌표는 $(3,\ 1)$이다.

또, 점 Q는 점 B$(1,\ k)$를 $y$축의 방향으로 $-5$만큼 평행이동한 점이므로 그 좌표는 $(1,\ k-5)$이다.

두 점 B$(1,\ k)$, P$(3,\ 1)$에 대하여 직선 BP의 기울기는

$\dfrac{1-k}{3-1}=-\dfrac{k-1}{2}$

두 점 P$(3,\ 1)$, Q$(1,\ k-5)$에 대하여 직선 PQ의 기울기는

$\dfrac{(k-5)-1}{1-3}=-\dfrac{k-6}{2}$

직선 BP와 PQ가 서로 수직이므로 $\left(-\dfrac{k-1}{2}\right)\times\left(-\dfrac{k-6}{2}\right)=-1$

$(k-1)(k-6)=-4$에서 $k^2-7k+10=0$

따라서 모든 실수 $k$의 값의 곱은 10

2) 답 : ④

두 점 A, B의 좌표를 각각 $(a_1,\ b_1)$, $(a_2,\ b_2)$

라 하면 삼각형 OAB의 무게중심의 좌표가 $(5,\ 4)$이므로

$\dfrac{0+a_1+a_2}{3}=5$, $\dfrac{0+b_1+b_2}{3}=4$

$a_1+a_2=15$, $b_1+b_2=12$ …… ㉠

선분 OA를 $2:1$로 외분하는 점 C의 좌표는 $\left(\dfrac{2a_1-0}{2-1},\ \dfrac{2b_1-0}{2-1}\right)$

즉, $(2a_1,\ 2b_1)$

마찬가지로 선분 OB를 $2:1$로 외분하는 점 D의 좌표는 $(2a_2,\ 2b_2)$

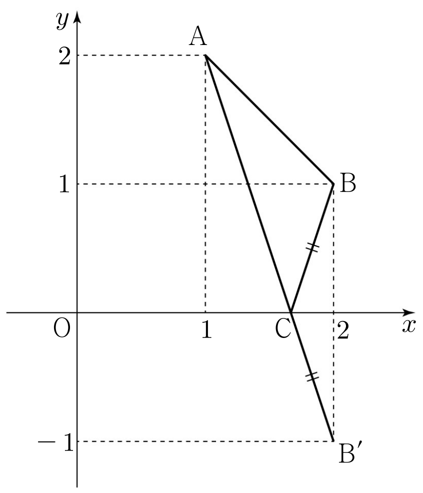
이때 두 선분 AD, BC는 모두 삼각형 OCD의 중선이므로 교점 E는 삼각형 OCD의 무게중심이다. 따라서 점 E의 좌표는

$\left(\dfrac{0+2a_1+2a_2}{3},\ \dfrac{0+2b_1+2b_2}{3}\right)$

㉠에 의하여 $\dfrac{2a_1+2a_2}{3}=\dfrac{2(a_1+a_2)}{3}=\dfrac{2\times15}{3}=10$,

$\dfrac{2b_1+2b_2}{3}=\dfrac{2(b_1+b_2)}{3}=\dfrac{2\times12}{3}=8$ 이므로 점 E의 좌표는 $(10,\ 8)$이다. 따라서 $p=10$, $q=8$이므로 $p+q=18$

3) 답 : 12




삼각형 ABC의 둘레의 길이는 $\overline{AC}+\overline{CB}+\overline{BA}$

점 B$(2,1)$을 $x$축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면 점 B′의 좌표는 $(2,\ -1)$이다.

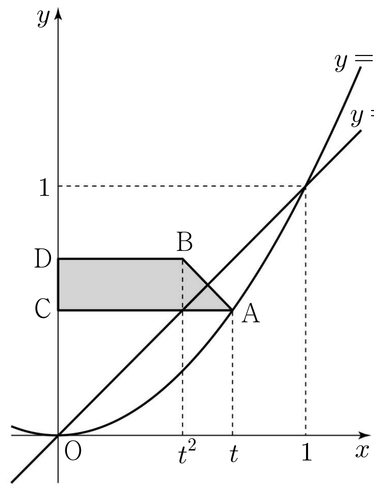
$\overline{AC}+\overline{CB}=\overline{AC}+\overline{CB'}\ge\overline{AB'}$이고 $\overline{BA}=\sqrt{2}$, $\overline{AB'}=\sqrt{10}$이므로

삼각형 ABC의 둘레의 길이의 최솟값은 $\sqrt{2}+\sqrt{10}$

따라서 $a+b=12$

4) 답 : ①

점 B는 점 A$(t,\ t^2)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이므로 점 B의 좌표는 $(t^2,\ t)$이다.




그림과 같이 점 A에서 $y$축에 내린 수선의 발이 C이므로 $\overline{AC}=t$

점 B에서 $y$축에 내린 수선의 발이 D이므로 $\overline{BD}=t^2$

$\overline{DC}=\boxed{t-t^2}$이므로 사각형 ABDC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}(t+t^2)(t-t^2)=\dfrac{1}{2}t^2\times\left(\boxed{1-t^2}\right)$

사각형 ABDC의 넓이가 $\dfrac{1}{8}$이므로

$\dfrac{1}{2}t^2\times\left(\boxed{1-t^2}\right)=\dfrac{1}{8}$, $t^2(1-t^2)=\dfrac{1}{4}$, $(2t^2-1)^2=0$

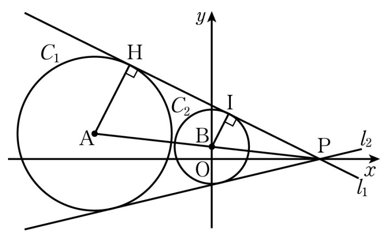
따라서 $t=\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$ $(0<t<1)$

$f(t)=t-t^2$, $g(t)=1-t^2$, $k=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$f(k)\times g(k)=f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\times g\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{2}-1}{4}$

5) 답 : 87

두 원 $C_1$, $C_2$의 중심을 각각 A, B라 하면 두 점 A, B의 좌표는 각각 $(-7,\ 2)$, $(0,\ b)$이다.




그림과 같이 두 점 A, B에서 직선 $l_1$에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하면 $\overline{AH}=2\sqrt{5}$, $\overline{BI}=\sqrt{5}$

이므로 두 삼각형 PAH, PBI는 닮음비가 $\overline{AH}:\overline{BI}=2:1$

인 닮은 도형이다.

이때 점 B는 선분 AP의 중점이므로 $\dfrac{(-7)+a}{2}=0$, $\dfrac{2+0}{2}=b$

$a=7$, $b=1$ …… ㉠

점 P$(7,\ 0)$을 지나고 점 B$(0,\ 1)$에서의 거리가 $\sqrt{5}$인 직선을

$y=m(x-7)$, 즉 $mx-y-7m=0$($m$은 상수)

로 놓으면 $\dfrac{|m\times0-1-7m|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$,

$|-7m-1|=\sqrt{5(m^2+1)}$ …… ㉡

㉡의 양변을 제곱하면 $49m^2+14m+1=5m^2+5$

방정식을 풀면 $m=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $m=\dfrac{2}{11}$

따라서 두 직선 $l_1$, $l_2$의 기울기의 곱은 $\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{2}{11}=-\dfrac{1}{11}$

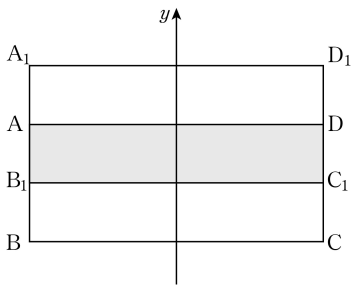
이므로 $c=-\dfrac{1}{11}$ …… ㉢

㉠, ㉢에서 $11(a+b+c)=11\left(7+1-\dfrac{1}{11}\right)=87$

6) 답 : ②

네 점 A, B, C, D를 $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동한 네 점을 각각 $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$이라 하고, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 네 점을 각각 $A_2$, $B_2$, $C_2$, $D_2$라 하자.

직사각형 ABCD의 두 대각선의 교점이 원점이고 각 변은 $x$축 또는 $y$축에 평행하며 $\overline{AD}>\overline{AB}>2$이므로 두 직사각형 ABCD, $A_1B_1C_1D_1$은 그림과 같다.




이때 제1사분면 위의 점 D의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

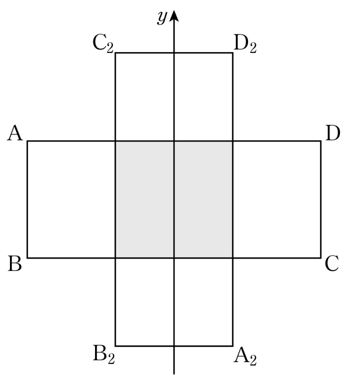
$A(-a,\ b)$, $B(-a,\ -b)$, $C(a,\ -b)$이다.

점 $B_1$은 점 B를 $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점이므로

$\overline{AD}=2a$, $\overline{AB_1}=2b-2$

조건 (가)에서 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 내부와 직사각형 ABCD의 내부와의 공통부분의 넓이가 18이므로 $2a\times(2b-2)=18$ …… ㉠

한편 직사각형 $A_2D_2C_2B_2$는 직사각형 ABCD를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형이므로 두 직사각형 ABCD, $A_2D_2C_2B_2$는 그림과 같다.



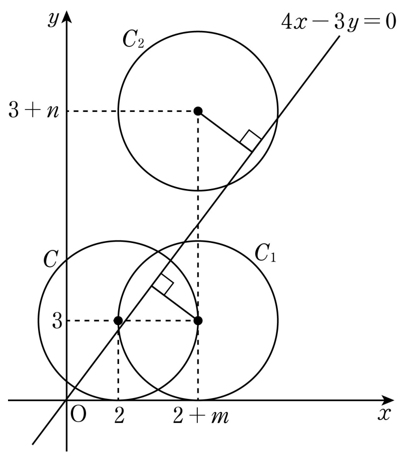

조건 (나)에서 직사각형 $A_2D_2C_2B_2$의 내부와 직사각형 ABCD의 내부와의 공통부분의 넓이가 16이고 그림에서 공통부분은 한 변의 길이가 선분 AB의 길이와 같은 정사각형이므로 $(2b)^2=16$, $b^2=4$

$b$는 양수이므로 $b=2$, $b=2$를 ㉠에 대입하면 $a=\dfrac{9}{2}$

따라서 직사각형 ABCD의 넓이는

$\overline{AD}\times\overline{AB}=2a\times 2b=4ab=4\times\dfrac{9}{2}\times 2=36$

7) 답 : 11




원 $C_1$의 중심의 좌표는 $(2+m,\ 3)$이므로 점 $(2+m,\ 3)$과 직선 $4x-3y=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 3보다 작다. 즉,

$\dfrac{|4(2+m)-9|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}<3$, 식을 정리하면 $-\dfrac{7}{2}<m<4$

조건 (가)를 만족시키는 자연수 $m$의 값은 1, 2, 3이다.

(ⅰ) $m=1$일 때,

원 $C_2$의 중심의 좌표는 $(3,\ 3+n)$이므로 점 $(3,\ 3+n)$과 직선 $4x-3y=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 3보다 작다.

$\dfrac{|12-3(3+n)|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}<3$에서 $-4<n<6$

따라서 자연수 $n$의 값은 1, 2, 3, 4, 5이므로 이 경우 $m+n$의 최댓값은 6이다.

(ⅱ) $m=2$일 때,

원 $C_2$의 중심의 좌표는 $(4,\ 3+n)$이므로 점 $(4,\ 3+n)$과 직선 $4x-3y=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 3보다 작다.

$\dfrac{|16-3(3+n)|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}<3$, $-\dfrac{8}{3}<n<\dfrac{22}{3}$

따라서 자연수 $n$의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이므로 이 경우 $m+n$의 최댓값은 9이다.

(ⅲ) $m=3$일 때,

원 $C_2$의 중심의 좌표는 $(5,\ 3+n)$이므로 점 $(5,\ 3+n)$과 직선 $4x-3y=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 3보다 작다.

$\dfrac{|20-3(3+n)|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}<3$, $-\dfrac{4}{3}<n<\dfrac{26}{3}$

따라서 자연수 $n$의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8이므로 이 경우 $m+n$의 최댓값은 11이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $m+n$의 최댓값은 11이다.