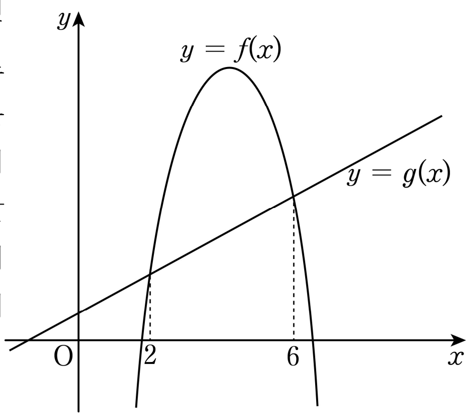
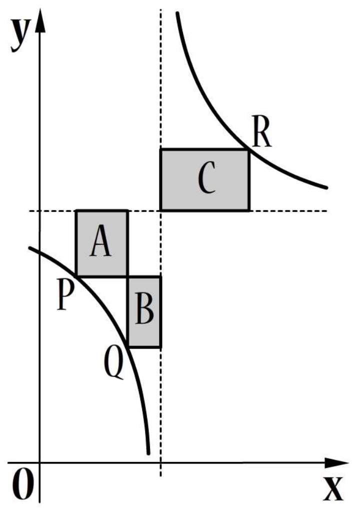
수학 준킬러 미니 모의고사09

1) 이차항의 계수가 -1인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 만나는 두 점의 x좌표는 2와 6이다. $h(x)=f(x)-g(x)$라 할 때, 함수 $h(x)$는 $x=p$에서 최댓값 q를 갖는다. $p+q$의 값은? [160315]



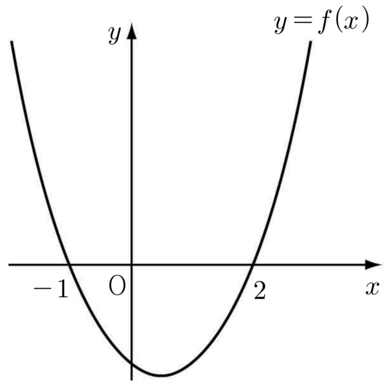
① 8
② 9
③ 10
④ 11
⑤ 12

2) 오른쪽 그림은 $y=\dfrac{3}{x-3}+6$의 그래프이다. 곡선 위의 점 P, Q, R을 각각 꼭짓점으로 하고, 이 점과 이웃하지 않는 두 변이 그림과 같이 점근선과 평행하거나 점근선 위에 있는 세 직사각형 A, B, C의 넓이를 각각 a, b, c라 할 때, 다음 중 옳은 것은?



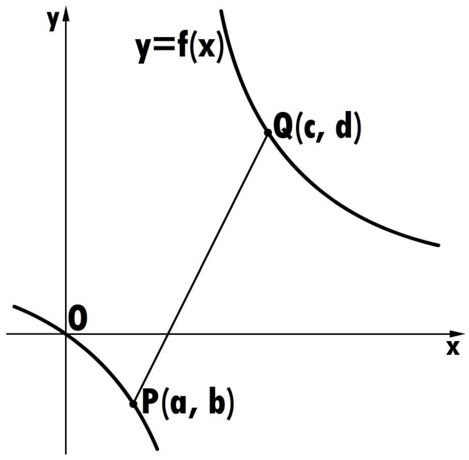
① $A=B<C$
② $C<A=B$
③ $A=B=C$
④ $B<A<C$
⑤ $A<B<C$

3) 그림은 두 점 $(-1, 0)$, $(2, 0)$을 지나는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프를 나타낸 것이다. 부등식 $f\left(\dfrac{x+k}{2}\right)\le 0$의 해가 $-3\le x\le 3$일 때, 상수 k의 값은? [161114]

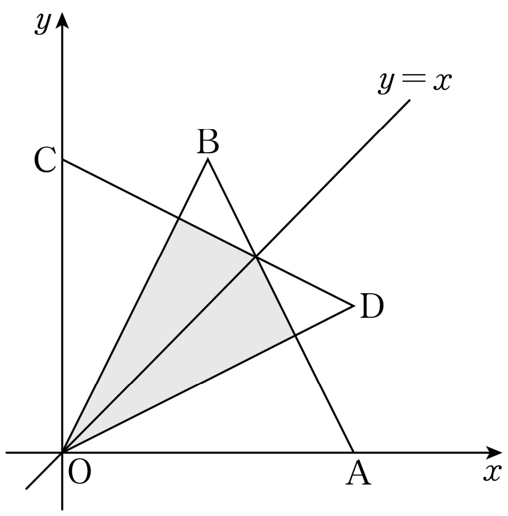


① 0
② 1
③ 2
④ 3
⑤ 4

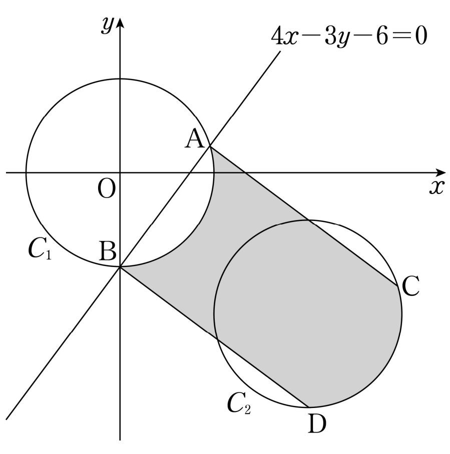
4) 유리함수 $f(x)=\dfrac{2}{x-2}+1$의 그래프 위의 두 점 $P(a,\ b)$, $Q(c,\ d)$에 대하여 선분 PQ의 중점의 y좌표가 1이고, $a-c=-2$일 때, 직선 PQ의 기울기는? (단, $0<a<c$)



5) 그림과 같이 좌표평면에서 두 점 A$(2, 0)$, B$(1, 2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 각각 C, D라 하자. 삼각형 OAB 및 그 내부와 삼각형 ODC 및 그 내부의 공통부분의 넓이를 S라 할 때, $60S$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [160327]



6) 그림과 같이 좌표평면에서 원 $C_1 : x^2+y^2=4$를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 원을 C_2라 하자. 원 C_1과 직선 $4x-3y-6=0$이 만나는 두 점 A, B를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 점을 각각 C, D라 하자. 선분 AC, 선분 BD, 호 AB 및 호 CD로 둘러싸인 색칠된 부분의 넓이를 구하시오. [170328]



7) 좌표평면 위의 두 곡선

$$y=-\sqrt{kx+2k}+4,\ y=\sqrt{-kx+2k}-4$$

에 대하여 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, k는 0이 아닌 실수이다.) [180320]

ㄱ. 두 곡선은 서로 원점에 대하여 대칭이다.
ㄴ. $k<0$이면 두 곡선은 한 점에서 만난다.
ㄷ. 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 k의 최댓값은 16이다.

① ㄱ
② ㄴ
③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

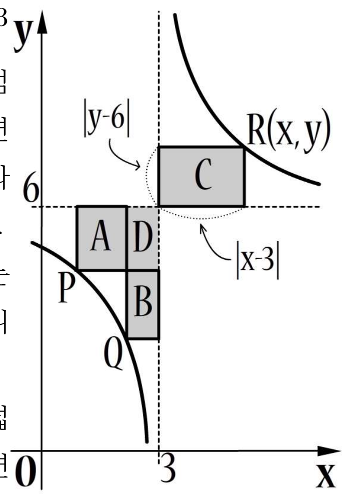
8) $2 \le x \le 4$에서 이차함수 $y=x^2-4ax+4a^2+b$의 최솟값이 4가 되도록 하는 두 실수 a, b에 대하여 $2a+b$의 최댓값을 M이라 하자. $4M$의 값을 구하시오. [170929]

1) 답 : ①

이차방정식 $h(x)=0$의 두 근이 2와 6이므로 인수정리에 의하여 $h(x)=k(x-2)(x-6)$이다.
이때 $g(x)$는 일차함수이고 $f(x)$는 이차항의 계수가 -1인 이차함수이므로 함수 $h(x)$는 이차함수이고 이차항의 계수는 -1이다.
$h(x)=-(x-2)(x-6)=-x^2+8x-12=-(x-4)^2+4$
이므로 함수 $h(x)$는 $x=4$에서 최댓값 4를 갖는다.
$p=4$, $q=4$이므로 $p+q=8$

2) 답 : ①

$y-6=\dfrac{3}{x-3}$이므로 $(x-3)(y-6)=3$이다. 곡선 위의 점 $(x,\ y)$를 한 꼭짓점으로 하고 이 점과 이웃하지 않은 두 변이 점근선과 겹치는 직사각형의 가로와 세로의 길이는 각각 $|x-3|$, $|y-6|$이다.
따라서, 이 직사각형의 넓이는 $|(x-3)(y-6)|=3$으로 점 $(x,\ y)$의 위치에 관계없이 일정하다.
그림에서 직사각형 A, B, C, D의 넓이를 각각 a, b, c, d라 하면



$c=a+d=b+d=3$
$\therefore\ a=b<c$

3) 답 : ②

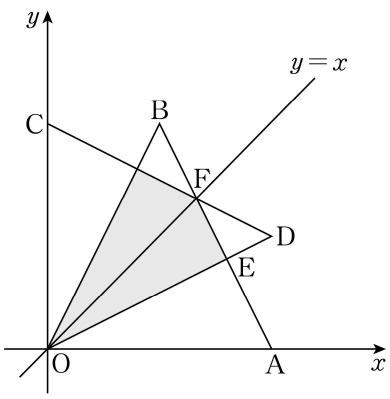
주어진 그림으로부터 이차부등식 $f(x)\le 0$의 해는 $-1\le x\le 2$
이때, $f\left(\dfrac{x+k}{2}\right)\le 0$에서 $\dfrac{x+k}{2}=t$라 하면 $f(t)\le 0$이고, 이차부등식 $f(t)\le 0$의 해는 $-1\le t\le 2$이다.
그러므로 $-1\le\dfrac{x+k}{2}\le 2 \Leftrightarrow -2\le x+k\le 4$
$\Leftrightarrow -2-k\le x\le 4-k \cdots$ ①이다.
또한, $f\left(\dfrac{x+k}{2}\right)\le 0$의 해가 $-3\le x\le 3 \cdots$ ②
이라 하였으므로 ①의 식과 ②의 식은 같아야 한다.
따라서 $-2-k=-3$, $4-k=3$에서 $k=1$이다.

4) 답 : 2

함수 f는 점 $(2,\ 1)$에 대하여 대칭이다. 그런데 선분 PQ의 중점의 y좌표가 1이므로 점 P, Q는 점 $(2,\ 1)$에 대하여 대칭이다.
즉, 선분 PQ의 중점의 x좌표는 2이다.
$\dfrac{a+c}{2}=2$에서 $a+c=4$이고, 조건 $a-c=-2$이므로 $a=1$, $c=3$이다.
그러므로 $P(1,\ -1)$, $Q(3,\ 3)$이므로 직선 PQ의 기울기는 2이다.

5) 답 : 64

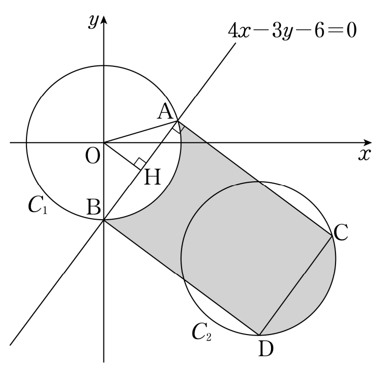
두 직선 AB, OD의 교점을 E, 직선 AB와 직선 $y=x$의 교점을 F라 하자. 직선 AB의 방정식은
$y-0=\dfrac{2-0}{1-2}(x-2)$ 즉, $y=-2x+4$이다. 점 B$(1,\ 2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 D의 좌표는 $(2,\ 1)$이므로
직선 OD의 방정식은 $y=\dfrac{1}{2}x$이다. $-2x+4=\dfrac{1}{2}x$에서 $x=\dfrac{8}{5}$,
$-2x+4=x$에서 $x=\dfrac{4}{3}$이므로 두 점 E, F의 x좌표는 각각 $\dfrac{8}{5}$, $\dfrac{4}{3}$이다.



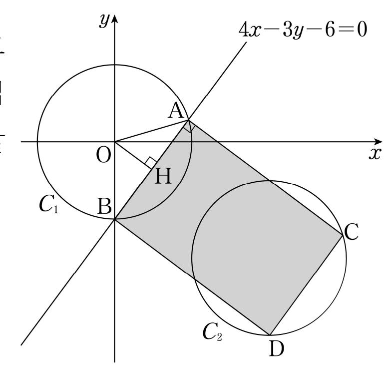
$\triangle$OAF : $\triangle$OEF $=\overline{\text{AF}}:\overline{\text{EF}}$
$=\left|2-\dfrac{4}{3}\right|:\left|\dfrac{8}{5}-\dfrac{4}{3}\right|=5:2$
이므로 삼각형 OEF의 넓이는 삼각형 OAF의 넓이의 $\dfrac{2}{5}$배이다.
따라서 $S=\left(\dfrac{1}{2}\times 2\times\dfrac{4}{3}\right)\times\dfrac{2}{5}\times 2$
$=\dfrac{16}{15}$이므로 $60S=64$

6) 답 : 16

점 A를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 점이 C이므로 직선 AC의 기울기는 $-\dfrac{3}{4}$이다.
즉, 두 직선 AB, AC가 서로 수직이므로 사각형 ABDC는 직사각형이다. $\overline{\text{AC}}=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$
또, 원점에서 직선 $4x-3y-6=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{\text{OH}}=\dfrac{|-6|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{6}{5}$
$\overline{\text{AH}}=\sqrt{\overline{\text{OA}}^2-\overline{\text{OH}}^2}=\sqrt{2^2-\left(\dfrac{6}{5}\right)^2}=\dfrac{8}{5}$
$\overline{\text{AB}}=2\overline{\text{AH}}=\dfrac{16}{5}$

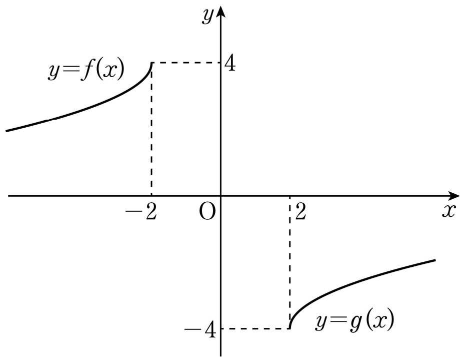


선분 AC, 선분 BD, 호 AB 및 호 CD로 둘러싸인 색칠된 부분의 넓이는 직사각형 ABDC의 넓이와 같으므로
$\overline{\text{AB}}\times\overline{\text{AC}}=\dfrac{16}{5}\times 5=16$



7) 답 : ④

두 함수 $f(x)$, $g(x)$를 $f(x)=-\sqrt{kx+2k}+4$, $g(x)=\sqrt{-kx+2k}-4$라 하자.
ㄱ. $f(-x)=-\sqrt{-kx+2k}+4=-\left(\sqrt{-kx+2k}-4\right)=-g(x)$
이므로 $g(x)=-f(-x)$
따라서 두 곡선
$y=-\sqrt{kx+2k}+4$, $y=\sqrt{-kx+2k}-4$는 원점에 대하여 대칭이다. (참)
ㄴ. $k<0$이면 두 곡선은 다음과 같다.



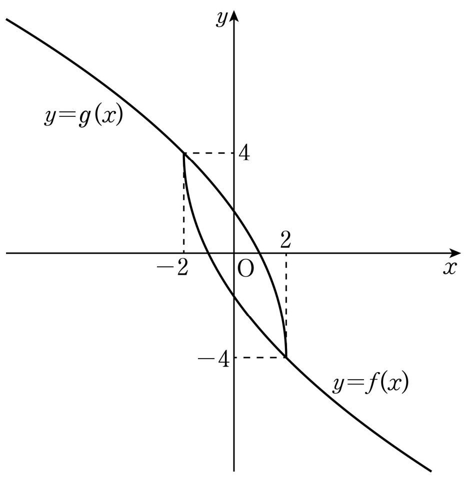
따라서 두 곡선은 만나지 않는다. (거짓)

ㄷ. (i) $k<0$ 일 때 ㄴ에 의하여 두 곡선은 만나지 않는다.

(ii) $k>0$ 일 때

ㄱ에서 두 곡선은 원점에 대하여 대칭이고 k의 값이 커질수록 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=4$와 멀어지고 곡선 $y=g(x)$는 직선 $y=-4$와 멀어진다.

따라서 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 k의 최댓값은 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$가 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ -4)$를 지날 때이다.



$-4=-\sqrt{2k+2k}+4$

$\sqrt{4k}=8,\ 4k=64$

따라서 $k=16$ (참)

8) 답 : 33

$2\le x\le 4$에서 이차함수 $y=(x-2a)^2+b$는

그래프의 축 $x=2a$의 위치에 따라 최솟값을 갖는 x의 좌표가 달라진다.

(i) $a<1$ 인 경우, 함수의 최솟값은 $x=2$ 일 때 $(2-2a)^2+b=4$ 이므로 $b=-4(a-1)^2+4$

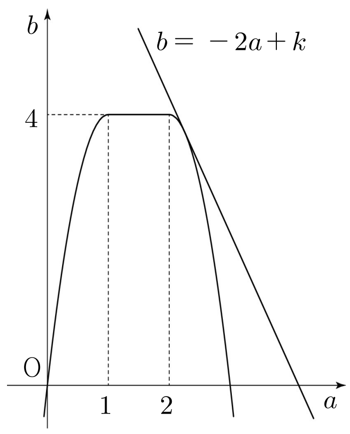
(ii) $1\le a<2$ 인 경우, 함수의 최솟값은 꼭짓점의 y좌표이므로 $b=4$

(iii) $a\ge 2$ 인 경우, 함수의 최솟값은 $x=4$ 일 때 $(4-2a)^2+b=4$ 이므로 $b=-4(a-2)^2+4$

그러므로

$$b=\begin{cases}-4(a-1)^2+4 & (a<1)\\ 4 & (1\le a<2)\\ -4(a-2)^2+4 & (a\ge 2)\end{cases}$$

$2a+b=k$라 두면



$b=-4(a-2)^2+4$와 $b=-2a+k$가 접할 때 k는 최댓값을 갖는다. 따라서 $M=\dfrac{33}{4}$ 이고 $4M=33$