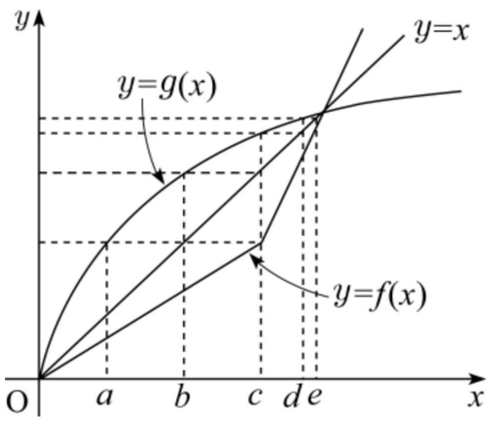
역함수, 유리함수, 무리함수 주요기출

1) 그림은 $x \geq 0$에서 정의된 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=x$를 나타낸 것이다. $g^{-1}(f(c))$의 값은? (단, g는 역함수가 존재하는 함수이다.) [090309]



① a
② b
③ c
④ d
⑤ e

2) 함수 f에 대하여 $f^2(x)=f(f(x))$, $f^3(x)=f(f^2(x))$, $\cdots$ 이라 정의하자. 이때 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 함수 $f\ :\ X \to X$가 두 조건

$$f(1)=3,\ f^3=I\ (I\text{는 항등함수})$$

를 만족한다. 함수 f의 역함수를 g라 할 때, $g^{10}(2)+g^{11}(3)$의 값은? [080314]

① 6
② 5
③ 4
④ 3
⑤ 2

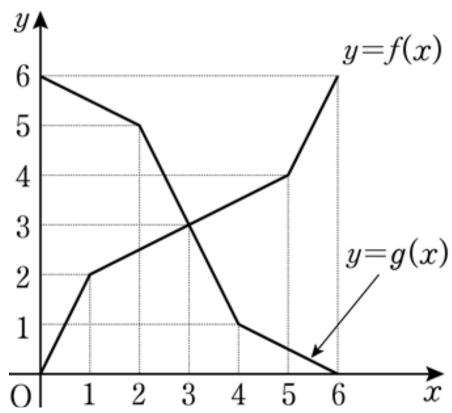
3) 양의 실수 전체의 집합 X에서 X로의 일대일대응인 두 함수 f, g에 대하여

$$f^{-1}(x)=x^2,\quad (f\circ g^{-1})(x^2)=x$$

일 때, $(f\circ g)(20)$의 값은? [160316]

① $2\sqrt{5}$
② $4\sqrt{10}$
③ 40
④ 200
⑤ 400

4) 정의역이 $\{x\,|\,0\leq x\leq 6\}$인 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 일대일 대응이고 그래프는 그림과 같다. 등식 $f^{-1}(a)=g(b)$를 만족시키는 두 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는? (단, 두 함수의 그래프는 각각 세 선분으로 되어 있다.) [150319]



① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5

5) 유리함수 $f(x)=\dfrac{ax+1}{x+b}$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=2$, $y=3$일 때, $f(4)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [160308]

① 6
② $\dfrac{13}{2}$
③ 7
④ $\dfrac{15}{2}$
⑤ 8

6) 유리함수 $y=\dfrac{3x+b}{x+a}$의 그래프가 점 $(2,\ 1)$을 지나고, 점 $(-2,\ c)$에 대하여 대칭일 때, $a+b+c$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [170308]

① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5

7) 함수 $f(x)=\dfrac{4x+9}{x-1}$의 그래프의 점근선이 두 직선 $x=a$, $y=b$일 때, $f^{-1}(a+b)$의 값을 구하시오. [180325]

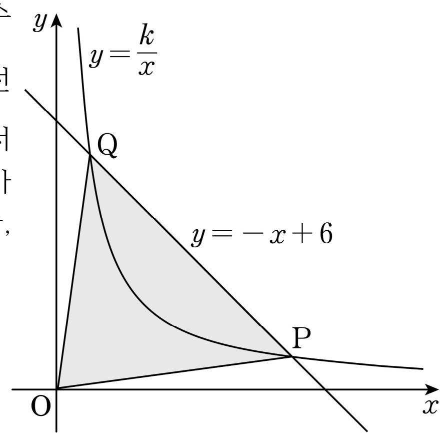
8) 함수 $y=f(x)$의 그래프는 곡선 $y=-\dfrac{2}{x}$를 평행이동한 것이고 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 함수 $f(x)$의 정의역이 $\{x|x\neq-2$인 모든 실수$\}$일 때, $f(4)$의 값은? [180312]

① -3
② $-\dfrac{7}{3}$
③ $-\dfrac{5}{3}$
④ -1
⑤ $-\dfrac{1}{3}$

9) 유리함수 $f(x)=\dfrac{3x+k}{x+4}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 곡선을 $y=g(x)$라 하자. 곡선 $y=g(x)$의 두 점근선의 교점이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점일 때, 상수 k의 값은? [150316]

① -6
② -3
③ 0
④ 3
⑤ 6

10) 그림과 같이 유리함수 $y=\dfrac{k}{x}\ (k>0)$의 그래프가 직선 $y=-x+6$과 두 점 P, Q에서 만난다. 삼각형 OPQ의 넓이가 14일 때, 상수 k의 값은? (단, O는 원점이다.) [160318]



① $\dfrac{32}{9}$
② $\dfrac{34}{9}$
③ 4
④ $\dfrac{38}{9}$
⑤ $\dfrac{40}{9}$

11) 함수 $f(x)=\dfrac{a}{x-6}+b$에 대하여 함수 $y=\left|f(x+a)+\dfrac{a}{2}\right|$의 그래프가 y축에 대하여 대칭일 때, $f(b)$의 값은? (단, a, b는 상수이고, $a\neq 0$이다.) [200319]

① $-\dfrac{25}{6}$
② -4
③ $-\dfrac{23}{6}$
④ $-\dfrac{11}{3}$
⑤ $-\dfrac{7}{2}$

12) 유리함수 $f(x)=\dfrac{2x+b}{x-a}$가 다음 조건을 만족시킨다.

가. 2가 아닌 모든 실수 x에 대하여 $f^{-1}(x)=f(x-4)-4$이다. 나. 함수 $y=f(x)$의 그래프를 평행이동하면 함수 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프와 일치한다.

$a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [170319]

① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5

13) 두 함수 $f(x)=-\dfrac{1}{x}+k$, $g(x)=\dfrac{1}{x-1}-k$가 있다. 정수 k에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점 중 x좌표가 양수인 점의 개수를 $h(k)$라 하자. 등식 $h(k)+h(k+1)+h(k+2)=4$를 만족시키는 정수 k의 값은? [190320]

① -2
② -1
③ 0
④ 1
⑤ 2

14) 무리함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프가 원점을 지난다. 상수 a의 값은? [160308]

① -7
② -4
③ -1
④ 2
⑤ 5

15) 함수 $f(x)=\sqrt{2x-4}+3$에 대하여 $f^{-1}(5)$의 값은? [190309]

① $\dfrac{5}{2}$
② 3
③ $\dfrac{7}{2}$
④ 4
⑤ $\dfrac{9}{2}$

16) 함수 $y=\sqrt{a(6-x)}\ (a>0)$의 그래프와 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프가 만나는 점을 A라 하자. 원점 O와 점 $\mathrm{B}(6,\ 0)$에 대하여 삼각형 AOB의 넓이가 6일 때, 상수 a의 값은? [170311]
① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5

17) 함수 $f(x)=\sqrt{2x+a}+7$은 $x=-2$일 때 최솟값 m을 갖는다. $a+m$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [190324]

18) 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}$의 역함수의 그래프가 두 점 $(2,\ 0)$, $(5,\ 7)$을 지날 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [160323]

19) 함수 $y=5-2\sqrt{1-x}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 제1사분면에서 만나도록 하는 모든 정수 k의 값의 합은? [190315]
① 11
② 13
③ 15
④ 17
⑤ 19

20) 함수 $f(x)=\sqrt{3x-12}$가 있다. 함수 $g(x)$가 2 이상의 모든 실수 x에 대하여

$$f^{-1}(g(x))=2x$$

를 만족시킬 때, $g(3)$의 값은? [200316]
① 2
② $\sqrt{5}$
③ $\sqrt{6}$
④ $\sqrt{7}$
⑤ $2\sqrt{2}$

21) 함수 $y=2\sqrt{x}$ 의 그래프 위의 점 A 를 지나고 x축, y축에 각각 평행한 직선이 함수 $y=\sqrt{x}$ 의 그래프와 만나는 점을 각각 B, C 라 하자. 삼각형 ACB가 직각이등변삼각형일 때, 삼각형 ACB의 넓이는? (단, 점 A 는 제1사분면에 있다.) [180317]

① $\frac{1}{18}$

② $\frac{1}{15}$

③ $\frac{1}{12}$

④ $\frac{1}{9}$

⑤ $\frac{1}{6}$

22) 좌표평면 위의 두 곡선

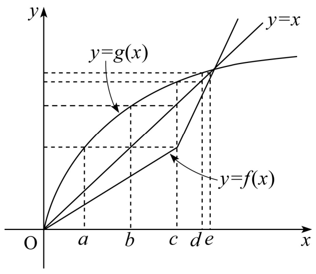
$$y=-\sqrt{kx+2k}+4,\ y=\sqrt{-kx+2k}-4$$

에 대하여 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, k는 0이 아닌 실수이다.) [180320]

ㄱ. 두 곡선은 서로 원점에 대하여 대칭이다.
ㄴ. $k<0$이면 두 곡선은 한 점에서 만난다.
ㄷ. 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 k의 최댓값은 16이다.

① ㄱ
② ㄴ
③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1) 답 : ①



그래프에서 $f(c)=b$ 이므로

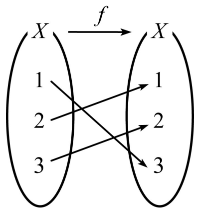
$g^{-1}(f(c))=g^{-1}(b)$

$g^{-1}(b)=k$ 라 하면 $g(k)=b$ 이다.

주어진 그래프에서 $g(a)=b$ 이므로 $k=a$

즉, $g^{-1}(b)=a$ 이다.

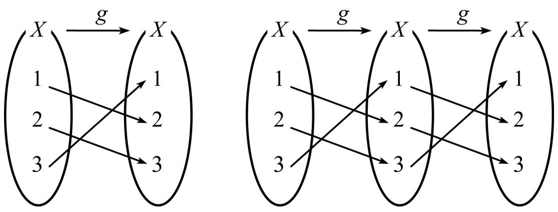
2) 답 : ②



$f^3=I$ 이므로 $f(1)=3$ 이면, $f(3)=2$, $f(2)=1$

함수 f 의 역함수 g 에 대하여 $g^3=I$ 이므로

$g^{10}=g$, $g^{11}=g^2$



$\therefore\ g^{10}(2)+g^{11}(3)=g(2)+g^2(3)=3+2=5$

3) 답 : ①

$f^{-1}(x)=x^2$ 에서 $f(x^2)=x$ $\cdots$ ㉠

$(f\circ g^{-1})(x^2)=x$ 에서 $f(g^{-1}(x^2))=x$ $\cdots$ ㉡

f는 일대일 대응이므로 ㉠, ㉡ 에서 $g^{-1}(x^2)=x^2$

$\therefore\ g(x^2)=x^2$

따라서 $g(20)=20$, $f(20)=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ 이므로

$(f\circ g)(20)=f(g(20))=f(20)=2\sqrt{5}$

4) 답 : ⑤

함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 그림과 같다.

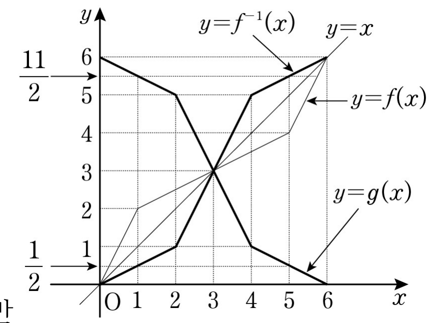
$f^{-1}(1)=g(5)=\dfrac{1}{2}$

$f^{-1}(2)=g(4)=1$

$f^{-1}(3)=g(3)=3$

$f^{-1}(4)=g(2)=5$

$f^{-1}(5)=g(1)=\dfrac{11}{2}$



이므로 등식 $f^{-1}(a)=g(b)$를 만족시키는 두 자연수 a, b의 순서쌍은 $(1,\ 5)$, $(2,\ 4)$, $(3,\ 3)$, $(4,\ 2)$, $(5,\ 1)$의 5개다.

5) 답 : ②

점근선의 방정식이 $x=2$, $y=3$ 이므로

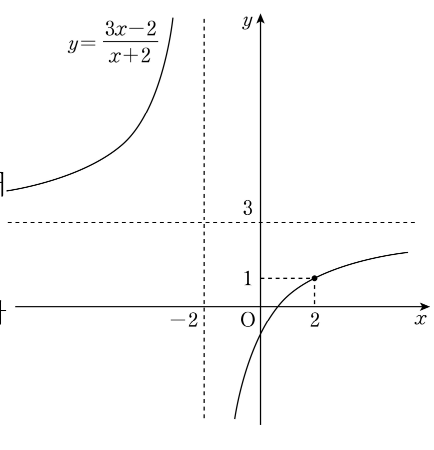
$f(x)=\dfrac{k}{x-2}+3=\dfrac{3x-6+k}{x-2}=\dfrac{ax+1}{x+b}$

$-6+k=1$ 에서 $k=7$

$f(x)=\dfrac{7}{x-2}+3$ 이므로 $f(4)=\dfrac{7}{4-2}+3=\dfrac{13}{2}$

6) 답 : ③

$y=\dfrac{3x+b}{x+a}=\dfrac{-3a+b}{x+a}+3$ $\cdots\cdots$ ㉠



㉠의 그래프가 점 $(-2,\ c)$에 대하여 대칭이므로

$a=2$, $c=3$

㉠의 그래프가 점 $(2,\ 1)$을 지나므로 $1=\dfrac{6+b}{2+a}$ 에서 $a-b=4$

$b=-2$

따라서 $a+b+c=2+(-2)+3=3$

7) 답 : 14

함수 $f(x)=\dfrac{4x+9}{x-1}=\dfrac{4(x-1)+13}{x-1}=\dfrac{13}{x-1}+4$

함수 $f(x)=\dfrac{4x+9}{x-1}$의 그래프의 점근선은 직선 $x=1$, $y=4$ 이므로

$a=1$, $b=4$

$a+b=1+4=5$ 이므로 $f^{-1}(a+b)=f^{-1}(5)=c$ 라 하면

$f(c)=\dfrac{4c+9}{c-1}=5$, $4c+9=5c-5$, $c=14$

따라서 $f^{-1}(a+b)=f^{-1}(5)=14$

8) 답 : ②

함수 $f(x)$의 그래프는 곡선 $y=-\dfrac{2}{x}$를 평행이동한 것이므로 두 상수 m, n에 대하여 $f(x)=-\dfrac{2}{x-m}+n$ 이라 하자. 함수 $f(x)$의 그래프가 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 곡선 $y=f(x)$의 두 점근선 $x=m$, $y=n$의 교점 $(m,\ n)$이 직선 $y=x$ 위에 있다.

따라서 $m=n$

함수 $f(x)$의 정의역이 $\{x\,|\,x\neq-2$ 인 모든 실수$\}$이므로

$m=-2$, $n=-2$ 이다.

$f(x)=-\dfrac{2}{x+2}-2$ 이므로 $f(4)=-\dfrac{2}{4+2}-2=-\dfrac{1}{3}-2=-\dfrac{7}{3}$

9) 답 : ⑤

$f(x)=\dfrac{3x+k}{x+4}=\dfrac{3(x+4)+k-12}{x+4}=3+\dfrac{k-12}{x+4}$ 이고

곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 곡선은 $y-3=3+\dfrac{k-12}{(x+2)+4}$ 이므로 $g(x)=\dfrac{k-12}{x+6}+6$

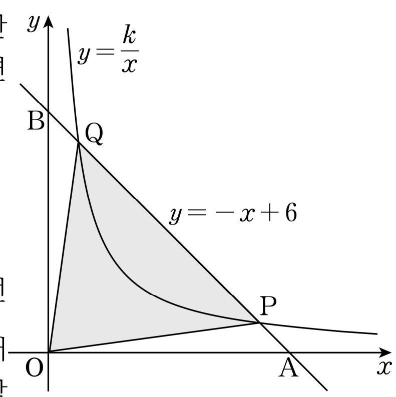
곡선 $y=g(x)$의 점근선의 방정식은 $x=-6$, $y=6$ 이므로 두 점근선의 교점의 좌표는 $(-6,\ 6)$이다.

점 $(-6,\ 6)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(-6)=\dfrac{3\times(-6)+k}{-6+4}=6$

$\therefore\ k=6$

10) 답 : ①



직선 $y=-x+6$ 이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하면

$\mathrm{A}(6,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 6)$

삼각형 OAB의 넓이는

$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\times6\times6=18$

함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프와 직선 $y=-x+6$은 모두 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 삼각형 OAP와 삼각형 OQB의 넓이는 서로 같다. 삼각형 OPQ의 넓이가 14이므로

$\triangle\mathrm{OAP}=\triangle\mathrm{OQB}=\dfrac{1}{2}(18-14)=2$

점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 $\triangle\mathrm{OAP}=\dfrac{1}{2}\times6\times b=2$ 에서 $b=\dfrac{2}{3}$

점 P는 직선 $y=-x+6$ 위의 점이므로

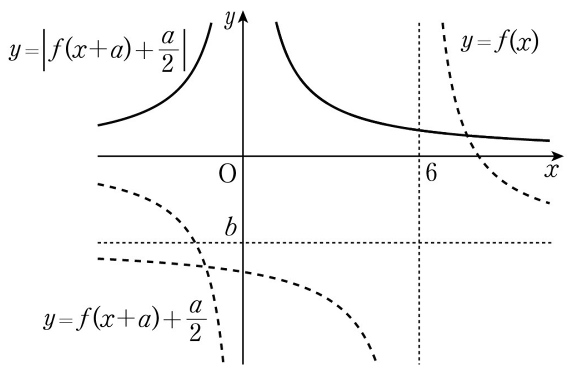
$b=-a+6=\dfrac{2}{3}$ 에서 $a=\dfrac{16}{3}$ 이다.

또, 점 P는 함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$k=ab=\dfrac{16}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{32}{9}$

11) 답 : ④

곡선 $y=\left|f(x+a)+\frac{a}{2}\right|$는 곡선 $y=f(x+a)+\frac{a}{2}$의 x축 아래에 그려진 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이고, 이 곡선이 y축에 대하여 대칭이려면 곡선 $y=f(x+a)+\frac{a}{2}$의 점근선의 방정식은 그림과 같이 $x=0$, $y=0$이어야 함을 알 수 있다.



$f(x)=\frac{a}{x-6}+b$에서 $f(x+a)+\frac{a}{2}=\frac{a}{x+a-6}+b+\frac{a}{2}$

이고 곡선 $y=f(x+a)+\frac{a}{2}$의 점근선의 방정식은

$x=6-a$, $y=b+\frac{a}{2}$이 점근선의 방정식이 $x=0$, $y=0$이어야 하므로 $6-a=0$, $b+\frac{a}{2}=0$, $a=6$, $b=-3$

따라서 $f(x)=\frac{6}{x-6}-3$이므로 $f(b)=f(-3)=-\frac{11}{3}$

12) 답 : ⑤

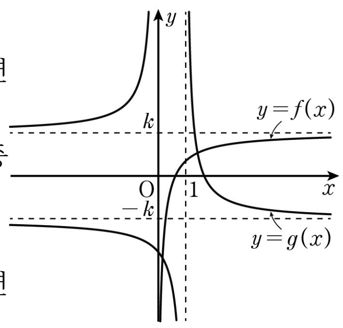
$f(x)=\frac{2x+b}{x-a}=\frac{2(x-a)+2a+b}{x-a}=\frac{2a+b}{x-a}+2$

에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점은 점 $(a,\ 2)$이다.
이때, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점은 점 $(a,\ 2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이므로 그 좌표는 $(2,\ a)$와 같다.
(가)에서 함수 $y=f(x-4)-4$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 그래프와 일치하므로 함수 $y=f(x-4)-4$의 그래프의 두 점근선의 교점은 점 $(a+4,\ -2)$이다.
점 $(2,\ a)$와 점 $(a+4,\ -2)$가 같으므로 $a=-2$

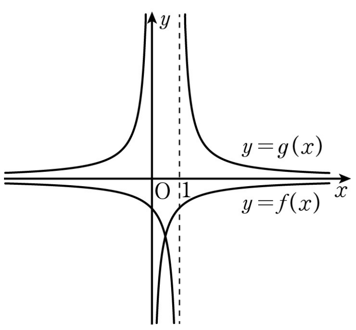
함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=\frac{2a+b}{x}$의 그래프를 평행이동한 그래프와 일치하므로 (나)에서 $2a+b=3$, $b=7$
따라서 $a+b=-2+7=5$

13) 답 : ②

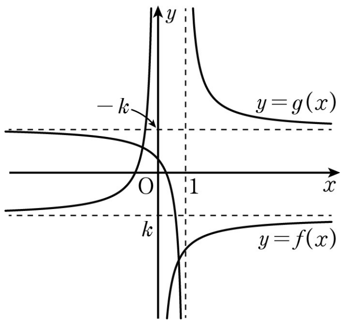
(ⅰ) $k>0$일 때,
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$를 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점 중 x좌표가 양수인 점의 개수는 2이다.
(ⅱ) $k=0$일 때,
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$를 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점 중 x좌표가 양수인 점의 개수는 1이다.
(ⅲ) $k<0$일 때,
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$를 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점 중 x좌표가 양수인 점의 개수는 1이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $h(k)=\begin{cases}1 & (k\le 0)\\ 2 & (k>0)\end{cases}$

연속하는 세 정수 k, $k+1$, $k+2$에 대하여 등식
$h(k)+h(k+1)+h(k+2)=4$ …… ㉠
가 성립하려면
$h(k)=1$, $h(k+1)=1$, $h(k+2)=2$
이어야 한다.
이때 $h(-1)=1$, $h(0)=1$, $h(1)=2$이므로 등식 ㉠을 만족시키는 정수 k의 값은 -1이다.

14) 답 : ②

무리함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수의 식은
$y=\sqrt{a(x-1)}-2$
이 함수의 그래프가 원점을 지나므로
$0=\sqrt{a\times(-1)}-2$, $\sqrt{-a}=2$, $-a=4$, $a=-4$

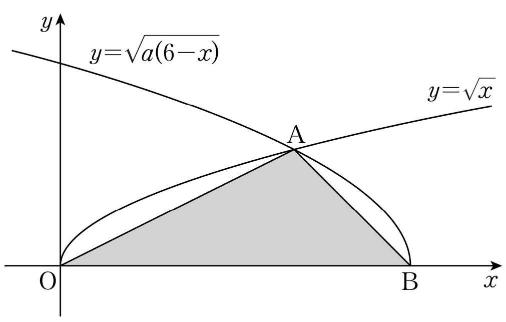
15) 답 : ④

함수 $f(x)=\sqrt{2x-4}+3$에서 $f^{-1}(5)=k$라 하면 $f(k)=5$
$f(k)=\sqrt{2k-4}+3=5$, $\sqrt{2k-4}=2$, $2k-4=4$
따라서 $k=4$이므로 $f^{-1}(5)=4$

16) 답 : ②

점 A의 좌표를 $(p,\ q)$ (p, q는 양수)라 하자. $\overline{\mathrm{OB}}=6$이고 삼각형 AOB의 넓이가 6이므로 $\frac{1}{2}\times6\times q=6$에서 $q=2$이다.

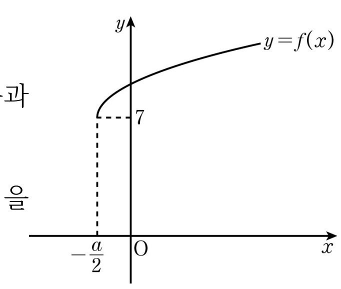
이때 점 $\mathrm{A}(p,\ 2)$는 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점이므로 $2=\sqrt{p}$에서 $p=4$이다.
점 $\mathrm{A}(4,\ 2)$는 곡선 $y=\sqrt{a(6-x)}$ 위의 점이므로
$2=\sqrt{a(6-4)}=\sqrt{2a}$, $2a=4$에서 $a=2$이다.



17) 답 : 11

$f(x)=\sqrt{2x+a}+7=\sqrt{2\left(x+\frac{a}{2}\right)}+7$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

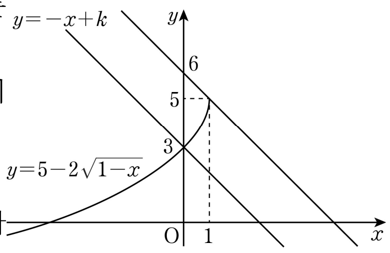


함수 $f(x)$는 $x=-\frac{a}{2}$일 때 최솟값 7을 가진다.

$-\frac{a}{2}=-2$에서 $a=4$이고 $m=7$이므로
$a+m=11$

18) 답 : 7
함수 $y=\sqrt{ax+b}$ 의 역함수의 그래프가 두 점 $(2,\ 0)$, $(5,\ 7)$을 지나므로 함수 $y=\sqrt{ax+b}$ 의 그래프는 두 점 $(0,\ 2)$, $(7,\ 5)$를 지난다.
$2=\sqrt{b}$ 에서 $b=4$
$5=\sqrt{7a+b}$ 에서 $7a+b=25$
$a=3$ 이므로 $a+b=7$

19) 답 : ③
함수 $y=5-2\sqrt{1-x}$ 의 그래프는 그림과 같다.



직선 $y=-x+k$가 점 $(1,\ 5)$를 지날 때의 k의 값은
$5=-1+k$에서 $k=6$
함수 $y=5-2\sqrt{1-x}$ 의 그래프와 y축과의 교점의 y좌표를 구하면
$y=5-2=3$
직선 $y=-x+k$가 점 $(0,\ 3)$을 지날 때의 k의 값은
$3=0+k$에서 $k=3$
따라서 함수 $y=5-2\sqrt{1-x}$ 의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 제1사분면에서 만나도록 하는 k의 값의 범위는 $3<k\leq 6$
따라서 모든 정수 k의 값의 합은 $4+5+6=15$이다.

20) 답 : ③
$f(x)=\sqrt{3x-12}$ 에서 $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{3}x^2+4\ \ (x\geq 0)$

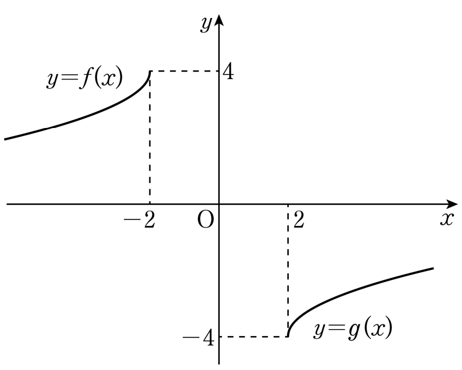
$f^{-1}(g(x))=2x$ 에서 $\dfrac{1}{3}\{g(x)\}^2+4=2x$

이때 $x\geq 2$ 에서 $g(x)\geq 0$ 이므로 $g(x)=\sqrt{6x-12}$
따라서 $g(3)=\sqrt{6\times 3-12}=\sqrt{6}$

21) 답 : ①
점 A의 좌표를 $(a,\ 2\sqrt{a}\,)(a>0)$라 하면
$\mathrm{B}(4a,\ 2\sqrt{a}\,)$, $\mathrm{C}(a,\ \sqrt{a}\,)$가 된다.
직각이등변삼각형 ACB에서 빗변이 아닌 두 변 AB와 AC의 길이가 각각 $3a$, $\sqrt{a}$ 이고 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$ 이므로
$3a=\sqrt{a}$, $9a^2=a$, $a\neq 0$ 이므로 $9a=1$, $a=\dfrac{1}{9}$

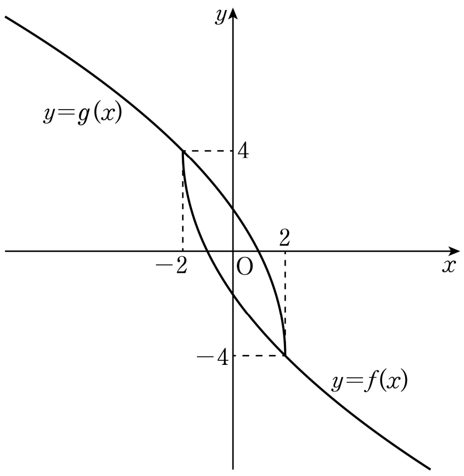
따라서 삼각형 ACB의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times(3a)^2=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{1}{18}$

22) 답 : ④
두 함수 $f(x)$, $g(x)$를
$f(x)=-\sqrt{kx+2k}+4$, $g(x)=\sqrt{-kx+2k}-4$라 하자.
ㄱ. $f(-x)=-\sqrt{-kx+2k}+4=-\left(\sqrt{-kx+2k}-4\right)=-g(x)$
이므로 $g(x)=-f(-x)$
따라서 두 곡선
$y=-\sqrt{kx+2k}+4$, $y=\sqrt{-kx+2k}-4$는 원점에 대하여 대칭이다. (참)
ㄴ. $k<0$이면 두 곡선은 다음과 같다.



따라서 두 곡선은 만나지 않는다. (거짓)

ㄷ. (ⅰ) $k<0$일 때
ㄴ에 의하여 두 곡선은 만나지 않는다.
(ⅱ) $k>0$일 때
ㄱ에서 두 곡선은 원점에 대하여 대칭이고 k의 값이 커질수록 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=4$와 멀어지고 곡선 $y=g(x)$는 직선 $y=-4$와 멀어진다.
따라서 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 k의 최댓값은 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$가 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ -4)$를 지날 때이다.



$-4=-\sqrt{2k+2k}+4$
$\sqrt{4k}=8$, $4k=64$
따라서 $k=16$ (참)